

EQUIVALENZA TRA LEMMA DI ZORN E ASSIOMA DELLA SCELTA

DAMIANO F.

Assioma della scelta: data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti esiste sempre una funzione di scelta $f: \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tale che $f(E) \in E$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.

Lemma di Zorn: in ogni insieme parzialmente ordinato e induttivo, ovvero nel quale ogni sottoinsieme totalmente ordinato ammette un maggiorante, esiste un elemento massimale.

In questa nota vogliamo dimostrare l'equivalenza tra l'assioma della scelta e il lemma di Zorn utilizzando solo nozioni elementari di teoria degli insiemi, evitando di ricorrere esplicitamente all'uso dell'induzione transfinita, o alla teoria dei numeri ordinali.

1. Il lemma di Zorn implica l'assioma della scelta

[Questa implicazione è abbastanza immediata e naturale.]

Data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti sia $U := \bigcup \mathcal{F}$. Consideriamo l'insieme Ω composto dalle coppie $(g, \mathcal{G})$ dove $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ e $g: \mathcal{G} \rightarrow U$ è una funzione tale che $g(E) \in E$ per ogni $E \in \mathcal{G}$. Su Ω consideriamo la relazione d'ordine di prolungamento/restrizione tra funzioni:

$$(g, \mathcal{G}) \leq (h, \mathcal{H}) \iff \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \text{ e } h(E) = g(E) \text{ per ogni } E \in \mathcal{G}.$$

Sia T un sottoinsieme di Ω totalmente ordinato. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{M} := \bigcup \{ \mathcal{G} : (g, \mathcal{G}) \in T \}$$

e definiamo la funzione $m: \mathcal{M} \rightarrow U$ ponendo $m(E) := g(E)$ quando $E \in \mathcal{G}$ e $(g, \mathcal{G}) \in T$. Siccome T è totalmente ordinato la definizione di m è ben posta. La coppia $(m, \mathcal{M})$ per costruzione è un elemento di Ω maggiorante di T . Il lemma di Zorn ci garantisce l'esistenza di un elemento massimale in Ω .

Se abbiamo $(g, \mathcal{G}) \in \Omega$ con $\mathcal{G}$ che non coincide con tutto $\mathcal{F}$, allora esisterà un sottoinsieme $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ ed un elemento $x \in F$ con i quali possiamo costruire l'estensione $(h, \mathcal{H})$ ponendo $\mathcal{H} := \mathcal{G} \cup \{F\}$ e $h: \mathcal{H} \rightarrow U$ con $h(E) = g(E)$ per ogni $E \in \mathcal{G}$ e $h(F) = x$. Chiaramente $(g, \mathcal{G}) < (h, \mathcal{H})$ e dunque $(g, \mathcal{G})$ non è un elemento massimale.

Dunque l'elemento massimale di Ω corrisponderà ad una funzione di scelta definita su tutto $\mathcal{F}$.

2. L'assioma della scelta implica il lemma di Zorn

[Questa implicazione è più impegnativa della precedente. Esistono numerose dimostrazioni più o meno sofisticate. Qui riportiamo essenzialmente quella presentata da Koji Nuida [1] apprezzabile per il livello elementare delle nozioni prerequisite richieste.]

Sia $(\Omega, \leq)$ un insieme ordinato induttivo e sia $\mathcal{P}_* := \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di Ω . L'assioma della scelta ci garantisce l'esistenza di una funzione di scelta $g: \mathcal{P}_* \rightarrow \Omega$ tale che $g(A) \in A$ per ogni $A \in \mathcal{P}_*$.

Per ogni sottoinsieme $E \subseteq \Omega$ indichiamo con $M(E)$ l'insieme dei maggioranti di E e con $M_*(E) := M(E) \setminus E$ l'insieme dei maggioranti stretti di E .

Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di tutte le catene, ovvero di tutti i sottoinsiemi totalmente ordinati, di Ω ; per la proprietà induttiva avremo che $M(E)$ è non vuoto per ogni $E \in \mathcal{T}$.

Se una catena E non possiede maggioranti stretti, allora necessariamente $M(E) = \{\max E\}$ ed avremo inoltre che $\max E$ è elemento massimale di Ω .

Supponiamo ora per assurdo che non esista alcun elemento massimale in Ω , e dunque che ogni catena di Ω possieda almeno un maggiorante stretto, ovvero $M_*(E) \in \mathcal{P}_*$ per ogni $E \in \mathcal{T}$. Possiamo definire la funzione $f: \mathcal{T} \rightarrow \Omega$ ponendo $f(E) = g(M_*(E))$ per ogni catena E . In particolare avremo che $f(E)$ è un maggiorante stretto di E per ogni catena E . Inoltre, se $A, B \in \mathcal{T}$ sono due catene con gli stessi maggioranti stretti avremo che $f(A) = f(B)$.

