ANALISI 3 - LF1: TRASFORMATA DI FOURIER IN L^1.

1. Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

Per ogni funzione $g \in L^2(-\pi, \pi)$ abbiamo la decomposizione in serie di Fourier

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

dove la convergenza della serie è da intendere in norma L^2, e dove i coefficienti di Fourier $\widehat{g}_k$ sono dati dagli integrali

$$\widehat{g}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t.$$

Vale inoltre l'identità di Plancherel

$$\|g\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_k|^2 .$$

Tramite un riscalamento della variabile indipendente si ottengono formule simili per funzioni definite su intervalli di qualsiasi lunghezza. Per ogni $f \in L^2(-T/2, T/2)$ abbiamo la decomposizione

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{k,T} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{2\pi}{T} kx},$$

con coefficienti dati da

$$\widehat{f}_{k,T} := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \frac{2\pi}{T} kx} \, \mathrm{d}x,$$

per i quali vale

$$\|f\|_{L^2(-T/2,T/2)}^2 = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \big|\widehat{f}_{k,T}\big|^2.$$

Sia $\delta_T := 2\pi/T$. Possiamo riscrivere la serie usando come indice $\xi = \delta_T k \in \delta_T \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta_T \mathbb{Z}} \widehat{f}_T(\xi) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \, \delta_T, \tag{1}$$

con coefficienti dati da

$$\widehat{f}_T(\xi) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}x = T \, \widehat{f}_{k,T},$$

per i quali abbiamo

$$\|f\|_{L^2(-T/2,T/2)}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta_T \mathbb{Z}} \big|\widehat{f}_T(\xi)\big|^2 \delta_T. \tag{2}$$

Se supponiamo che f sia una funzione integrabile e a supporto compatto, per T sufficientemente grande il valore di $\widehat{f}_T(\xi)$ risulta indipendente da T. Poniamo

$$\widehat{f}(\xi) := \lim_{T \to +\infty} \widehat{f}_{k,T} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Date: ultimo aggiornamento, 30 dicembre 2022.

Le serie (1) e (2) possono essere considerate allora come somme di Riemann su una suddivisione di $\mathbb{R}$ in intervalli di ampiezza δ_T che, nel limite per $T \to +\infty$, approssimano gli integrali di $\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$ e di $\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2$. Formalmente otteniamo

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi\in\delta_T\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\delta_T = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi\in\delta\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\delta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi,$$

e

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi\in\delta_T\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\delta_T = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi\in\delta\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\delta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi.$$

L'integrale che compare nella formula (3) risulta ben definito per qualsiasi funzione integrabile su $\mathbb{R}$ anche se non ha supporto compatto.

Definizione 1.1. Data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ la *trasformata di Fourier* di f è la funzione $\widehat{f}$ definita da

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}.$$

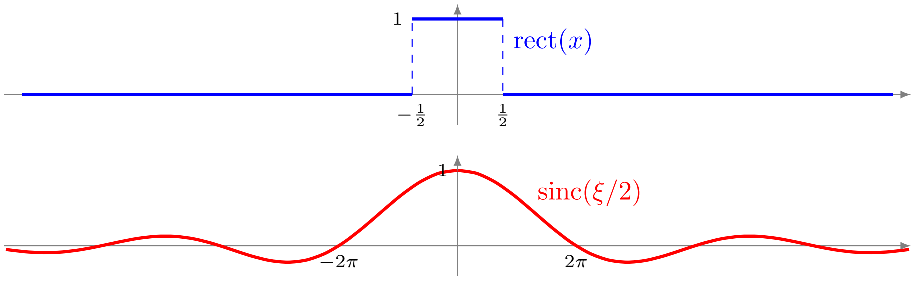
Esempio 1.2. Calcoliamo la trasformata di Fourier del *segnale rettangolare*

$$\mathrm{rect}(x) := \chi_{[-1/2,1/2]}(x).$$

Otteniamo la funzione

$$\widehat{\mathrm{rect}}(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi/2}}{-\mathrm{i}\xi} = \frac{2\sin(\xi/2)}{\xi} = \mathrm{sinc}\Big(\frac{\xi}{2}\Big).$$

(La funzione *seno cardinale* è definita come $\mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$.)

