ANALISI 3 - L12 - L13A:
PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

In queste lezioni introduciamo un'operazione tra funzioni detta prodotto di convoluzione che consiste nell'associare ad una coppia di funzioni f e g definite su $\mathbb{R}^d$ una nuova funzione $f * g$ definita su $\mathbb{R}^d$ tramite l'integrale

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Nelle prossime lezioni vedremo come questa operazione di convoluzione ci permetterà di ottenere approssimazioni di funzioni L^p con funzioni di classe C^∞.

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- *integrali multipli* [Analisi 2];
- teoremi di *Tonelli* e di *Fubini* per integrali multipli [Analisi 2].

1. Scambio dell'ordine di integrazione

Avremo bisogno di studiare norme L^p, che significa calcolare integrali, di funzioni definite tramite integrali, e quindi ci troveremo in situazioni dove compariranno integrali multipli, e in alcuni casi ci tornerà comodo poter effettuare uno scambio nell'ordine di integrazione. Ripassiamo dunque i teoremi di Tonelli e di Fubini che ci indicano quando è lecito scambiare l'ordine di integrazione.

Partiamo con un esempio per capire come non sia sempre permesso scambiare l'ordine di integrazione in un integrale multiplo.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione $f(x,y) := \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ per $(x,y) \in]0,1]\times]0,1]$ e calcoliamo i seguenti due integrali, che differiscono tra loro solo per l'ordine di integrazione,

$$A := \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \quad B := \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Osserviamo che

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

e quindi per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2},$$
$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{-y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Date: ultimo aggiornamento, 24 dicembre 2022.

Integrando ulteriormente troviamo

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = [\arctan y]_{y=0}^{y=1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$
$$B = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -[\arctan x]_{x=0}^{x=1} = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

In questo caso cambiando l'ordine di integrazione si ottengono due valori differenti.

Osserviamo anche che la funzione $f(x,y)$ non è una funzione di classe L^1 sul quadrato $Q :=]0,1]\times]0,1]$. Infatti abbiamo che $|f(x,y)| = f(x,y)$ per $0 < x \leqslant y \leqslant 1$, e $|f(x,y)| = -f(x,y)$ per $0 < y \leqslant x \leqslant 1$; sfruttando i calcoli fatti prima troviamo che

$$\begin{aligned}\iint_Q |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \Big(\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \Big(\frac{y}{y^2+y^2} - \frac{0}{0^2+y^2} - \frac{1}{1^2+y^2} + \frac{y}{y^2+y^2}\Big)\,\mathrm{d}y = \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y^2}\Big)\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big(-\log\varepsilon - \frac{\pi}{4} + \arctan\varepsilon\Big) = +\infty.\end{aligned}$$

Il fatto che i valori degli integrali A e B siano differenti è proprio collegato alla mancanza di integrabilità di $|f|$.

Supponiamo che Ω sia un insieme misurabile (rispetto alla misura di Lebesgue) in $\mathbb{R}^d$ e che Γ sia un insieme misurabile (rispetto alla misura di Lebesgue) in $\mathbb{R}^k$. Il prodotto cartesiano $\Omega\times\Gamma$ è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^{d+k}$. Sia f una funzione misurabile definita su $\Omega\times\Gamma$, che indicheremo con $f(x,y)$ sottointendendo che $x\in\Omega$ e $y\in\Gamma$. Ci chiediamo sotto quali condizioni i seguenti tre integrali siano ben definiti, e sotto quali ipotesi i loro valori coincidano

$$\begin{aligned}I_0(f) &:= \iint_{\Omega\times\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\ I_1(f) &:= \int_\Gamma\Big(\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y,\\ I_2(f) &:= \int_\Omega\Big(\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La risposta ci è data dai teoremi di Tonelli e di Fubini.

Teorema 1.2 (Tonelli). *Se $f\colon \Omega\times\Gamma\to[0,+\infty]$ è una funzione misurabile a valori non negativi allora i tre integrali coincidono $I_0(f) = I_1(f) = I_2(f)$ (nel senso che o convergono tutti allo stesso valore finito, o sono tutti e tre divergenti).*

Teorema 1.3 (Fubini). *Se $f\colon\Omega\times\Gamma\to\mathbb{C}$ è una funzione misurabile tale che gli integrali $I_j(|f|)$ abbiano valore finito per $j = 0,1,2$ (basta verificare che uno di essi sia finito, essendo $|f|$ una funzione misurabile a valori non negativi il teorema di Tonelli ci garantisce che questi tre valori coincidono), allora sono finiti anche gli integrali $I_j(f)$ per $j = 0,1,2$, e i loro valori coincidono $I_0(f) = I_1(f) = I_2(f)$.*

In sintesi Tonelli ci dice che è indifferente l'ordine di integrazione quando $f \geqslant 0$, mentre Fubini ci dice che è indifferente l'ordine di integrazione quando $f\in L^1(\Omega\times\Gamma)$. Nel caso della funzione dell'esempio 1.1 nessuna delle due ipotesi è verificata.

