

**ANALISI 3 - L24:**  
**APPLICAZIONI A PROBLEMI CON EQUAZIONI ALLE**  
**DERIVATE PARZIALI**

1. SERIE DI FOURIER PER FUNZIONI DI PERIODO  $T$  QUALSIASI

Con la serie di Fourier abbiamo visto come decomporre funzioni  $2\pi$ -periodiche come somme numerabili di componenti armoniche. Riscalando i termini di queste componenti armoniche possiamo scrivere una decomposizione anche per funzioni periodiche di qualsiasi periodo. Sia  $f(x)$  una funzione periodica con periodo  $T$ . La funzione riscalata  $g(t) := f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$  risulta essere periodica con periodo  $2\pi$ ,

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) = g(t).$$

Abbiamo che  $g \in L^2([-\pi, \pi])$  se e solo se  $f \in L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$  e dalla serie di Fourier di  $g$  possiamo ricavare una serie di funzioni che decompone  $f$  come somma di armoniche riscalate,

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_k e^{ik \frac{2\pi}{T}x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{k,T} e^{ik \frac{2\pi}{T}x},$$

dove i coefficienti di Fourier sono dati da

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{k,T} = \widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) e^{-iks} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}s\right) e^{-iks} ds = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-ik \frac{2\pi}{T}y} dy. \end{aligned}$$

Dal legame tra le norme  $L^2$  di  $f$  e di  $g$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)}^2 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right|^2 dx = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt = \\ &= \frac{T}{2\pi} \|g\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2, \end{aligned}$$

otteniamo l'identità di Plancherel riscalata per  $f$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_{k,T}|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2 = \frac{1}{T} \|f\|_{L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)}^2.$$

2. EQUAZIONE DEL CALORE

Uno dei motivi principali che spinsero Fourier ad interessarsi delle serie di funzioni che ora prendono il suo nome era legato alla ricerca di metodi per risolvere l'equazione che descrive la propagazione del calore. L'equazione del calore nella sua forma più semplice (assumendo uguali a 1 alcune costanti fisiche) è data dalla seguente equazione alle derivate parziali,

$$\partial_t u = \Delta u,$$

dove  $u(t, x)$  è una funzione a valori reali che descrive la temperatura al tempo  $t \geq 0$  nel punto  $x \in D$  di un corpo che occupa la regione  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ . L'operatore  $\partial_t$  indica la derivata parziale rispetto a  $t$  e l'operatore  $\Delta$  indica il laplaciano rispetto ad  $x$ .

Consideriamo il caso unidimensionale,  $d = 1$ , con  $D = [0, L]$ , che corrisponde alla propagazione del calore lungo una barra sottile di lunghezza  $L$ ,

$$(1) \quad \partial_t u = \partial_{xx}^2 u, \quad t > 0, \quad 0 < x < L.$$

Supponiamo che alle estremità della barra la temperatura sia mantenuta costante a zero,

$$(2) \quad u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Supponiamo inoltre di conoscere la distribuzione di temperatura all'istante iniziale,

$$(3) \quad u(0, x) = f(x).$$

È possibile calcolare l'evoluzione  $u(t, x)$  in funzione di  $f$  del problema (1)(2)(3)?

**2.1. Linearità.** La prima osservazione è che si tratta di un problema lineare omogeneo. Questo implica in particolare che se  $u_1$  è soluzione del problema con dato iniziale  $f_1$  e  $u_2$  è soluzione del problema con dato iniziale  $f_2$  allora la combinazione lineare  $c_1 u_1 + c_2 u_2$  è soluzione con dato iniziale  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  per ogni coppia di costanti  $c_1$  e  $c_2$ . La strategia sarà quella di determinare una quantità sufficiente di soluzioni "elementari" le cui combinazioni lineari dei corrispondenti dati iniziali siano in grado di generare, o approssimare il dato iniziale (3).

**2.2. Separazione delle variabili.** Per semplificare il problema proviamo ad esempio a cercare soluzioni che si fattorizzano nella forma  $u(t, x) = A(t)B(x)$ ; l'equazione diventa

$$A'(t)B(x) = A(t)B''(x).$$

Nei punti in cui le funzioni non si annullano dovremo avere

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{B''(x)}{B(x)}.$$

Osserviamo che a sinistra abbiamo una funzione della sola variabile  $t$  e a destra una funzione della sola variabile  $x$ . Ma  $t$  ed  $x$  sono variabili indipendenti, e questo implica che le quantità a sinistra e a destra devono essere costanti, ovvero dovrà esistere una costante  $\lambda$  tale che

