EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI
ANNO ACCADEMICO 2024-2025
EQUAZIONI DI SCHRÖDINGER NONLINEARI
PROPOSTE ARGOMENTI D'ESAME

DAMIANO FOSCHI

Indice

Di seguito ecco un elenco di alcuni possibili argomenti, complementari a quanto abbiamo svolto a lezione, che possono essere approfonditi e portati come materiale per l'esame finale del corso. Altre fonti di approfondimento sono i capitoli contenuti nei seguenti testi che trattano di equazioni dispersive:

- Libro di Cazenave su Equazioni di Schrödinger semilineari [2].

- Libro di Linares e Ponce di Introduzione alle Equazioni Dispersive Nonlineari [12].
- Libro di Tao su Equazioni Nonlineari Dispersive [17].

1. Potenziale perturbativo al posto della nonlinearità

Studiare esistenza locale e/o a lungo termine nel caso in cui al posto della nonlinearità abbiamo un potenziale lineare del tipo $V(t,x)u$.

$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = V(t,x)u,$$

dove V è una funzione a valori reali. Quali ipotesi (di integrabilità) serve richiedere a V per poter ottenere esistenza delle soluzioni utilizzando le stime di Strichartz?

Riferimenti bibliografici:

- Appunti di lezione dovrebbero essere sufficienti, in quanto questo caso risulta essere più semplice del caso con nonlinearità potenza, abbiamo che il potenziale $V(t,x)$ essenzialmente prende il ruolo di $|u(t,x)|^{p-1}$.
- Il libro di Cazenave [2] contiene, tra le tante cose che studia, anche il caso in questione.

2. Nonlinearità somme di più potenze

Studiare esistenza locale e/o a lungo termine nel caso in cui la nonlinearità sia una combinazione lineare di due potenze:

$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = A\,|u|^{p_1-1}\,u + B\,|u|^{p_2-1}\,u, \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Quali sono i valori critici rilevanti in questo caso? Cosa succede quando A e B hanno segno diverso, quale comportamento prevale tra *focusing* o *defocusing*?

Riferimenti bibliografici:

- Il lavoro di Tao-Visan-Zhang [18] fa una trattazione completa di questo problema.
- Il libro di Cazenave [2].

3. Soluzioni di blow-up di Glassey (forma generale)

A lezione abbiamo visto un caso particolare di esempio di Blow-up. Una lettura dell'articolo originale di Glassey permette di formulare condizioni più generali per avere soluzioni di scoppio.

Riferimenti bibliografici:

- L'articolo di Glassey [9].
- Il libro di Cazenave [2].

4. Scattering a livello di H^1

Nelle ultime due lezioni del corso abbiamo visto velocemente come provare l'esistenza di soluzioni di scattering per dati in H^1. Mancavano alcuni dettagli che aspettano di essere completati.

Riferimenti bibliografici:

- L'articolo di Visciglia [20] per il decadimento delle norme L^p della soluzione.
- Il libro di Cazenave [2].

5. Scattering a livello di L^2 e trasformazioni pseudo-conformi

Lo scattering per soluzioni globali nel caso defocusing con dati in L^2 si può ottenere tramite l'uso della trasformata *pseudo-conforme* quando i dati iniziali sono contenuti in un particolare sottospazio Σ di L^2 definito da:

$$\Sigma := \left\{ f \in H^1 \colon xf(x) \in L^2 \right\}, \quad \|f\|_\Sigma^2 := \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \|xf\|_{L^2}^2 .$$

La trasformata pseudo-conforme è definita nel seguente modo: fissiamo un $b \in \mathbb{R}$ e consideriamo la trasformazione di coordinate $(t, x) \longrightarrow (s, y)$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ definita da

$$s = \frac{t}{1+bt}, \; y = \frac{x}{1+bt}, \quad t = \frac{s}{1-bs}, \; x = \frac{y}{1-bs}.$$

Data una soluzione u dell'equazione di Schrödinger nonlineare consideriamo la funzione v definita da

$$v(t, x) := (1-bs)^{d/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{b|y|^2}{4(1-bs)}} u(s, y).$$

Risulta che v è ancora una soluzione dell'equazione di Schrödinger nonlineare. Questa trasformazione inoltre preserva lo spazio Σ e permette di ricavare informazioni sul decadimento delle norme L^p delle soluzioni utili per dimostrare lo scattering (nella norma di Σ).