Il teorema di Tonelli e il teorema di Fubini sono validi non solo per la misura di Lebesgue, ma continuano a valere anche nel caso di misure astratte, purché siano σ-finite (ovvero quando lo spazio su cui sono definite è unione numerabile di insiemi di misura finita).

2. Dualità in L^p

La disuguaglianza di Hölder che abbiamo dimostrato nella precedente lezione implica che quando (p, q) è una coppia di esponenti coniugati, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale la stima

$$\left| \int f g \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \,, \quad \forall f \in L^p,\, g \in L^q. \tag{1}$$

Questo risultato ci permette di stabilire una sorta di dualità tra gli spazi coniugati L^p e L^q. Data una funzione $g \in L^q$ consideriamo il funzionale lineare $\varphi_g \colon L^p \to \mathbb{C}$ definito da

$$\varphi_g(f) := \int f g \, \mathrm{d}\mu, \quad \forall f \in L^p. \tag{2}$$

La stima (1) ci assicura che φ_g è continuo e dunque che φ_g appartiene allo spazio duale di L^p, abbiamo infatti che

$$\|\varphi_g\|_{(L^p)'} := \sup_{\substack{f \in L^p \\ f \neq 0}} \frac{|\varphi_g(f)|}{\|f\|_p} = \sup_{\substack{f \in L^p \\ f \neq 0}} \frac{\left|\int f g \, \mathrm{d}\mu\right|}{\|f\|_p} \leqslant \|g\|_q \,. \tag{3}$$

Inoltre, se scegliamo $f_\star := |g|^{q-2} \, \overline{g}$, abbiamo $|f_\star| = |g|^{q-1}$, e siccome per esponenti coniugati vale $(q-1)p = q$ ricaviamo

$$\|f_\star\|_p = \left\| |g|^{q-1} \right\|_p = \|g\|_q^{q-1} \,.$$

Inoltre

$$\varphi_g(f_\star) = \int |g|^{q-2} \, \overline{g} g \, \mathrm{d}\mu = \int |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_q^q \,.$$

Questo ci permette di stimare dal basso la norma operatoriale di φ_g:

$$\|\varphi_g\|_{(L^p)'} \geqslant \frac{|\varphi_g(f_\star)|}{\|f_\star\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q \,. \tag{4}$$

Le due stime (3) e (4) implicano che

$$\|\varphi_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_q$$

L'applicazione lineare $\Phi \colon L^q \to (L^p)'$ che alla funzione g associa il funzionale lineare continuo φ_g è dunque una applicazione lineare continua; è anche iniettiva in quanto preserva le distanze. Essa permettere di immergere lo spazio L^q nel duale di L^p quando p e q sono esponenti coniugati. Si può dimostrare che per $1 \leqslant p < \infty$ l'applicazione Φ è anche suriettiva, ovvero che tutti i funzionali lineari e continui su L^p sono della forma (2) per una funzione in L^q. Questo ci permette di realizzare l'identificazione $(L^p)' = L^q$ tramite la dualità $(f, g) \mapsto \int f g \, \mathrm{d}\mu$. In particolare abbiamo $(L^1)' = L^\infty$ e $(L^2)' = L^2$. (Ma attenzione, non vale per $(L^\infty)'$ che non coincide con L^1). Tale risultato va sotto il nome di teorema di rappresentazione di Riesz per il duale di L^p e la sua dimostrazione richiede strumenti di teoria della misura, o di analisi funzionale astratta, che esulano dagli scopi di questo corso. Noi ci limitiamo a dimostrare invece il seguente risultato di dualità per le norme L^p.

Proposizione 2.1. *Siano $p, q \in [1, +\infty]$ esponenti coniugati, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora per ogni $f \in L^p$ abbiamo che*

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{g \in L^q \\ g \neq 0}} \frac{\left|\int f g \, \mathrm{d}\mu\right|}{\|g\|_q}.$$

La dimostrazione si basa sulla disuguaglianza di Hölder e si muove lungo una linea analoga a quella seguita per il calcolo della norma di φ_g.