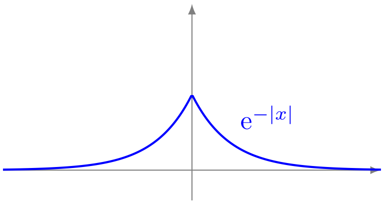


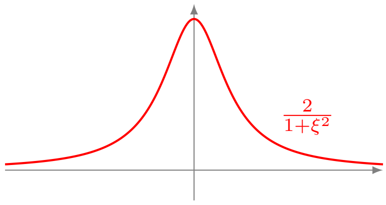
Esempio 1.3. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) := \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Spezzando in due l'integrale troviamo

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x|-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-x+\mathrm{i}\xi x} + \mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}\xi x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty}\int_0^L \left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\xi)x} + \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}\xi)x}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{L\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\xi)x}}{-1+\mathrm{i}\xi} + \frac{\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}\xi)x}}{-1-\mathrm{i}\xi}\right]_{x=0}^{x=L} = \lim_{L\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-L}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi L}-1}{-1+\mathrm{i}\xi} + \frac{\mathrm{e}^{-L}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi L}-1}{-1-\mathrm{i}\xi} = \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{i}\xi} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.
\end{aligned}$$





2. Lemma di Riemann-Lebesgue

Osservazione 2.1. Dalla definizione 1.1 si ricava subito che

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Per la linearità dell'integrale segue che la trasformata di Fourier definisce un'applicazione lineare e continua da L^1 a L^∞:

$$\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}(f) := \widehat{f}.$$

Abbiamo $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$ per ogni $f \in L^1$, e dunque $\|\mathcal{F}\|_{L^1\to L^\infty} \leqslant 1$. Abbiamo anche che $\|\mathrm{rect}\|_{L^1} = 1$ e $\left\|\widehat{\mathrm{rect}}\right\|_{L^\infty} = \|\mathrm{sinc}\|_{L^\infty} = 1$ e dunque

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1\to L^\infty} \geqslant \frac{\|\mathcal{F}(\mathrm{rect})\|_{L^\infty}}{\|\mathrm{rect}\|_{L^1}} = 1.$$

Otteniamo così che la norma operatoriale della trasformata di Fourier come operatore da L^1 a L^∞ è esattamente 1,

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1\to L^\infty} = 1.$$

La trasformata di Fourier di una funzione L^1 non solo è una funzione limitata, ma risulta anche essere sempre una funzione continua che decade a zero all'infinito.

Lemma 2.2. *Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo*

$$\left|e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right| \leqslant \min\{|\alpha-\beta|, 2\}.$$

Dimostrazione. Segue facilmente dalla seguente identità

$$\left|e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right|^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 4\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2,$$

e dal fatto che $|\sin\theta| \leqslant \min\{|\theta|, 1\}$. □

Proposizione 2.3. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$ è una funzione uniformemente continua.*

Dimostrazione. Per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}\right) \mathrm{d}x.$$

Applicando il lemma 2.2 otteniamo

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \min\{|\eta|\,|x|, 2\} \, \mathrm{d}x.$$

L'integrando nell'ultimo integrale converge puntualmente a zero per $\eta \to 0$ ed è dominato dalla funzione integrabile $2|f(x)|$; per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue otteniamo che l'integrale converge a zero. Il limite

$$\lim_{\eta\to 0} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)\right| = 0$$

equivale alla continuità uniforme di $\widehat{f}$. □

Proposizione 2.4 (Lemma di Riemann-Lebesgue)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}(\xi)$ è infinitesima per $\xi \to \pm\infty$.*

Dimostrazione. Verifichiamo prima il lemma per una funzione g di classe C^1 a supporto compatto. Siccome

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} = -\frac{1}{\mathrm{i}\xi}\partial_x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x},$$

possiamo integrare per parti e ricavare che

$$\widehat{g}(\xi) = -\frac{1}{\mathrm{i}\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\partial_x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Dunque $\widehat{g}$ è infinitesima all'infinito, in quanto

$$\big|\widehat{g}(\xi)\big| \leqslant \frac{1}{|\xi|}\,\|g'\|_{L^1}\,. \tag{5}$$

