ANALISI 3 (A.A. 2023-2024) - LEZIONE 02: SPAZI NORMATI DI DIMENSIONE FINITA E INFINITA

DAMIANO FOSCHI

Nella precedente lezione abbiamo visto come l'introduzione di una norma su uno spazio vettoriale determina una struttura metrica e topologica. In questa lezione discutiamo alcune fondamentali differenze tra il caso di spazi di dimensione finita e il caso di spazi di dimensione infinita. Già nella precedente lezione abbiamo visto un esempio di uno spazio di dimensione infinita su cui era possibile definire due norme che inducevano una diversa struttura topologica. In dimensione finita risulta invece che tutte le norme su uno stesso spazio sono equivalenti tra loro e tutte inducono la stessa topologia.

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti della lezione precedente, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- definizioni di *estremo inferiore* e di *estremo superiore* per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$;
- *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* per il prodotto scalare di vettori in $\mathbb{R}^n$ [Analisi 2, Geometria 1];
- *teorema di Weierstrass* per funzioni continue su domini compatti [Analisi 1, 2];
- *teorema di Heine-Borel* sulla caratterizzazione dei compatti in $\mathbb{R}^n$ [Analisi 1, Geometria 2].

1. Confronto fra norme di uno stesso spazio

Definizione 1.1. Siano $\|\cdot\|_\flat$ e $\|\cdot\|_\sharp$ due norme sullo stesso spazio vettoriale V. Diciamo che la norma $\|\cdot\|_\sharp$ *domina* la norma $\|\cdot\|_\flat$ quando esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|\boldsymbol{v}\|_\flat \leqslant C\,\|\boldsymbol{v}\|_\sharp\,, \tag{1}$$

per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$. Le due norme si dicono *equivalenti* quando ciascuna domina l'altra, ovvero quando esistono due costanti $A, B > 0$ tali che:

$$A\,\|\boldsymbol{v}\|_\flat \leqslant \|\boldsymbol{v}\|_\sharp \leqslant B\,\|\boldsymbol{v}\|_\flat\,, \tag{2}$$

per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$.

Lemma 1.2. *Se la norma $\|\cdot\|_\sharp$ domina la norma $\|\cdot\|_\flat$ allora ogni palla aperta $B_\flat(\boldsymbol{p}, r)$ definita con la metrica $\flat$ contiene la palla aperta $B_\sharp(\boldsymbol{p}, r/C)$ definita con la metrica $\sharp$, dove C è la costante che compare nella stima* (1) *della definizione 1.1.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che se $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|_\sharp < r/C$, allora

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|_\flat \leqslant C\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|_\sharp < r.$$

□

Proposizione 1.3. *Se la norma $\|\cdot\|_\sharp$ domina la norma $\|\cdot\|_\flat$ allora gli aperti nella topologia $\flat$ di $(V, \|\cdot\|_\flat)$ sono aperti anche nella topologia $\sharp$ di $(V, \|\cdot\|_\sharp)$.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di V. Per il lemma precedente, se $\boldsymbol{p}$ è un punto interno ad A rispetto alla topologia $\flat$, allora $\boldsymbol{p}$ è un punto interno ad A anche rispetto alla topologia $\sharp$. Dunque se A è aperto rispetto a $\flat$, tutti i suoi punti sono interni nella topologia $\flat$, e quindi sono interni anche rispetto alla topologia $\sharp$ e quindi A è aperto anche rispetto a $\sharp$. □

Proposizione 1.4. *Due norme equivalenti definiscono la stessa topologia.*

Date: ultimo aggiornamento, 5 ottobre 2023.

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione precedente nei due sensi. □

La condizione (2) può anche essere scritta come

$$A \leqslant \frac{\|\boldsymbol{v}\|_\sharp}{\|\boldsymbol{v}\|_\flat} \leqslant B, \tag{3}$$

per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ con $\boldsymbol{v} \neq 0$. Le costanti ottimali che determinano l'equivalenza sono date dal valore massimo per A e dal valore minimo per B per i quali (3) rimane valida, ovvero

$$A_{\max} := \inf_{\boldsymbol{v}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{v}\|_\sharp}{\|\boldsymbol{v}\|_\flat}, \quad B_{\min} := \sup_{\boldsymbol{v}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{v}\|_\sharp}{\|\boldsymbol{v}\|_\flat}.$$

Esempio 1.5. Considera le norme su $\mathbb{K}^d$ definite da

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j|\,; \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2}; \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{j=1,\dots,d} |x_j|\,;$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$. Si verifica facilmente che

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant d\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty\,,$$

e che

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \leqslant d\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty^2\,,$$

per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^d$. Ne segue che le tre norme sono tra loro equivalenti. In particolare, abbiamo che su $\mathbb{K}^d$ le nozioni di insieme aperto, insieme chiuso, insieme limitato, insieme compatto, coincidono per ciascuna delle tre norme.