Dimostrazione. Per (1) abbiamo che

$$\sup_{\substack{g\in L^q\\ g\neq 0}} \frac{\left|\int fg\,\mathrm{d}\mu\right|}{\|g\|_q} \leqslant \|f\|_p\,.$$

Scegliendo $g_\star = |f|^{p-2}\,\overline{f}$ abbiamo $\|g_\star\|_q = \|f\|_p^{p-1}$ e $\int fg_\star\,\mathrm{d}\mu = \|f\|_p^p$, e dunque

$$\sup_{\substack{g\in L^q\\ g\neq 0}} \frac{\left|\int fg\,\mathrm{d}\mu\right|}{\|g\|_q} \geqslant \frac{\left|\int fg_\star\,\mathrm{d}\mu\right|}{\|g_\star\|_q} = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \|f\|_p\,.$$

□

3. Disuguaglianza integrale di Minkowski

Per una funzione integrabile, il modulo di un integrale è minore o uguale dell'integrale del modulo,

$$\left|\int_\Gamma f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_\Gamma |f(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Per somme di funzioni di classe L^p, per la disuguaglianza triangolare abbiamo che la norma di una somma è minore della somma delle norme,

$$\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_p \leqslant \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p\,.$$

Una formula analoga vale anche quando al posto della sommatoria sostituiamo un integrale.

Teorema 3.1 (Disuguaglianza integrale di Minkowski)**.** *Sia $f\colon \Omega\times\Gamma\to\mathbb{C}$ una funzione misurabile. Sia $p\in[1,+\infty]$. Supponiamo che la funzione $y\mapsto \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}x)}$ sia integrabile su Γ. Allora per quasi ogni $x\in\Omega$ la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è integrabile su Γ, ed inoltre abbiamo che*

$$\left\|\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y\right\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}x)} \leqslant \int_\Gamma \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Dimostrazione del teorema 3.1. Sia $G\colon\Omega\to[0,\infty]$ la funzione

$$G(x) := \int_\Gamma |f(x,y)|\,\mathrm{d}y,$$

definita per ogni $x\in\Omega$ a valori in $[0,+\infty]$. Vogliamo stimare la norma L^p di G utilizzando il metodo di dualità. Sia p' l'esponente coniugato di p e sia $H\in L^{p'}(\Omega)$; Applicando Tonelli abbiamo

$$\left|\int_\Omega G(x)H(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_\Omega\int_\Gamma |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,|H(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma\Big(\int_\Omega |f(x,y)|\,|H(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Possiamo poi applicare la disuguaglianza di Hölder nell'integrale interno

$$\int_\Omega |f(x,y)|\,|H(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega)}\,\|H\|_{L^{p'}(\Omega)}\,,$$

ottenendo così

$$\left|\int_\Omega G(x)H(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_\Gamma \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}y\cdot\|H\|_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

Per dualità (proposizione 2.1) ciò implica che

$$\|G\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \int_\Gamma \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}y.$$

In particolare abbiamo che G è una funzione con valori finiti quasi ovunque, dunque la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è integrabile quasi ovunque, e la disuguaglianza di Minkowski (6) si ottiene per monotonia dell'integrale, osservando che $\left|\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant G(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega$. □

4. Prodotto di convoluzione

Definizione 4.1. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ due funzioni misurabili. Dato $x \in \mathbb{R}^d$, se la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^d$ definiamo il prodotto di convoluzione di f e g nel punto x come il valore dell'integrale

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Osservazione 4.2. Osserviamo che, quando è definito, il prodotto di convoluzione è commutativo, $f * g = g * f$, infatti con il cambio di variabile $y \mapsto z = x - y$ abbiamo $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$ e

$$\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z = \int g(x-z)f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Osservazione 4.3. Indichiamo con $\tau_h(x) = x + h$ la traslazione di passo h, e con $\overleftarrow{f}(x) := f(-x)$ la funzione "rovesciata" ottenuta cambiando segno alla variabile indipendente. Abbiamo che

$$f(x-y) = (\overleftarrow{f} \circ \tau_{-x})(y) = \overleftarrow{(f \circ \tau_x)}(y),$$

e dunque possiamo anche scrivere

$$(f * g)(x) = \int (\overleftarrow{f} \circ \tau_{-x})(y) \cdot g(y)\,\mathrm{d}y. \tag{7}$$

Osservazione 4.4. Traslando una delle due funzioni si trasla il prodotto di convoluzione, $(f \circ \tau_h) * g = (f * g) \circ \tau_h$, infatti

$$\begin{aligned}\big((f \circ \tau_h) * g\big)(x) &= \int f((x-y)+h)g(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int f((x+h)-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (f*g)(x+h) = \big((f*g)\circ\tau_h\big)(x).\end{aligned}$$

Osservazione 4.5. Dalle proprietà di linearità dell'integrale segue che il prodotto di convoluzione è lineare rispetto a ciascuno dei suo argomenti,