Sappiamo che le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in L^1, e dunque, data $f \in L^1(\mathbb{R})$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione g di classe C^1 a supporto compatto tale che $\|f-g\|_{L^1} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per linearità e per la stima (4) abbiamo

$$\big|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)\big| \leqslant \|f-g\|_{L^1}\,.$$

Possiamo inoltre applicare la stima (5) a g, così quando $|\xi| \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\|g'\|_{L^1}$ otteniamo

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \big|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)\big| + \big|\widehat{g}(\xi)\big| \leqslant \|f-g\|_{L^1} + \frac{1}{|\xi|}\,\|g'\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Questo implica che $\widehat{f}(\xi)$ è infinitesima per $|\xi| \to \infty$. □

3. Proprietà della trasformata

Per ogni $p \in \mathbb{R}$ definiamo la *traslazione* di passo p su $\mathbb{R}$,

$$\tau_p(x) := x + p,$$

e l'*armonica elementare* di frequenza p,

$$m_p(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}.$$

Per ogni $\lambda > 0$ definiamo

$$\sigma_\lambda(x) := \lambda x$$

l'*omotetia* di fattore λ.

La composizione $(f \circ \tau_p)(x) = f(x+p)$ produce una *traslata* della funzione f; la moltiplicazione $(m_p \cdot f)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} f(x)$ produce un'armonica *modulata* dalla funzione f; la composizione $(f \circ \sigma_\lambda)(x) = f(\lambda x)$ produce una *riscalata* della funzione f; indichiamo inoltre con $\overleftarrow{f}(x) := f(-x)$ la *rovesciata* della funzione f.

Proposizione 3.1. *Per la trasformata di Fourier valgono le seguenti proprietà elementari:*

- *la traslata di una funzione si trasforma in un'armonica modulata dalla trasformata,*
$$g(x) = f(x+p) \implies \widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\xi}\widehat{f}(\xi),$$
ovvero $\mathcal{F}[f \circ \tau_p] = m_p \cdot \mathcal{F}[f]$;
- *un armonica modulata si trasforma nella traslata della trasformata,*
$$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} f(x) \implies \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - p),$$
ovvero $\mathcal{F}[m_p \cdot f] = \mathcal{F}[f] \circ \tau_{-p}$;

- *la riscalata si trasforma in un multiplo della riscalata, con un fattore di scala reciproco, della trasformata,*
$$g(x) = f(\lambda x) \implies \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big),$$
ovvero $\mathcal{F}[f \circ \tau_\lambda] = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}[f] \circ \sigma_{\frac{1}{\lambda}}$*;*
- *la rovesciata di una funzione si trasforma nella rovesciata della trasformata,*
$$g(x) = f(-x) \implies \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi),$$
ovvero $\mathcal{F}[\overleftarrow{f}\,] = \overleftarrow{\mathcal{F}[f]}$*;*
- *il coniugato di una funzione si trasforma nel coniugato della rovesciata della trasformata,*
$$g(x) = \overline{f(x)} \implies \widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$
ovvero $\mathcal{F}[\overline{f}] = \overleftarrow{\overline{\mathcal{F}[f]}}$.

La dimostrazione delle proprietà enunciate nella proposizione 3.1 si ottiene facilmente tramite semplici, e piuttosto ovvi, cambi di variabile negli integrali che definiscono le trasformate delle varie funzioni considerate; lasciamo i dettagli come esercizio.