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = \lambda, \quad \frac{B''(x)}{B(x)} = \lambda,$$

per ogni  $t > 0$  e ogni  $x \in ]0, L[$ . Otteniamo così una coppia di equazioni differenziali ordinarie lineari per  $A$  e  $B$ ,

$$A' - \lambda A = 0, \quad B'' - \lambda B = 0,$$

con le condizioni al bordo (2) che impongono

$$B(0) = B(L) = 0.$$

**2.3. Soluzioni dell'equazione per  $B$ .** Quando  $\lambda > 0$  le soluzioni dell'equazione differenziale per  $B$  sono tutte della forma

$$B(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Le condizioni al bordo si traducono in questo caso nel sistema

$$(4) \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ e^{-\sqrt{\lambda}L} c_1 + e^{\sqrt{\lambda}L} c_2 = 0; \end{cases}$$

la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda}L} & e^{\sqrt{\lambda}L} \end{pmatrix}$$

è invertibile, in quanto il suo determinante è  $2\sinh(\sqrt{\lambda}L) > 0$ , e dunque il sistema (4) ha come unica soluzione  $c_1 = c_2 = 0$  che corrisponde ad avere  $B$  identicamente nulla.

Quando  $\lambda = 0$  le soluzioni dell'equazione differenziale per  $B$  sono tutte della forma

$$B(x) = c_1 + c_2x.$$

Le condizioni al bordo si traducono in questo caso nel sistema  $c_1 = 0$ ,  $c_1 + Lc_2 = 0$ , che implicano ancora che  $c_1 = c_2 = 0$  e dunque  $B$  identicamente nulla.

Per avere una soluzione  $B$  non identicamente nulla dovrà allora necessariamente essere  $\lambda < 0$ , e in questo caso le soluzioni dell'equazione differenziale per  $B$  sono tutte della forma

$$B(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Le condizioni al bordo si traducono ora nel sistema

$$c_1 = 0, \quad c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0,$$

da cui ricaviamo che per avere una soluzione non nulla dovrà necessariamente essere  $c_2 \neq 0$  e quindi  $\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$ , che significa  $\sqrt{-\lambda}L = k\pi$ , ovvero

$$(5) \quad \lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2,$$

per qualche  $k \in \mathbb{N}$ . Abbiamo allora che una soluzione non nulla per l'equazione per  $B$  è data da

$$B_k(x) = \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right).$$

**2.4. Soluzioni dell'equazione per  $A$ .** Quando  $\lambda$  è dato da (5) l'equazione per  $A$  diventa

$$A'(t) = -k^2 \frac{\pi^2}{L^2} A(t)$$

di cui una soluzione non nulla è data dall'esponenziale

$$A_k(t) = e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t}.$$

**2.5. Soluzioni per l'equazione del calore.** Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  abbiamo così trovato una soluzione elementare della forma

$$u_k(t, x) = A_k(t)B_k(x) = e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right),$$

che soddisfa le condizioni al bordo (2) e ha dato iniziale

$$f_k(x) := u_k(0, x) = A_k(0)B_k(x) = B_k(x) = \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right).$$

Ogni combinazione lineare di queste soluzioni è ancora una soluzione. Formalmente, senza per il momento preoccuparci troppo delle questioni di convergenza, possiamo costruire soluzioni della forma

$$(6) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right),$$

con dato iniziale dato da

$$(7) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k B_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right).$$

**2.6. Ortogonalità.** La famiglia formata dalle funzioni  $B_k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , forma un sistema ortogonale completo in  $L^2([0, L])$ . Se  $j, k \in \mathbb{N}$  con  $j \neq k$  abbiamo infatti che

$$\langle B_j, B_k \rangle = \int_0^L \sin\left(j\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \sin(jt) \sin(kt) dt = 0;$$

Inoltre, ogni funzione  $f \in L^2([0, L])$ , può essere scritta nella forma (7), con la serie che converge in norma  $L^2$ . Infatti se consideriamo la funzione  $F \in L^2([-L, L])$  definita da  $F(x) = -f(-x)$  per  $x \in [-L, 0[$  e  $F(x) = f(x)$  per  $x \in ]0, L]$ , essendo dispari  $F$  ammette una espansione in serie di Fourier trigonometrica, riscalata all'intervallo  $[-L, L]$ , formata solo dai termini con i seni; tale serie produce la rappresentazione (7) per  $f$  con i coefficienti  $c_k$  dati dagli integrali

$$(8) \quad c_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) dx.$$

Le formule (6) e (8) ci permettono di definire così la soluzione del problema espressa come serie di funzioni per ogni dato iniziale  $f \in L^2$ .