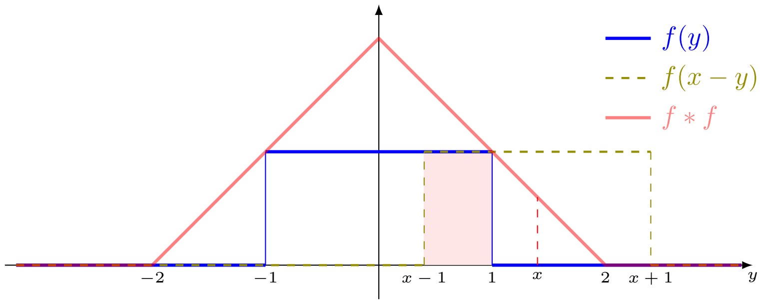
$$\begin{aligned} &(f_1 + f_2) * g = (f_1 * g) + (f_2 * g), &\qquad &(\lambda f) * g = \lambda(f * g),\\ &f * (g_1 + g_2) = (f * g_1) + (f * g_2), &\qquad &f * (\lambda g) = \lambda(f * g),\end{aligned}$$

per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni scelta di funzioni per cui le convoluzioni sono definite.

4.1. **Esempi di convoluzioni.**

Esempio 4.6. Se consideriamo $f(x) := \chi_{[-1,1]}(x)$, la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$ in $\mathbb{R}$, allora la convoluzione $f * f$ è sempre ben definita e abbiamo

$$\begin{aligned}\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x-y)\chi_{[-1,1]}(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \mu\big([x-1, x+1] \cap [-1,1]\big) = (2 - |x|)_+.\end{aligned}$$



Esempio 4.7. Consideriamo la funzione gaussiana $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$. Calcoliamo $f*f$,

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+2xy-2y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Osserviamo che $-2y^2 + 2xy = -2\Big(y - \frac{x}{2}\Big)^2 + \frac{x^2}{2}$, e dunque con il cambio di variabile $t = \sqrt{2}\,(y - \frac{x}{2})$ otteniamo

$$(f*f)(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(y-\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

che è ancora una funzione di tipo gaussiano.

Esempio 4.8. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leqslant 0, \end{cases} \qquad g(x) := f(-x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo la convoluzione $f*f$. Quando $x \leqslant 0$ abbiamo $(f*f)(x) = 0$, infatti per ogni $y \in \mathbb{R}$ le quantità $x - y$ e y non sono mai entrambe positive e dunque la quantità $f(x-y)f(y)$ è sempre nulla. Quando $x > 0$ utilizzando il cambio di variabile $t \mapsto y = \frac{1}{2}x(1+t)$ dentro l'integrale,

$$(f*f)(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

Dunque la convoluzione $f*f$ coincide quasi ovunque con la funzione πH, dove $H = \chi_{[0,+\infty[}$ è la funzione *gradino* di Heaviside.

Per la convoluzione $g*f$ abbiamo invece che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'integrale diverge,

$$(g*f)(x) = \int_{\max\{0,x\}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = +\infty,$$

in quanto la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $1/y$ per $y \to +\infty$ e dunque non integrabile.

Esempio 4.9. Sia $r > 0$. Indichiamo con M_r l'operatore lineare che ad ogni funzione f, definita su $\mathbb{R}^d$ e localmente integrabile (ovvero integrabile su ogni compatto), associa la funzione $M_r(f)$ il cui valore nel punto x coincide con il valore medio di f nella palla di centro x e raggio r,

$$M_r(f)(x) := \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

La funzione caratteristica della palla $B(x,r)$ non è altro che una traslazione della funzione caratteristica della palla con centro nell'origine $B(0,r)$,

$$\chi_{B(x,r)}(y) = \chi_{B(0,r)}(y-x) = \chi_{B(0,r)}(x-y),$$

e la traslazione non cambia il volume delle palle. Abbiamo allora che

$$M_r(f)(x) := \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{B(x,r)}(y)f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mu(B(0,r))}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{B(0,r)}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

ovvero l'operatore di calcolo delle medie mobili M_r si può scrivere in forma di convoluzione,

$$M_r(f) = K_r * f, \qquad K_r(x) = \frac{1}{\mu(B(0,r))}\chi_{B(0,r)}(x).$$

5. Stime L^p per convoluzioni

Quando f e g sono funzioni continue e una delle due ha supporto compatto, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è una funzione continua a supporto compatto, quindi integrabile su $\mathbb{R}^d$, e dunque $f * g$ è ben definita in ogni punto. Quando f e g non sono continue, o nessuna delle due ha supporto compatto, non è più garantito che l'integrale che definisce la convoluzione $f * g$ sia convergente (vedi l'esempio 4.8). Vediamo alcune condizioni sufficienti che ci garantiscono che la convoluzione sia ben definita come funzione almeno quasi ovunque.

