UNIFE - Corso di laurea in Ingegneria Elettronica

Metodi Matematici per l'ingegneria - a.a. 2021–2022

Distribuzioni temperate - Esercizi

M. Miranda - D. Foschi

(versione aggiornata il 6 giugno 2022)

Indichiamo con $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$ la funzione gradino di Heaviside.

1 Calcolo di distribuzioni

Esercizio 1.1. Calcola esplicitamente la distribuzione $\mathrm{e}^{\lambda t}\delta^{(k)}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e ogni $k \in \mathbb{N}_0$.

Esercizio 1.2. Calcola la derivata distribuzionale della funzione parte intera

$$\lfloor t \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leqslant t\}.$$

Esercizio 1.3. Calcola le derivate distribuzionali prime, seconde e terze delle seguenti funzioni:

$$t\,|t|, \qquad \mathrm{e}^{-t}H(t), \qquad \mathrm{e}^{|t|} - \mathrm{e}^{-|t|}.$$

Esercizio 1.4. Nel contesto delle distribuzioni temperate, determina la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, \qquad \cos(2t), \qquad (\sin t)^2, \qquad 1+t^2.$$

2 Convergenza di successioni di distribuzioni

Definizione 2.1. Data una successionte $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di distribuzioni temperate, $T_n \in \mathcal{S}'$, diciamo che la successione converge alla distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$, e scriveremo $T_n \to T$ in $\mathcal{S}'$, per $n \to \infty$ quando si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle$$

per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{S}$.

Esercizio 2.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo le funzioni

$$A_n(t) := \sqrt{\frac{n}{\pi}} \mathrm{e}^{-nt^2}, \qquad B_n(t) := \frac{\sqrt{n}}{\pi(1+nt^2)}, \qquad C_n(t) := \frac{n}{\pi} \operatorname{sinc}\Big(\frac{n}{\pi} t\Big).$$

Verifica che per $n \to +\infty$ le successioni di funzioni $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergono, nello spazio delle distribuzioni temperate, alla distribuzione delta di Dirac concentrata nell'origine.

3 Esercizi facoltativi

La formula di Poisson (Teorema 6.5.2 delle dispense) e la teoria della trasformata di Hilbert (Sezione 6.6 delle dispense) sono argomenti che quest'anno non sono stati svolti a lezione. Se sei uno studente volenteroso e decidi di studiare quei paragrafi autonomamente puoi poi provare a svolgere i seguenti esercizi.

Esercizio 3.1.

- Usando la formula di sommazione di Poisson, calcolare la somma della serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}$.
- Si generalizzi poi il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+k^2}$, con $a > 0$.
- Si usi infine questo risultato per calcolare la somma della serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2}$.

Esercizio 3.2. Determina la trasformata di Hibert della funzione rect.

4 Domande che possono essere chieste all'esame

Ecco un elenco di domande alle quali dovresti essere in grado di rispondere dopo aver studiato gli argomenti svolti a lezione e dopo aver provato a fare gli esercizi proposti. Usa questo elenco come ausilio per prepararti all'esame.

- Come si definisce una distribuzione temperata?
- Che cosa si intende con lo spazio di funzioni test?
- Come si definisce la nozione di convergenza nello spazio delle funzioni test?
- Come si definisce la nozione di convergenza nella spazio delle distribuzioni temperate?
- Spiega come ogni funzione misurabile a crescita lenta può essere identificata con una distribuzioni temperata.
- Che cosa è la distribuzione "delta di Dirac"?
- Che cosa è la distribuzione "valore principale di $1/x$"?

- Come si possono definire cambi di variabile di tipo lineare affine sullo spazio di distribuzioni?
- Come si può definire il prodotto puntuale tra una funzione e una distribuzione temperata?
- Come si può definire il prodotto di convoluzione tra una funzione e una distribuzione temperata?
- Come si può definire la derivata di una distribuzione?
- Come si può definire la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata?
- Mostra come si possono trasferire le proprietà della trasformata di Fourier dalla spazio delle funzioni test allo spazio delle distribuzioni temperate.