2. Spazi di dimensione finita

Tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita $d \in \mathbb{N}$ definiti su un campo $\mathbb{K}$ sono algebricamente isomorfi allo spazio modello $\mathbb{K}^d$. Cerchiamo di capire allora cosa succede quando confrontiamo tra loro norme diverse definite su $\mathbb{K}^d$. Vediamo il caso reale, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e lasciamo come esercizio di verificare che gli stessi risultati valgono anche per il caso complesso, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, con piccole e naturali modifiche ai passaggi nella dimostrazione.

Indichiamo la norma euclidea di un vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ con

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2},$$

e ricordiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per il prodotto scalare su $\mathbb{R}^d$,

$$\sum_{j=1}^{d} x_j y_j \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2\,\|\boldsymbol{y}\|_2\,, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Proposizione 2.1. *Sia $d \in \mathbb{N}$. Tutte le norme su $\mathbb{R}^d$ sono equivalenti alla norma euclidea.*

Essendo l'equivalenza tra norme una relazione di equivalenza, per la proprietà transitiva, dalla proposizione otteniamo immediatamente il seguente corollario.

Corollario 2.2. *Tutte le norme su $\mathbb{R}^d$ sono equivalenti tra loro.*

Dimostrazione della proposizione 2.1. Sia $\|\cdot\|_\star$ una norma su $\mathbb{R}^d$. Siano $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_d$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^d$. Possiamo scrivere ogni vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica usando le coordinate come coefficienti $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{d} x_j \boldsymbol{e}_j$. Applicando la disuguaglianza triangolare e la proprietà di omogeneità per la norma $\star$ e poi la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (4), otteniamo

$$\|\boldsymbol{x}\|_\star \leqslant \sum_{j=1}^{d} \|x_j \boldsymbol{e}_j\|_\star \leqslant \sum_{j=1}^{d} |x_j|\,\|\boldsymbol{e}_j\|_\star \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|\boldsymbol{e}_j\|_\star^2}.$$

Dunque se poniamo $A := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|\boldsymbol{e}_j\|_\star^2}$ otteniamo che $\|\boldsymbol{x}\|_\star \leqslant A\,\|\boldsymbol{x}\|_2$ per ogni vettore $\boldsymbol{x}$; ovvero la norma euclidea domina la norma $\star$.

Per provare il viceversa, consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}\|_\star$. Per la disuguaglianza triangolare rovesciata per la norma $\star$ abbiamo che

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| = \left|\|\boldsymbol{x}\|_\star - \|\boldsymbol{y}\|_\star\right| \leqslant \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\star \leqslant A\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2\,, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d,$$

ciò prova che f è lipschitziana e quindi continua rispetto alla norma euclidea. La sfera unitaria euclidea

$$U = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d\colon\ \|\boldsymbol{u}\|_2 = 1\right\} = f^{-1}(\{1\})$$

è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^d$ rispetto alla metrica euclidea; per il teorema di Heine-Borel ne segue che U è un compatto. Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua f possiede un punto di minimo sul compatto U, e dunque esiste un punto $\boldsymbol{u}_\star \in U$ tale che

$$\min_{\boldsymbol{u}\in U} \|\boldsymbol{u}\|_\star = \min_{\boldsymbol{u}\in U} f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}_\star) = \|\boldsymbol{u}_\star\|_\star\,.$$

Tale valore minimo $B := \|\boldsymbol{u}_\star\|_\star > 0$ è strettamente positivo in quanto $\boldsymbol{u}_\star$ è un vettore non nullo, essendo $\|\boldsymbol{u}_\star\|_2 = 1$. Per ogni $\boldsymbol{x}$ non nullo abbiamo che $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\boldsymbol{x} \in U$ e dunque

$$\|\boldsymbol{x}\|_\star = \|\boldsymbol{x}\|_2 \left\|\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\boldsymbol{x}\right\|_\star \geqslant \|\boldsymbol{x}\|_2\, B.$$

Dunque $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \frac{1}{B}\,\|\boldsymbol{x}\|_\star$ per ogni vettore $\boldsymbol{x}$; ovvero la norma $\star$ domina la norma euclidea. $\square$

