

IL LEMMA DI ZORN IMPLICA IL TEOREMA DEL BUON ORDINAMENTO

DAMIANO F.

1. Gli enunciati

Teorema 1.1 (Buon ordinamento). *Ogni insieme ammette un buon ordinamento, ovvero una relazione d'ordine rispetto alla quale ogni sottoinsieme non vuoto ammette minimo.*

Lemma 1.2 (Zorn). *Un insieme ordinato in cui ogni catena ammette un maggiorante possiede un elemento massimale.*

2. Preparazione

Sia E un insieme non vuoto.

Sia Ω l'insieme formato da tutte le coppie $(A, \preccurlyeq)$ in cui $A \subseteq E$ e $\preccurlyeq$ è una relazione d'ordine su A che rende A ben ordinato.

Definiamo su Ω una relazione d'ordine $\leq_\Omega$ ponendo $(A, \preccurlyeq_A) \leq_\Omega (B, \preccurlyeq_B)$ quando $(A, \preccurlyeq_A)$ e $(B, \preccurlyeq_B)$ sono elementi di Ω tali che:

- A è un sottoinsieme di B ;
- la restrizione di $\preccurlyeq_B$ ad A coincide con $\preccurlyeq_A$;
- ogni elemento di B che non è contenuto in A è un maggiorante di A (rispetto all'ordine $\preccurlyeq_B$).

Proposizione 2.1. *Se $(A, \preccurlyeq)$ è un elemento massimale di Ω allora necessariamente $A = E$ e $\preccurlyeq$ rende E ben ordinato.*

Dimostrazione. Sia $(A, \preccurlyeq) \in \Omega$. Supponiamo che A sia un sottoinsieme proprio di E . Esisterà allora un elemento $p \in E \setminus A$. Sull'insieme $B := A \cup \{p\}$ possiamo definire la relazione d'ordine $\preccurlyeq_*$ ponendo $x \preccurlyeq_* y$ quando $x, y \in A$ e $x \preccurlyeq y$, oppure $y = p$. Si verifica facilmente che $\preccurlyeq_*$ è un buon ordinamento su B . In questo modo avremo che $(B, \preccurlyeq_*) \in \Omega$ e $(A, \preccurlyeq_A) \leq_\Omega (B, \preccurlyeq_B)$ con $A \neq B$. Dunque $(A, \preccurlyeq)$ non può essere massimale in Ω . $\square$

Dire che E ammette un buon ordinamento equivale all'esistenza di elementi massimali in Ω .

3. Il rito sacrificale

Per ottenere l'esistenza di un elemento massimale invocando il lemma di Zorn, dobbiamo mostrare l'esistenza di un maggiorante per ogni catena $\mathcal{C}$ di Ω . Consideriamo la coppia $(M, \preccurlyeq_\circ)$ con l'insieme M dato da

$$M := \bigcup_{(A, \preccurlyeq) \in \mathcal{C}} A,$$

e la relazione d'ordine definita da $x \preccurlyeq_\circ y$ quando esiste $(A, \preccurlyeq) \in \mathcal{C}$ tale che $x, y \in A$ e $x \preccurlyeq y$. Si verifica facilmente che $\preccurlyeq_\circ$ è una relazione d'ordine su M .

Proposizione 3.1. *La relazione d'ordine $\preccurlyeq_\circ$ è anche un buon ordinamento su M .*

Dimostrazione. Verifichiamo che Sia B un sottoinsieme non vuoto di M e sia x un elemento di B . Siccome $x \in M$, esisterà $(A, \preceq) \in \mathcal{C}$ tale che $x \in A$. È ben definito l'elemento m minimo del sottoinsieme non vuoto $A \cap B$ rispetto all'ordine di A , in quanto $(A, \preceq)$ è ben ordinato. Avremo dunque che $m \preceq_\circ y$ per ogni $y \in A \cap B$. Se invece $y \in B \setminus A$ allora esisterà $(\tilde{A}, \tilde{\preceq}) \in \mathcal{C}$ tale che $y \in \tilde{A} \setminus A$. Siccome $\mathcal{C}$ è una catena avremo necessariamente che $(A, \preceq) \leq_\Omega (\tilde{A}, \tilde{\preceq})$; dunque y sarà un maggiorante di A (rispetto all'ordine $\tilde{\preceq}$), e in particolare $m \preceq_\circ y$. Ne segue che m è minimo di B rispetto all'ordine $\preceq_\circ$. Questo prova che $\preceq_\circ$ è un buon ordinamento su M e $\square$

Abbiamo quindi che $(M, \preceq_\circ)$ è un elemento di Ω .

Proposizione 3.2. $(M, \preceq_\circ)$ è un maggiorante della catena $\mathcal{C}$.

Dimostrazione. Sia $(A, \preceq) \in \mathcal{C}$. Per costruzione di $(M, \preceq_\circ)$ abbiamo che $A \subseteq M$ e che la restrizione di $\preceq_\circ$ ad A coincide con $\preceq$.

Se $y \in M \setminus A$, allora esisterà $(\tilde{A}, \tilde{\preceq}) \in \mathcal{C}$ tale che $y \in \tilde{A} \setminus A$. Siccome $\mathcal{C}$ è una catena avremo necessariamente che $(A, \preceq) \leq_\Omega (\tilde{A}, \tilde{\preceq})$; dunque y sarà un maggiorante di A (rispetto all'ordine $\tilde{\preceq}$).

Abbiamo così dimostrato che $(A, \preceq) \leq_\Omega (M, \preceq_\circ)$. $\square$