Lo spazio L^1 è chiuso rispetto all'operazione di convoluzione.

Proposizione 5.1. *Quando $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ allora la convoluzione $f * g$ è definita quasi ovunque, inoltre $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Dimostrazione. Usando il teorema di Tonelli e il cambio di variabile $x \mapsto z = x - y$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\int\Big(\int |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x &= \int\Big(\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int\Big(\int |f(z)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y = \int |f(z)|\,\mathrm{d}z\int |g(y)|\,\mathrm{d}y = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Dunque l'integrale $\int |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y$ ha un valore finito per quasi ogni x, e quindi l'integrale $\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ è definito per quasi ogni x. Inoltre

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int\Big|\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big|\,\mathrm{d}x \leqslant \\ &\leqslant \int\Big(\int |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \|f\|_1\|g\|_1 .\end{aligned}$$

□

Convoluzioni di funzioni in spazi L^p coniugati producono funzioni continue e limitate.

Proposizione 5.2. *Siano p e q due esponenti coniugati, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ abbiamo che $f * g$ è una funzione limitata e continua su tutto $\mathbb{R}^d$ e vale la stima*

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q . \tag{8}$$

Inoltre quando $p, q > 1$ si ha che $\lim_{|x|\to\infty}(f * g)(x) = 0$.

Dimostrazione. La stima (8), e dunque la limitatezza della convoluzione, è una conseguenza immediata della disuguaglianza di Hölder,

$$\big|(f * g)(x)\big| \leqslant \int \Big|(\overleftarrow{f} \circ \tau_{-x})(y)\Big|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \Big\|\overleftarrow{f} \circ \tau_{-x}\Big\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q .$$

Per verificare la continuità consideriamo la differenza tra i valori della convoluzione in due punti vicini, per linearità abbiamo

$$(f*g)(x+h)-(f*g)(x)=\big((f\circ\tau_h)*g\big)(x)-(f*g)(x)=\big((f\circ\tau_h-f)*g\big)(x),$$

Applicando la stima precedente troviamo che

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)|\leqslant\|f\circ\tau_h-f\|_p\,\|g\|_q\,.$$

La continuità di $f*g$ nel punto x segue dal fatto che, come abbiamo visto nella lezione precedente, le norme L^p con $1\leqslant p<\infty$ sono continue rispetto alle traslazioni, ovvero $\lim_{h\to 0}\|f\circ\tau_h-f\|_p=0$; nel caso in cui $p=\infty$, e dunque $q=1$, utilizziamo il fatto che il prodotto di convoluzione è commutativo e scambiamo il ruolo di f e g applicando la continuità della norma L^1 rispetto alle traslazioni di g, ovvero $\lim_{h\to 0}\|g\circ\tau_h-g\|_1=0$.

Il fatto che $(f*g)(x)$ sia infinitesimo per $|x|\to\infty$ nei casi in cui $p,q>1$ può essere dimostrato facendo vedere prima che quando f e g sono funzioni continue a supporto compatto la convoluzione $f*g$ ha supporto compatto, e poi per il caso generale procedendo per approssimazioni utilizzando la densità delle funzioni continue a supporto compatto in L^p (cosa che abbiamo dimostrato nelle lezioni precedenti). Lasciamo i dettagli come esercizio. □

Proposizione 5.3. *Quando $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p\in[1,+\infty]$, la convoluzione $f*g$ è definita quasi ovunque, inoltre $f*g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima*

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\,\|g\|_p\,.$$

Dimostrazione. Il caso $p=1$ corrisponde alla proposizione 5.1; il caso $p=\infty$ è incluso nella proposizione 5.2, in quanto ∞ è l'esponente coniugato di 1. Quando $1<p<\infty$ abbiamo che $L^p\subset L^1+L^\infty$, nel senso che ogni funzione $g\in L^p$ può essere decomposta come somma di una funzione L^1 e di una funzione L^∞, ad esempio $g=g_1+g_\infty$ dove $g_1\in L^1$ e $g_\infty\in L^\infty$ sono definite da

$$g_1(x):=\begin{cases}g(x), & \text{se } |g(x)|>1,\\ 0, & \text{se } |g(x)|\leqslant 1,\end{cases}\qquad g_\infty(x):=\begin{cases}0, & \text{se } |g(x)|>1,\\ g(x), & \text{se } |g(x)|\leqslant 1.\end{cases}\tag{9}$$