Sia ora $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato reale di dimensione finita e sia $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_d\}$ una base algebrica per V. Sappiamo che ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B,

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \boldsymbol{b}_j,$$

con $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$. L'applicazione $\phi\colon \mathbb{R}^d \to V$ che a $\boldsymbol{\lambda}$ fa corrispondere il vettore

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}) := \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \boldsymbol{b}_j \tag{5}$$

è un isomorfismo lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^d$ e V. Grazie a questo isomorfismo possiamo far corrispondere alla norma su V una norma definita su $\mathbb{R}^d$ ponendo

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|_\star := \|\phi(\boldsymbol{\lambda})\|_V\,, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

Lasciamo per esercizio al lettore il compito di verificare che $\|\cdot\|_\star$ così definita è effettivamente una norma su $\mathbb{R}^d$.

Teorema 2.3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Tutte le norme su V sono equivalenti tra loro.*

Dimostrazione. Siano $\|\cdot\|_\flat$ e $\|\cdot\|_\sharp$ due norme su V. Sia $d \in \mathbb{N}$ la dimensione di V. Tramite l'applicazione ϕ definita sopra possiamo definire su $\mathbb{R}^d$ due norme corrispondenti alle norme su V ponendo

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\flat\star} := \|\phi(\boldsymbol{\lambda})\|_\flat\,, \quad \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\sharp\star} := \|\phi(\boldsymbol{\lambda})\|_\sharp\,, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d.$$

Per il corollario 2.2 le due norme $\|\cdot\|_{\flat\star}$ e $\|\cdot\|_{\sharp\star}$ sono equivalenti, ovvero esistono due costanti $A, B > 0$ tali che

$$A\,\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\flat\star} \leqslant \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\sharp\star} \leqslant B\,\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\flat\star}\,, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d.$$

Essendo ϕ un isomorfismo, quindi suriettivo, le ultime disuguaglianze si possono riscrivere come

$$A\,\|\boldsymbol{v}\|_\flat \leqslant \|\boldsymbol{v}\|_\sharp \leqslant B\,\|\boldsymbol{v}\|_\flat\,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,$$

ovvero le due norme $\|\cdot\|_\flat$ e $\|\cdot\|_\sharp$ sono equivalenti. $\square$

Osservazione 2.4. Il fatto che su uno spazio di dimensione finita tutte le norme siano equivalenti significa che su tale spazio esiste di fatto una sola topologia metrica compatibile con la struttura lineare ed è quella determinata dalla metrica euclidea. In particolare abbiamo che tutti gli spazi normati di dimensione finita sono completi, ovvero spazi di Banach, essendo isomorfi dal punto di vista topologico a $\mathbb{R}^d$ (o $\mathbb{C}^d$).

3. Spazi di dimensione infinita

In dimensione infinita non tutte le norme su uno stesso spazio sono equivalenti. Ad esempio, nella precedente lezione, abbiamo visto che lo spazio $C[0,1]$ con la norma uniforme $\|f\|_\infty := \max|f|$ è uno spazio di Banach, mentre lo stesso spazio con la norma della massa $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$ non è completo. Dunque le due norme non sono equivalenti in quanto inducono su $C[0,1]$ due topologie differenti.

Un'altra caratteristica importante che differenzia gli spazi di dimensione infinita da quelli di dimensione finita è che in dimensione infinita non vale più la caratterizzazione dei compatti del teorema di Heine-Borel, non tutti gli insiemi chiusi limitati sono compatti. In particolare la sfera unitaria $U := \{\boldsymbol{u} \in V : \|\boldsymbol{u}\| = 1\}$ non è mai compatta in dimensione infinita. Per dimostrarlo utilizziamo il seguente lemma che ci permetterà di costruire una successione in U che non possiede alcuna sottosuccessione convergente.