Definizione 2.1. Date due catene $A, B \in \mathcal{T}$, diremo che A è *ben coperta* da B quando si verificano le seguenti condizioni:

- $A \subseteq B$;
- esiste un elemento $m \in \Omega$ che è un maggiorante stretto di A ma non è maggiorante stretto di B , ovvero $M_*(A) \not\subseteq M_*(B)$.

Lemma 2.2. Se $A, B \in \mathcal{T}$ e $M_*(A) \not\subseteq M_*(B)$ allora nessun elemento di A è maggiorante di B .

Dimostrazione. Infatti se $x \in A$ fosse maggiorante di B , per ogni m maggiorante stretto di A avremmo $m > x \geq y$ per ogni $y \in B$, e dunque m sarebbe maggiorante stretto anche di B . $\square$

In particolare abbiamo che se A è ben coperto da B allora nessun elemento di A è maggiorante di B .

Definizione 2.3. Data una catena $E \in \mathcal{T}$, diremo che E è *ingorda* (relativamente alla funzione f) quando $f(A) \in E$ per ogni catena A che è ben coperta da E .

Indichiamo con $\mathcal{T}_0$ la sottofamiglia di $\mathcal{T}$ formata dalle catene ingorde.

Definizione 2.4. Data una catena ingorda $E \in \mathcal{T}_0$, diremo che E è *prepotente* quando per ogni catena ingorda $A \in \mathcal{T}_0$ si ha che $E \subseteq A \cup M(A)$.

Indichiamo con $\mathcal{T}_*$ la sottofamiglia di $\mathcal{T}_0$ formata dalle catene ingorde e prepotenti. Consideriamo inoltre l'unione di tutte le catene ingorde e prepotenti,

$$E_* := \bigcup \mathcal{T}_*.$$

Proposizione 2.5. L'insieme E_* è una catena ingorda.

Dimostrazione. Verifichiamo prima che E_* è una catena. Siano $x, y \in E_*$ con $x \in A$ e $y \in B$ dove $A, B \in \mathcal{T}_*$. Per definizione di $\mathcal{T}_*$ avremo che $A \subseteq B \cup M_B$ e quindi $x, y \in B$ oppure x è maggiorante di B , e siccome B è totalmente ordinato segue in ogni caso che $x \leq y$ oppure $x \geq y$.

Verifichiamo che la catena E_* è ingorda. Se una catena A è ben coperta da E_* abbiamo che

$$M_*(A) \not\subseteq M_*(E_*) = \bigcap \{M_*(E) : E \in \mathcal{T}_*\}$$

e quindi avremo che $M_*(A) \not\subseteq M_*(E)$ per qualche $E \in \mathcal{T}_*$. Per il lemma 2.2 segue che A non contiene maggioranti di E , ma $A \subseteq E \cup M(E)$ e quindi $A \subseteq E \in \mathcal{T}_* \subseteq \mathcal{T}_0$; per definizione di $\mathcal{T}_0$ allora avremo che $f(A) \in E \subseteq E_*$. $\square$

Sia ora $m := f(E_*)$. L'insieme $E_{**} := E_* \cup \{m\}$ è anch'esso una catena strettamente più grande di E_* in quanto m è un maggiorante stretto di E_* .

Proposizione 2.6. La catena E_{**} è ingorda e prepotente.

Dimostrazione. Verifichiamo prima che E_{**} è ingorda. Sia A una catena ben coperta da E_{**} . Per il lemma 2.2, A non possiede maggioranti di E_{**} , dunque $m \notin A$ e quindi $A \subseteq E_*$. Se l'insieme dei maggioranti stretti di A coincide con l'insieme dei maggioranti

stretti di E_* allora $f(A) = f(E_*) = m \in E_{**}$. Invece, se A possiede un maggiorante stretto che non è maggiorante stretto di E_* , allora A è ben coperta da $E_* \in \mathcal{T}_0$ e per definizione di $\mathcal{T}_0$ avremo che $f(A) \in E_* \subseteq E_{**}$.

Verifichiamo ora che E_{**} è prepotente. Sia E una catena ingorda. Siccome tutte le catene prepotenti sono contenuti in $E \cup M(E)$ lo stesso vale per la loro unione: $E_* \subseteq E \cup M(E)$. Quindi è sufficiente verificare che $m \in E \cup M(E)$. Se m non è maggiorante stretto di E , essendo comunque maggiorante stretto di E_* , segue dal lemma 2.2 che nessun elemento di E_* è maggiorante di E . Dunque dovrà essere $E_* \subseteq E$ e quindi E_* è ben coperta da E . Siccome E è ingorda ne segue che $m = f(E_*) \in E$. $\square$

Siamo arrivati così ad una contraddizione in quanto: se E_{**} è prepotente, per definizione di E_* avremo che $E_{**} \subseteq E_*$ e quindi m non può essere maggiorante stretto di E_* .

3. Considerazioni a latere

L'ingordigia e la prepotenza insieme portano sempre a situazioni assurde.

Riferimenti bibliografici

- [1] Nuida, K., "A simple and elementary proof of Zorn's lemma", *Discrete Mathematics Letters* **13** (2024) 108–110.