Per linearità, abbiamo che $f*g=f*g_1+f*g_\infty$ è definita quasi ovunque in quanto la convoluzione $f*g_1$ è definita quasi ovunque per la proposizione 5.1 e la convoluzione $f*g_\infty$ è definita e continua ovunque per la proposizione 5.2. Per quanto riguarda la stima della norma, utilizziamo la disuguaglianza di Minkowski (6), e il fatto che le norme L^p su $\mathbb{R}^d$ sono invarianti per traslazioni,

$$\begin{aligned}\|f*g\|_p&=\Big\|\int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^p_x}\leqslant\int\big\|f(y)(g\circ\tau_{-y})(x)\big\|_{L^p_x}\,\mathrm{d}y=\\&=\int|f(y)|\,\|g\circ\tau_{-y}\|_p\,\mathrm{d}y=\int|f(y)|\,\mathrm{d}y\,\|g\|_p=\|f\|_1\,\|g\|_p\,.\end{aligned}$$

□

Tutti i casi visti finora sono compresi e generalizzati nelle stime di Young per convoluzioni descritte dal seguente teorema.

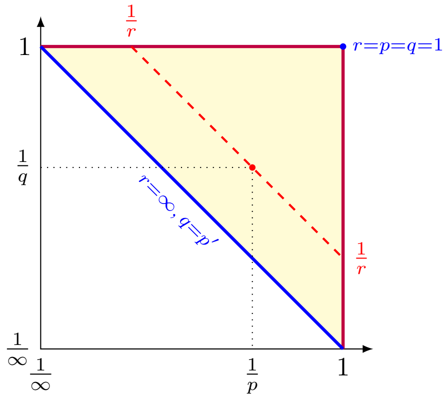
Teorema 5.4 (Young). *Siano $p,q,r\in[1,+\infty]$ tali che*

$$1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.\tag{10}$$

Quando $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$ la convoluzione $f*g$ è definita quasi ovunque, inoltre $f*g\in L^r(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\,\|g\|_q\,.\tag{11}$$

Osservazione 5.5. Rappresentiamo nel piano cartesiano i punti $(1/p, 1/q)$, al variare di $p, q \in [1, \infty]$ tali punti descrivono il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ nel primo quadrante.



La proposizione 5.1 corrisponde al caso $p = q = r = 1$ rappresentato dal punto $(1, 1)$. La proposizione 5.2 corrisponde al caso $r = \infty$ con p e q coniugati rappresentato dal segmento che congiunge i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$. La proposizione 5.3 corrisponde al caso $p = 1$ e $r = q$, rappresentato dal segmento verticale che congiunge i punti $(1, 0)$ e $(1, 1)$, e per la proprietà commutativa anche al caso $q = 1$ e $r = p$, rappresentato dal segmento orizzontale che congiunge i punti $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Il teorema 5.4 ci dice che la convoluzione $f * g$ è ben definita (quasi ovunque) anche in tutti i casi corrispondenti ai punti interni del triangolo con vertici $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

Osservazione 5.6. Prima di dare la dimostrazione del teorema 5.4 mostriamo come la condizione (10) sia una condizione necessaria per avere la validità della stima (11). Lo facciamo tramite un'*analisi dimensionale* della stima (11) sfruttando le proprietà di omogeneità delle quantità coinvolte. Consideriamo due funzioni f e g continue e a supporto compatto tali che la convoluzione $f * g$ non sia identicamente nulla (come ad esempio nel caso in cui f e g siano non negative e non identicamente nulle). Per ogni $\lambda > 0$ indichiamo con $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$ la funzione riscalata. Per la convoluzione delle riscalate abbiamo che

$$f_\lambda * g_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x - \lambda y) g(\lambda y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x - z) g(z) \lambda^{-d}\, \mathrm{d}z = \lambda^{-d} (f * g)_\lambda(x),$$

mentre per le norme L^p delle riscalate abbiamo

$$\|f_\lambda\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda x)|^p\, \mathrm{d}x \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \lambda^{-d}\, \mathrm{d}y \right)^{1/p} = \lambda^{-d/p} \|f\|_p .$$

e quindi analogamente $\|g_\lambda\|_q = \lambda^{-d/q} \|g\|_q$ e anche

$$\|f_\lambda * g_\lambda\|_r = \lambda^{-d} \|(f * g)_\lambda\|_r = \lambda^{-d-d/r} \|f * g\|_r .$$