Lemma 3.1 (Riesz)**.** *Sia* $(V, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato, sia* S *un suo sottospazio vettoriale non denso in* V *e sia* $\varepsilon > 0$. *Allora esiste un vettore* $\boldsymbol{u} \in V$ *tale che*

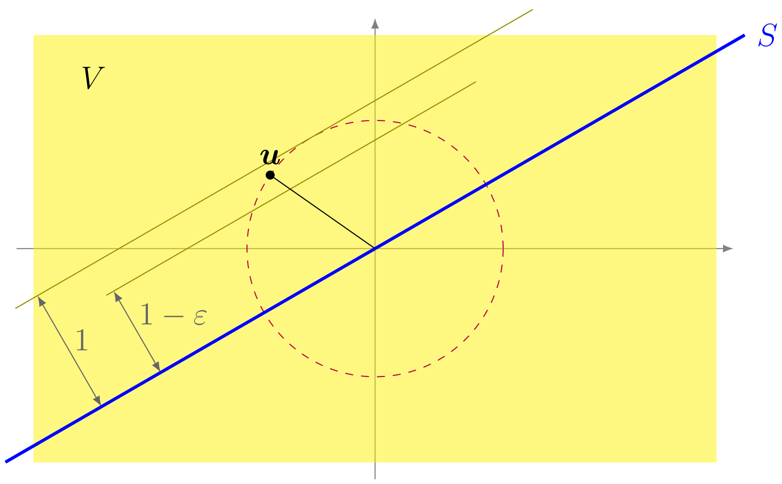
$$\|\boldsymbol{u}\| = 1, \qquad \operatorname{dist}(\boldsymbol{u}, S) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{7}$$

Ricordiamo che un sottoinsieme E di uno spazio metrico M si dice *denso* quando ogni intorno di ogni punto di M contiene punti di E, ovvero quando ogni palla metrica di M contiene almeno un punto di E; ciò equivale anche a dire che la chiusura di E in M coincide con M. Quindi un insieme E non è denso in M se e solo se esiste in M una palla che non interseca E, ovvero esiste in M un punto che ha una distanza strettamente positiva da E.

Ricordiamo inoltre che la distanza tra un punto p e un sottoinsieme E in uno spazio metrico è data da

$$\operatorname{dist}(p, E) := \inf_{x \in E} \operatorname{dist}(p, x).$$

Possiamo dare una interpretazione geometrica del lemma 3.1 se osserviamo che la proprietà (7) esprime una condizione di "quasi ortogonalità" di $\boldsymbol{u}$ rispetto ad S (nel caso della norma euclidea $\boldsymbol{u}$ sarebbe effettivamente un vettore ortogonale ad S se la condizione valesse per ogni $\varepsilon > 0$). Dunque il lemma di Riesz ci dice che finché il sottospazio S non è denso in V è sempre possibile trovare una direzione quasi ortogonale ad S.



Dimostrazione del lemma 3.1. Siccome S non è denso in V esisterà un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ esterno ad S con distanza positiva da S,

$$d := \operatorname{dist}(\boldsymbol{v}, S) := \inf_{\boldsymbol{x} \in S} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}\| > 0.$$

Poiché $(1+\varepsilon)d > \operatorname{dist}(\boldsymbol{v}, S)$, esisterà un vettore $\boldsymbol{w} \in S$ tale che

$$d \leqslant \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| < (1+\varepsilon)d.$$

Poniamo $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|}$, otteniamo così un vettore unitario, $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. Per ogni $\boldsymbol{x} \in S$ abbiamo che

$$\boldsymbol{y} := \boldsymbol{w} + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|\,\boldsymbol{x}$$

è un vettore di S; dunque

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}\| = \left\|\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|} - \boldsymbol{x}\right\| = \left\|\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}-\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|\,\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|}\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|}\big\|\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{w}+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|\,\boldsymbol{x})\big\| =$$
$$= \frac{1}{\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|}\,\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}\| = \frac{d}{\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|} > \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon.$$

Prendendo l'estremo inferiore al variare di $\boldsymbol{x} \in S$ otteniamo

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{u}, S) = \inf_{\boldsymbol{x}\in S} \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}\| \geqslant 1-\varepsilon.$$

□

Lemma 3.2. *Sia S un sottospazio di uno spazio normato V. Se S ha dimensione finita allora è chiuso in V.*

Dimostrazione. Il sottospazio S con la norma di V è uno spazio normato di dimensione finita e dunque è completo (vedi osservazione 2.4), e quindi è chiuso. □

Lemma 3.3. *Sia S un sottospazio chiuso e denso in uno spazio normato V allora $S = V$.*

Dimostrazione. Se S è chiuso allora S coincide con la sua chiusura $\overline{S}$. Se S è denso allora la sua chiusura $\overline{S}$ coincide con tutto V. □

Dal lemma precedente segue che un sottospazio di dimensione finita non è mai denso in uno spazio normato di dimensione infinita.

Proposizione 3.4. *Se V è uno spazio normato di dimensione infinita allora esiste una successione di vettori $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che:*

- $\|\boldsymbol{u}_n\| = 1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
- $\|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m\| \geqslant 1/2$ *per ogni* $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n \neq m$.