Esempio 3.2. Calcoliamo la trasformata della funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}$ di un generico intervallo limitato $[a,b]$. Invece di utilizzare la definizione consideriamo l'intervallo $[a,b]$ ottenuto dall'intervallo $[-1/2,1/2]$ tramite una omotetia e una traslazione:
$$\chi_{[a,b]}(x) = \mathrm{rect}\,(\lambda(x-c)) = \big(\mathrm{rect} \circ \sigma_\lambda \circ \tau_{-c}\big)(x).$$
Vogliamo che $\lambda(a-c) = -\frac{1}{2}$ e $\lambda(b-c) = \frac{1}{2}$, risolvendo il sistema otteniamo che il passo della traslazione è il punto medio $c = \frac{a+b}{2}$ mentre il fattore di riscalamento è il reciproco della lunghezza dell'intervallo $\lambda = \frac{1}{b-a}$. Applichiamo le proprietà della trasformata:
$$\mathcal{F}\chi_{[a,b]}(\xi) = \mathcal{F}\big(\mathrm{rect} \circ \sigma_\lambda \circ \tau_{-c}\big)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}c\xi}\mathcal{F}\big(\mathrm{rect} \circ \sigma_\lambda\big)(\xi) =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c\xi}}{\lambda}\mathcal{F}\big(\mathrm{rect}\big)\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c\xi}}{\lambda}\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\xi}{2\lambda}\Big) = \frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{a+b}{2}\xi}\sin\Big(\frac{b-a}{2}\xi\Big)}{\xi}.$$

Esempio 3.3. Calcoliamo la trasformata della funzione
$$f(x) := \cos(2x)\mathrm{e}^{-3|x|}$$
a partire dalla trasformata della funzione
$$f_0(x) := \mathrm{e}^{-|x|}$$
che sappiamo essere
$$\widehat{f_0}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$
Cominciamo con il calcolare la trasformata della funzione
$$f_1(x) := \mathrm{e}^{-3|x|} = f_0(3x),$$
essendo una riscalata otteniamo
$$\widehat{f_1}(\xi) = \frac{1}{3}\widehat{f_0}\Big(\frac{\xi}{3}\Big) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1+\big(\frac{\xi}{3}\big)^2} = \frac{6}{9+\xi^2}.$$
Per le identità di Eulero possiamo scrivere $\cos(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}$ e quindi possiamo decomporre $f = \frac{1}{2}f_+ + \frac{1}{2}f_-$, dove
$$f_\pm(x) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2x}f_1(x),$$

le cui trasformate sono delle traslate di $\widehat{f}_1$,

$$\widehat{f_\pm}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi \mp 2) = \frac{6}{9 + (\xi \mp 2)^2}.$$

Per linearità della trasformata otteniamo

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{f_+}(\xi) + \frac{1}{2}\widehat{f_-}(\xi) = \frac{3}{9 + (\xi - 2)^2} + \frac{3}{9 + (\xi + 2)^2} = \frac{6\xi^2 + 78}{\xi^4 + 10\xi^2 + 169}.$$

Esaminiamo ora il legame tra l'operazione di trasformata e quella di derivazione.

Lemma 3.4. *Sia f una funzione di classe C^1 con $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Dimostrazione. Siccome $f' \in L^1$ abbiamo che gli integrali $\int_0^{+\infty} f'$ e $\int_{-\infty}^0 f'$ convergono a valori finiti. Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y = f(0) - \int_x^0 f'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Passando al limite otteniamo che esistono finiti i limiti

$$f(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(y)\,\mathrm{d}y,$$
$$f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dunque la funzione $f(x)$ possiede asintoti orizzontali di equazione $y = f(\pm\infty)$ per $x \to \pm\infty$. Affinché f possa essere una funzione di L^1 è necessario che sia integrabile in un intorno di $\pm\infty$ e dunque l'ordinata degli asintoti orizzontali deve necessariamente essere zero. $\square$

L'operatore di derivazione si trasforma in un operatore di moltiplicazione per $\mathrm{i}\xi$.

Proposizione 3.5. *Sia f una funzione di classe C^1 con $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi).$$

Dimostrazione. Siccome $\partial_x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} = -\mathrm{i}\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}$, integrando per parti abbiamo

$$\int_A^B f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right]_{x=A}^{x=B} + \mathrm{i}\xi \int_A^B f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

La quantità $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}$ è sempre limitata (ha modulo 1), quindi per il lemma 3.4 i termini di bordo sono infinitesimi all'infinito e dunque spariscono nel limite per $A \to -\infty$ e $B \to +\infty$. Otteniamo allora

$$\widehat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi).$$

$\square$

Osservazione 3.6. Se una funzione è di classe C^k con derivate $f^{(j)} \in L^1$ per ogni $j = 0, 1, \ldots, k$, allora possiamo iterare il procedimento: ad ogni derivata corrisponde un fattore $\mathrm{i}\xi$ nella trasformata,

$$\widehat{f^j}(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^j \widehat{f}(\xi).$$

L'operatore di moltiplicazione per x si trasforma in un operatore di derivazione.