Riferimenti bibliografici:

- Articolo di Tsusumi [19].
- Il libro di Cazenave [2].

6. Integrali a valori in spazi di Banach (Bochner, Pettis).

Quando si riformula il problema di Cauchy di una equazione di evoluzione trasformandolo in un problema di punto fisso, compaiono in modo naturale degli operatori integrali. Gli integrali (rispetto alla variabile temporale) che compaiono in queste formule possono essere interpretati come integrali di funzioni a valori in certi spazi di Banach. I lavori di Bochner e di Pettis hanno portato ad una definizione rigorosa di questi integrali, estendendo la teoria dell'integrale di Lebesgue al caso vettoriale.

Riferimenti bibliografici:

- Il libro di Diestel e Uhl sulle misure vettoriali [5].
- Lavoro di Pettis sull'integrazione di funzioni vettoriali [14].

7. Dualità in spazi misti $L^q([a,b];L^r(\mathbb{R}^d))$

Sappiamo dal corso di Analisi Funzionale che quando $1 \leqslant p < +\infty$ lo spazio duale di L^p si può identificare con $L^{p'}$, dove p' è l'esponente coniugato di p. Diverse volte abbiamo utilizzato, dandolo per scontato, che lo spazio duale dello spazio misto $L^q([a,b];L^r(\mathbb{R}^d))$ fosse $L^{q'}([a,b];L^{r'}(\mathbb{R}^d))$.

In generale, se X è uno spazio di Banach, ci si aspetta che il duale dello spazio $L^p([a,b];X)$ sia identificabile con $L^{p'}([a,b];X')$. Ciò non è sempre vero (si possono costruire controesempi espliciti). La cosa funziona quando X gode della proprietà di Radon-Nikodym, e gli spazi L^p godonno di tale proprietà. Dimostrarlo richiede comunque un po' di lavoro, tra teoria della misura e analisi funzionale.

Riferimenti bibliografici:

- Lavoro di Clarkson sull'uniforme convessità degli spazi L^p [4].
- Lavoro di Pettis sull'integrazione di funzioni vettoriali [14].
- Il libro di Diestel e Uhl sulle misure vettoriali [5].

8. Endpoint Strichartz estimates

Sia $u(t,x)$ soluzione dell'equazione omogenea

$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x).$$

Abbiamo dimostrato le stime di Strichartz per soluzioni dell'equazione omogenea:

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R};L^r(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

per esponenti (q,r) che verificano le condizioni:

$$\frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}, \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{d} < \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Quando $d \geqslant 3$ la stima è valida anche nel caso limite in cui

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}.$$

La dimostrazione richiede l'uso di raffinate tecniche di interpolazione e di analisi armonica come descritte nell'interessante lavoro di Keel-Tao.

Riferimenti bibliografici:

- Lavoro di Keel e Tao [10].

9. Equazione di Korteweg-De Vries

Un modello di evoluzione dispersiva il cui studio ha avuto uno sviluppo parallelo a quello dell'equazione di Schrödinger è l'equazione di Korteweg-De Vries:

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u \partial_x u = 0.$$

Anche per questa equazione è possibile ricavare stime dispersive per la parte lineare con la quale ottenere stime di Strichartz. Il fatto che la nonlinearità contiene una derivata complica un po' le cose.

Riferimenti bibliografici:

- Il lavoro di Kenig-Ponce-Vega su KdV [11].
- Il libro di Linares e Ponce su equazioni dispersive [12].

10. Oscillatore armonico

L'equazione di Schrödinger nonlineare per l'oscillatore armonico contiene un potenziale quadratico (non perturbativo):

$$ß\partial_t u + \Delta u - |x|^2 u = |u|^{p-1} u.$$

Tramite la trasformata di Mehler lo studio dell'evoluzione lineare dell'oscillatore armonico può essere ricondotta a quello dell'evoluzione lineare di Schrödinger senza potenziale armonico.

Riferimenti bibliografici:

- Lavoro di Carles [1].
- Nel ibro di Feynman e Hibbs su meccanica quantistica e path integrals [6], c'è un capitolo intero dedicato all'oscillatore armonico lineare.