Applicando la stima (11) alle riscalate otteniamo

$$\lambda^{-d-d/r} \|f * g\|_r \leqslant \lambda^{-d/p} \|f\|_p \lambda^{-d/q} \|g\|_q ,$$

e dunque per ogni $\lambda > 0$ deve valere che

$$\lambda^{d\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{r}\right)} \leqslant \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|f * g\|_r},$$

ma una potenza del tipo λ^γ è limitata al variare di $\lambda \in]0, +\infty[$ se e solo se l'esponente γ è nullo, dunque dovrà necessariamente essere

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{r} = 0.$$

Dimostrazione del teorema 5.4. Indichiamo con p' l'esponente coniugato di p. I casi estremi corrispondenti a $p = 1$, o $q = 1$, o $q = p'$, sono stati trattati nelle proposizioni precedenti. Nel caso in cui $1 < q < p' < \infty$, abbiamo che $L^q \subset L^1 + L^{p'}$, nel senso che la funzione $g \in L^q$ può essere decomposta come somma di una funzione L^1 e di una funzione $L^{p'}$, ad esempio $g = g_1 + g_\infty$, dove $g_1 \in L^1$ e $g_\infty \in L^{p'}$ possono essere definite come in (9). Il fatto che $f * g = f * g_1 + f * g_\infty$ sia definita quasi ovunque segue dal fatto che la convoluzione $f * g_1$ è definita quasi ovunque per la proposizione 5.1 e la convoluzione $f * g_\infty$ è definita e continua ovunque per la proposizione 5.2.

Procedendo per dualità la stima (11) risulta essere equivalente alla seguente disuguaglianza

$$\left| \int (f * g)(x) h(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, \|h\|_s \,, \quad \forall f \in L^p, g \in L^q, h \in L^s,$$

dove $s = r'$ è l'esponente coniugato di r. Osserviamo inoltre che la condizione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ equivale a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 2$. Siccome $|f * g| \leqslant |f| * |g|$ e $\|f\|_p = \big\| |f| \big\|_p$ non è restrittivo assumere che f, g e h siano funzioni a valori non negativi, possiamo così alleggerire la scrittura evitando di mettere i valori assoluti. Supponiamo quindi che $f, g, h \geqslant 0$; dobbiamo dimostrare che

$$\iint f(x-y) g(y) h(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, \|h\|_s \,,$$

quando

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 2. \tag{12}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} F(x,y) &:= g(y)^{q/p'} h(x)^{s/p'}, \\ G(x,y) &:= f(x-y)^{p/q'} h(x)^{s/q'}, \\ H(x,y) &:= f(x-y)^{p/s'} g(y)^{q/s'}. \end{aligned}$$

Per la condizione (12) abbiamo che

$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{s'} = \frac{q}{p'} + \frac{q}{s'} = \frac{s}{p'} + \frac{s}{q'} = 1,$$

e dunque $F(x,y)G(x,y)H(x,y) = f(x-y)g(y)h(x)$. Siccome $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{s'} = 1$, possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder generalizzata e ottenere

$$\iint F(x,y) G(x,y) H(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leqslant \|F\|_{p'} \, \|G\|_{q'} \, \|H\|_{s'} \,.$$

Per concludere basta osservare che

$$\begin{aligned} \|F\|_{p'} &= \Big(\iint g(y)^q h(x)^s \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{p'}} = \Big(\int g(y)^q \, \mathrm{d}y \cdot \int h(x)^s \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} \, \|h\|_s^{\frac{s}{p'}} \,, \\ \|G\|_{q'} &= \Big(\iint f(x-y)^p h(x)^s \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{q'}} = \Big(\int f(z)^p \, \mathrm{d}z \cdot \int h(x)^s \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q'}} = \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \, \|h\|_s^{\frac{s}{q'}} \,, \\ \|H\|_{s'} &= \Big(\iint f(x-y)^p g(y)^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{s'}} = \Big(\int f(z)^p \, \mathrm{d}z \cdot \int g(y)^q \, \mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{s'}} = \|f\|_p^{\frac{p}{s'}} \, \|g\|_q^{\frac{q}{s'}} \,. \end{aligned}$$

□

6. Esercizi

6.1. Dualità in L^p.

Esercizio 6.1. Determina per quali $p \geqslant 1$ e per quali $\alpha > 0$ si ha che l'operatore
$$Tf := \int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
è ben definito come funzionale lineare e continuo da $L^p(0,1)$ a $\mathbb{C}$ e calcola la sua norma operatoriale.

Esercizio 6.2. Determina per quali $p \in [1,+\infty]$ si ha che il funzionale definito da
$$Tf := \int_0^1 \big(f(x^2) - f(1-x^2)\big)\,\mathrm{d}x$$
risulta essere ben definito, lineare e continuo da $L^p(0,1)$ a $\mathbb{C}$ e determina la sua norma operatoriale.