Proposizione 3.7. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che anche $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Allora la trasformata $\widehat{f}$ è una funzione di classe C^1 ed inoltre vale*

$$\partial_\xi \widehat{f} = \mathcal{F}\left[x \mapsto -\mathrm{i}xf(x)\right],$$

ovvero se $g(x) = xf(x)$ allora $\widehat{g}(\xi) = \mathrm{i}\partial_\xi \widehat{f}(\xi)$.

Dimostrazione. Per calcolare la derivata della trasformata possiamo derivare sotto il segno di integrale

$$\partial_\xi \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \left(f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-\mathrm{i}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \,\mathrm{d}x = \mathcal{F}[-\mathrm{i}xf](\xi),$$

in quanto la derivata della funzione integranda è dominata da una funzione, indipendente da ξ, che per ipotesi è integrabile su $\mathbb{R}$,

$$\left|\partial_\xi \left(f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right)\right| = |xf(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

□

Esempio 3.8. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione *gaussiana*

$$g(x) := \mathrm{e}^{-x^2}.$$

La derivata di g è $g'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ e dunque abbiamo

$$g'(x) + 2xg(x) = 0.$$

Applicando la trasformata di Fourier a questa identità e utilizzando le proposizioni 3.5 e 3.7 otteniamo $\mathrm{i}\xi\widehat{g} + 2\mathrm{i}\widehat{g}\,' = 0$, ovvero

$$\widehat{g}\,'(\xi) + \frac{1}{2}\xi\,\widehat{g}(\xi) = 0.$$

Questa equazione differenziale lineare del primo ordine si risolve facilmente: osserviamo che una primitiva di $\frac{1}{2}\xi$ è $\frac{1}{4}\xi^2$, abbiamo

$$\partial_\xi\left(\widehat{g}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\xi^2}\right) = \left(\widehat{g}\,' + \frac{1}{2}\xi\,\widehat{g}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\xi^2} = 0.$$

Dunque $\widehat{g}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\xi^2}$ è una funzione costante e avremo

$$\widehat{g}(\xi)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\xi^2} = \widehat{g}(0)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}0} = \widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Otteniamo così che la trasformata di una gaussiana è ancora una funzione di tipo gaussiano,

$$\widehat{g}(\xi) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\xi^2}.$$

4. Esercizi

4.1. **Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier.**

Esercizio 4.1. Calcola la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \triangle(x) &:= (1-|x|)_+, & A(x) &:= \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[-1,0]}(x),\\ B(x) &:= \mathrm{e}^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), & C(x) &:= x\,\mathrm{rect}(x),\\ D(x) &:= \sin(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x), & E(x) &:= \mathrm{sgn}(x)\mathrm{e}^{-|x|}. \end{aligned}$$

4.2. **Proprietà della trasformata.**

Esercizio 4.2. Dimostra le proprietà enunciate nella proposizione 3.1.

Esercizio 4.3. Calcola la trasformata di Fourier della densità di probabilità $p(x)$ per la distribuzione normale con media μ e varianza σ^2,

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Indichiamo con $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$ la funzione gradino di Heaviside.

Esercizio 4.4. Calcola le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni

$$A(x) = (x-2)H(x)\mathrm{e}^{-3x}, \quad B(x) = xH(x-2)\mathrm{e}^{-3(x-2)}, \quad C(x) = (-2-x)H(-x)\mathrm{e}^{3x},$$

$$D(x) = 2x\mathrm{e}^{-3x^2}, \quad E(x) = \sin(2x)\mathrm{e}^{-3x^2}, \quad F(x) = x\sin(2x)\mathrm{e}^{-3(x-1)^2}.$$

Esercizio 4.5. Calcola l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi x)\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 4.6. Determina la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ sapendo che essa è soluzione dell'equazione differenziale

$$f''(x) - 2f(x) = \mathrm{e}^{-|x-1|}.$$

Esercizio 4.7. Spiega perché non esistono soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$f''(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{-|x-1|}.$$