11. Stime di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Le stime di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev sono una famiglia di disuguaglianze molto utili nell'analisi nonlineare e che definiscono le relazioni che intercorrono tra le proprietà di regolarità e di integrabilità di una funzione. Sono stime della forma

$$\left\| D^k f \right\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|D^n f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}^{\theta}.$$

Se $0 \leqslant k < n$, per quali p, q, r, θ la stima risulta essere valida? È possibile fornire condizioni necessarie e sufficienti.

Riferimenti bibliografici:

- Lavoro di Gagliardo [8].
- Lavoro di Nirenberg [13].
- Articolo di Fiorenza-Formica-Roskovec-Soudsky [7] dedicato alle stime di G-N-S.
- La pagina di wikipedia da una descrizione dettagliata delle stime e contiene molti riferimenti biliografici: `https://en.wikipedia.org/wiki/Gagliardo-Nirenberg_interpolation_inequality`.

12. Stima dispersiva dimostrata in modo geometrico, senza usare Fourier

Di fondamentale importanza per la teoria delle equazioni di Schrödinger non lineare è la proprietà dispersiva dell'evoluzione lineare omogenea: se u è soluzione di $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0$ allora abbiamo

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim t^{-d/2} \|u(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Noi abbiamo ricavato questa stima dispersiva utilizzando la forma esplicita delle soluzioni del problema lineare ricavata tramite la trasformata di Fourier. Quando si studia l'equazione di Schrödinger su domini diversi dallo spazio euclideo $\mathbb{R}^d$ la trasformata di Fourier non è più uno strumento adeguato Tramite metodi geometrici combinati con tecniche di analisi armonica è possibile ottenere la stima dispersiva direttamente dall'equazione, senza utilizzare la trasformata di Fourier.

Riferimenti bibliografici:

- Articolo di Wong [21] sul metodo dei campi vettoriali per ottenere stime dispersive.
- Dispense di Wong su equazioni dispersive `https://qnlw.info/course-notes/dispersive_notes/dispersive_notes.pdf`.

13. Teoria di Calderon-Zygmund

Tramite la trasformata di Fourier possiamo rappresentare l'operatore di derivazione tramite operatori di moltiplicazione nello spazio delle frequenze:

$$\mathcal{F}[\nabla f](k) = \mathrm{i}k\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{R}^d.$$

Possiamo anche definire un operatore di (pseudo-)derivazione analogo al gradiente:

$$\mathcal{F}[Df](k) = |k|\,\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{R}^d.$$

Per la norma L^2 si verifica facilmente che $\|Df\|_{L^2} = \|\nabla f\|_{L^2}$. Con la teoria di Calderon-Zygmund è possibile dimostrare che le (semi)norme $\|Df\|_{L^p}$ e $\|\nabla f\|_{L^p}$ sono equivalenti per ogni $p \in]1, \infty[$. Questo permette di utilizzare metodi basati sulla trasformata di Fourier anche in spazi costruiti con norme L^p con p diverso da 2.

Riferimenti bibliografici:

- Lezioni di analisi armonica di M. Williams `https://markwilliams.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/19674/2022/01/notesonharmonicanalys` `pdf`, ha un capitolo dedicato agli integrali singolari e alla teoria di Calderon-Zygmunnd.

14. Buona positura locale sotto l'ipotesi di minima regolarità frazionaria

Noi abbiamo visto la teoria di esistenza locale per l'equazione di Schrödinger nonlineare con dati in L^2 e dati in H^1. C'è una relazione tra gli esponenti p della nonlinearità e il grado s di regolarità (di Sobolev) per i dati iniziali; abbiamo ricavato che l'esponente critico di regolarità è dato da:

$$s_*(p) := \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}.$$

Si può dimostrare che si ha esistenza locale di soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1} u$$

quando i dati iniziali hanno regolarità H^s con $s > s_*(p)$ (caso sub-critico). Lo spazio di Sobolev H^s, per $s > 0$, è definito tramite l'operatore di pseudo-derivazione D^s:

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^2 \colon D^s f \in L^2 \right\},$$

$$\mathcal{F}[D^s f](k) = |k|^s \widehat{f}(k),$$

$$\|f\|_{H^s} = \left\| (1 + |k|^2)^{s/2} \widehat{f}(k) \right\|_{L^2}.$$

Riferimenti bibliografici:

- Lavoro di Cazenave e Weissler [3].
- Libro di Cazenave [2].