6.2. Disuguaglianza integrale di Minkowski.

Esercizio 6.3. Nel caso di una funzione a valori reali la disuguaglianza (5) (con $|\cdot|$ che indica il valore assoluto di una quantità reale) è una conseguenza immediata delle proprietà di monotonia dell'integrale, in quanto da $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ segue che $-\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$. Dimostra che (5) vale anche nel caso di una funzione a valori complessi (con $|\cdot|$ che indica il modulo di una quantità complessa).

Esercizio 6.4. Dimostra i casi $p = \infty$ e $p = 1$ della disuguaglianza integrale di Minkowski (teorema 3.1).

6.3. Prodotto di convoluzione.

Esercizio 6.5. Consideriamo convoluzioni di funzioni caratteristiche di intervalli.

(1) Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,+\infty[} * \chi_{[c,+\infty]}$ di due funzioni caratteristiche di due intervalli illimitati a destra.
(2) Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,+\infty]}$ delle funzioni caratteristiche di un intervallo limitato e di un intervallo illimitato a destra.
(3) Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ di due funzioni caratteristiche di due intervalli limitati.

Esercizio 6.6. Per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$ considera la funzione gaussiana
$$\gamma_{\mu,\lambda}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda(x-\mu)^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Verifica che la convoluzione di due gaussiane è un multiplo di una gaussiana,
$$\gamma_{\mu_1,\lambda_1} * \gamma_{\mu_2,\lambda_2} = C\gamma_{\mu_3,\lambda_3},$$
e determina delle formule per calcolare C, μ_3, λ_3 in funzione di $\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2$.

Esercizio 6.7. Calcola la convoluzione $f * g$ per le seguenti coppie di funzioni

(1) $f(x) = (1-|x|)_+$, $g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$;
(2) $f(x) = g(x) = (1-|x|)_+$;
(3) $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$;
(4) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$, $g(x) = \mathrm{e}^{x}\chi_{]-\infty,0]}(x)$;
(5) $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$;
(6) $f(x) = x\chi_{[0,+\infty[}(x)$, $g(x) = \sin(x)\chi_{[0,+\infty[}(x)$.

Esercizio 6.8. Sia $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$ la funzione gradino di Heaviside. Definiamo la successione di funzioni $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo ponendo $E_1 = H$ e $E_{n+1} = H * E_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Calcola esplicitamente $E_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Calcola il limite $\lim_{n\to\infty} E_n(x)$.
- Determina la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} E_n(x)$

Esercizio 6.9. Dimostra che dalla convoluzione tra un polinomio e una funzione continua a supporto compatto si ottiene ancora un polinomio.

6.4. **Stime L^p per convoluzioni.**

Esercizio 6.10. Verifica che il prodotto di convoluzione definisce su $L^1(\mathbb{R}^d)$ un'operazione $*\colon L^1 \times L^1 \to L^1$ che è associativa e commutativa, ma che non possiede elemento neutro. *[Per far vedere che non esiste elemento neutro, supponi per assurdo che esista e valuta cosa succederebbe alle sue convoluzioni con le funzioni caratteristiche delle palle $B(0,n)$ e delle regioni $B(0,n) \setminus B(0,1/n)$ al tendere di $n \to \infty$.]*

Esercizio 6.11. Dimostra che quando $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, dove p e q sono esponenti coniugati con $p,q > 1$, allora la convoluzione $f*g$ è infinitesima all'infinito, ovvero $\lim_{|x|\to\infty}(f*g)(x) = 0$.

Esercizio 6.12. Per ogni coppia di esponenti $p,q \in [1,+\infty]$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ fornisci un esempio di funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$ tali che la convoluzione non sia definita in alcun punto. *[Puoi ispirarti alle funzioni utilizzate nell'esempio 4.8.]*

Esercizio 6.13. Siano $p \in [1,\infty[$, $\alpha, \beta > 0$. Considera l'operatore lineare

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{|x-y|^{\alpha}\,|1-x+y|^{\beta}}\,\mathrm{d}y$$

Determina dei valori di α e β per i quali si abbia che:

- $T\colon L^p \to L^p$ è continuo;
- $T\colon L^p \to L^\infty$ è continuo;
- $T\colon L^p \to L^{2p}$ è continuo.

Esercizio 6.14. Sia $p \in [1,\infty[$, $\alpha > 0$. Considera l'operatore lineare

$$Tf(x) := \int_0^{\infty} \frac{\sin(y)\log(y)}{y^{\alpha}} f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

Determina dei valori di α per i quali si abbia che:

- $T\colon L^p \to L^{p+1}$ è continuo;
- $T\colon L^3 \to L^2$ è continuo.