Prima di dimostrare la proposizione vediamo subito la sua applicazione.

Teorema 3.5. *In uno spazio normato di dimensione infinita la sfera unitaria non è mai compatta.*

Dimostrazione. La successione fornita dalla proposizione 3.4 è una successione di vettori della sfera unitaria tale che ogni sua sottosuccessione non può essere di Cauchy e dunque nessuna sua sottosuccessione può essere convergente. Dunque la sfera unitaria non è compatta. □

Dato un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ indichiamo con $\operatorname{span} E$ il sottospazio di V generato da E, ovvero l'insieme di tutte le combinazioni lineari di un numero finito di vettori di E, ovvero il più piccolo sottospazio di V che contiene E,

$$\operatorname{span} E = \left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{v}_j \colon n \in \mathbb{N},\ \lambda_j \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{v}_j \in E,\ j = 1, \ldots, n\right\}.$$

Dimostrazione della proposizione 3.4. Sia V uno spazio normato di dimensione infinita e sia U la sua sfera unitaria,

$$U = \{\boldsymbol{u} \in V \colon\ \|u\| = 1\}.$$

Partiamo scegliendo un qualsiasi vettore unitario $\boldsymbol{u}_1 \in U$. Sia $S_1 := \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1\}$. Il sottospazio S_1 ha dimensione 1 e dunque non è denso in V. Per il lemma di Riesz esisterà un vettore $\boldsymbol{u}_2 \in U$ tale che $\operatorname{dist}(u_2, S_1) \geqslant 1/2$ e dunque in particolare avremo che $\|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1\| \geqslant 1/2$.

Iterando il procedimento possiamo costruire la successione cercata in modo induttivo. Supponiamo infatti di avere n vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in U$ tali che $\|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_k\| \geqslant 1/2$ per ogni coppia di indici con $j \neq k$. Consideriamo il sottospazio $S_n := \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$; esso, avendo dimensione finita, non è denso in V. Per il lemma di Riesz esisterà un vettore $\boldsymbol{u}_{n+1} \in U$ tale che $\operatorname{dist}(\boldsymbol{u}_{n+1}, S_n) \geqslant 1/2$ e dunque in particolare avremo anche che $\|\boldsymbol{u}_{n+1} - \boldsymbol{u}_k\| \geqslant 1/2$ per ogni $k = 1, \ldots n$. □

4. Esercizi

4.1. **Confronto tra norme di uno stesso spazio.**

Esercizio 4.1. Verifica che la nozione di equivalenza tra norme della definizione 1.1 è effettivamente una relazione di equivalenza, ovvero che si tratta di una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva.

Esercizio 4.2. Determina tutte le costanti ottimali che stabiliscono le varie equivalenze tra ogni coppia di norme tra le tre norme su $\mathbb{K}^d$ considerate nell'esempio 1.5.

Esercizio 4.3. Dimostra che le tre norme su $C[0,1]$ definite da

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t; \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\ \mathrm{d}t}; \quad \|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|\,;$$

non sono equivalenti tra loro. Determina quale di esse domina le altre.

Esercizio 4.4 (Viceversa della proposizione 1.4). Dimostra che se due norme su uno stesso spazio vettoriale inducono la stessa topologia allora sono equivalenti.

4.2. **Spazi di dimensione finita.**

Esercizio 4.5. Sia $d \in \mathbb{N}$. Dimostra che tutte le norme su $\mathbb{C}^d$ sono equivalenti tra loro.

Esercizio 4.6. Dimostra che la norma definita in (6) gode di tutte le proprietà di una norma.

Esercizio 4.7. Spiega perché la mappa ϕ definita in (5) trasforma successioni di Cauchy di $\mathbb{R}^d$ in successioni di Cauchy di V e trasforma compatti di $\mathbb{R}^d$ in compatti di V.

Esercizio 4.8. Spiega perchè il teorema di Heine-Borel, ovvero che dice che in $\mathbb{R}^d$ ogni ogni insieme chiuso e limitato è compatto, vale anche in ogni spazio normato di dimensione finita.

4.3. **Spazi di dimensione infinita.**

Esercizio 4.9. Dimostra che in uno spazio normato di dimensione infinita nessuna palla metrica può avere chiusura compatta.

Esercizio 4.10. Spiega perchè un sottoinsieme compatto di uno spazio normato di dimensione infinita non può avere punti interni.