15. Integrali oscillanti e fase stazionaria e per pacchetti d'onda con generiche relazioni dispersive

Per un generico operatore differenziale dispersivo è possibile costruire pacchetti d'onda come superposizione di onde piane. Questi pacchetti d'onda sono definiti da integrali oscillanti e possono concentrarsi o disperdersi. Le proprietà dispersive seguono dalla relazione dispersiva dell'operatore e possono essere studiate applicando il metodo della fase stazionaria per integrali oscillanti.

Riferimenti bibliografici:

- Lezione di T. Tao `https://www.math.ucla.edu/~tao/247b.1.07w/notes8.pdf` su integrali oscillanti.
- Libro di E. Stein [15] di Analisi Armonica; ha un capitolo dedicato alle stime di decadimento per integrali oscillanti.

16. Equazione delle onde

L'equazione delle onde possiede proprietà dispersive. Sia $u(t,x)$ è soluzione di

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^d,$$

con dati iniziali $u(0,x) = u_0(x)$ e $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$ e supponiamo che u_0 e u_1 abbiano spettro di frequenze limitato in un compatto di $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Allora vale la stima

$$|\partial u(t,x)| \lesssim t^{-\frac{(d-1)}{2}} \|\partial u(0)\|_{L^1}.$$

Riferimenti bibliografici:

- Dispense di M. Visan `https://www.math.ucla.edu/~visan/Oberwolfach2012.pdf`.

17. Articolo originale di Strichartz

Le cosidette stime di Strichartz, fondamentali per la teoria di esistenza locale per equazioni dispersive prendono il loro nome da un lavoro di Robert Strichartz che ha dimostrato alcuni casi particolari. È interessante andare a rivedere l'articolo originale.

Riferimenti bibliografici:

- Articolo di Strichartz [16].

18. Leggi di conservazione, identità viriali e comportamento asintotico delle soluzioni

Sia nella toeria del blow-up che nella teoria dello scattering giocano un ruolo fondamentale alcune leggi di conservazione che sono verificate dalle soluzioni del problema nonlineare. Dalle leggi di conservazione si ricavano identità viriali con le quali si possono dimostrare stime di interazione alla Morawetz utili per capire il comportamento a lungo termine delle soluzioni. È interessante capire quale ruolo le identità viriali giocano nella costruzione di esempi di blow-up, oppure nel costruzione di operatori di scattering.

Riferimenti bibliografici:

- Lezioni del gruppo "dei 5" Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Tao su Equazioni di Schrödinger nonlineari: `https://math.mit.edu/~gigliola/allethlectures.pdf`.

Riferimenti bibliografici

[1] R. Carles. Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential. *Ann. Henri Poincaré*, 3(4):757–772, 2002.

[2] Thierry Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[3] Thierry Cazenave and Fred B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. *Nonlinear Anal.*, 14(10):807–836, 1990.

[4] James A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(3):396–414, 1936.

[5] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr. *Vector measures*, volume No. 15 of *Mathematical Surveys*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1977. With a foreword by B. J. Pettis.

[6] Richard P. Feynman and Albert R. Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, emended edition, 2010. Emended and with a preface by Daniel F. Styer.

[7] Alberto Fiorenza, Maria Rosaria Formica, Tomáš G. Roskovec, and Filip Soudský. Detailed proof of classical Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality with historical remarks. *Z. Anal. Anwend.*, 40(2):217–236, 2021.

[8] Emilio Gagliardo. Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche Mat.*, 8:24–51, 1959.

[9] R. T. Glassey. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 18(9):1794–1797, 1977.

[10] Markus Keel and Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5):955–980, 1998.

[11] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2):323–347, 1991.

[12] Felipe Linares and Gustavo Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2015.

[13] L. Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 13:115–162, 1959.

[14] B. J. Pettis. On integration in vector spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44(2):277–304, 1938.

[15] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[16] Robert S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977.

[17] Terence Tao. *Nonlinear dispersive equations*, volume 106 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. Local and global analysis.

[18] Terence Tao, Monica Visan, and Xiaoyi Zhang. The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities. *Comm. Partial Differential Equations*, 32(7-9):1281–1343, 2007.

[19] Yoshio Tsutsumi. Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 43(3):321–347, 1985.

[20] Nicola Visciglia. On the decay of solutions to a class of defocusing NLS. *Math. Res. Lett.*, 16(5):919–926, 2009.

[21] Willie Wai Yeung Wong. A commuting-vector-field approach to some dispersive estimates. *Arch. Math. (Basel)*, 110(3):273–289, 2018.