In realtà la formula dei coefficienti (8) è ben definita anche per ogni funzione  $f \in L^1([0, L])$ , e sappiamo che in questo caso i coefficienti  $c_k$  formano una successione limitata. Questo ci permette di concludere che per ogni  $\varepsilon > 0$  la serie di funzioni (6) converge totalmente sulla regione  $t \geq \varepsilon$ ,  $x \in [0, L]$ , infatti abbiamo

$$\left| c_k e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) \right| \leq \| (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \|_{\ell^\infty} e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \leq \frac{2}{L} \| f \|_{L^1} e^{-\frac{\pi^2 \varepsilon}{L^2} k^2},$$

e la serie numerica  $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\frac{\pi^2 \varepsilon}{L^2} k^2}$  è convergente. Derivando la serie (6) termine a termine si ottengono ancora delle serie totalmente convergenti per  $t$  positivi. La convergenza totale implica convergenza uniforme, dunque è consentito di scambiare l'ordine tra l'operazione derivazione e quella di somma della serie. Ne segue che quando  $f \in L^1$  la soluzione  $u$  definita tramite le formule (6) e (8) è una funzione derivabile, sia in  $t$  che in  $x$ , e dunque è effettivamente una soluzione regolare dell'equazione del calore.

### 3. EQUAZIONE DELLE ONDE

Un'altro problema che può essere risolto tramite sviluppi in serie di Fourier è quello della corda vibrante. Le vibrazioni di una corda di lunghezza  $L$  fissata alle sue estremità (si pensi ad una corda di uno strumento musicale) sono descritte (per piccole oscillazioni) dall'equazione delle onde lineare della forma

$$(9) \quad \partial_{tt}^2 u = c^2 \partial_{xx}^2 u, \quad t > 0, \quad 0 < x < L,$$

dove  $c$  è una costante positiva e  $u(t, x)$  indica lo scostamento della corda dalla posizione di riposo al tempo  $t$  nel punto  $x$ , con le condizioni al bordo date da

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Supponiamo di conoscere la posizione e la velocità iniziale della corda,

$$(10) \quad u(0, x) = f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g(x).$$

Vogliamo determinare delle formule che ci permettano di scrivere la soluzione  $u$  in funzione di  $f$  e di  $g$ .

Applicando il metodo della separazione delle variabili, cerchiamo soluzioni non identicamente nulle della forma  $u(t, x) = A(t)B(x)$ . L'equazione diventa

$$A''(t)B(x) = c^2 A(t)B''(x).$$

Come prima, questo significa che, separando le variabili, dovrà esistere una costante  $\lambda$  tale che

$$\frac{A''(t)}{c^2 A(t)} = \frac{B''(x)}{B(x)} = \lambda.$$

Per la funzione  $B$  ritroviamo la stessa equazione  $B'' - \lambda B = 0$ , che abbiamo già risolto studiando l'equazione del calore. Siccome le condizioni al bordo sono ancora le stesse di prima, otteniamo per  $B$  le stesse soluzioni, ovvero per ogni  $k \in \mathbb{N}$  avremo un possibile valore per la costante  $\lambda$  dato da (5) e una soluzione data da

$$B_k(x) = \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right).$$

L'equazione per  $A$  risulta simile a quella per  $B$ ,

$$A''(t) + \left(ck \frac{\pi}{L}\right)^2 A(t) = 0.$$

Non avendo questa volta condizioni al contorno, la funzione  $A$  sarà data da una generica soluzione della forma

$$A_k(t) = a_k \cos\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) + b_k \sin\left(ck \frac{\pi}{L} t\right).$$

Combinando per linearità le soluzioni  $A_k(t)B_k(t)$  possiamo scrivere soluzioni di (9) nella forma

$$(11) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) + b_k \sin\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right).$$

Derivando termine a termine (formalmente) otteniamo

$$(12) \quad \partial_t u(t, x) = c \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k \left( -a_k \sin\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) + b_k \cos\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right).$$

Per  $t = 0$ , otteniamo che i dati iniziali devono essere rappresentati dalle serie

$$(13) \quad f(x) = u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right),$$

$$(14) \quad g(x) = \partial_t u(0, x) = c \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right),$$

che non sono altro che le serie di Fourier trigonometriche di soli seni per  $f$  e  $g$ . Questo significa che i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  per costruire la soluzione  $u$  sono dati dai coefficienti di Fourier dei dati iniziali  $f$  e  $g$  sviluppati in serie di seni:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right) dx,$$

$$b_k = \frac{2}{c\pi k} \int_0^L g(x) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right) dx.$$

Utilizzando le formule di Werner

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (-\cos(\alpha + \beta) + \cos(-\alpha + \beta)),$$

possiamo riscrivere la formula (11) nella forma

$$(15) \quad u(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \sin\left(k \frac{\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(k \frac{\pi}{L}(x-ct)\right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left( -\cos\left(k \frac{\pi}{L}(x+ct)\right) + \cos\left(k \frac{\pi}{L}(x-ct)\right) \right) = \\ = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} (G(x+ct) - G(x-ct)),$$

dove  $f$  è sempre il dato iniziale ottenuto come serie di seni (13), mentre la funzione  $G$  è definita dalla serie dei coseni

$$G(x) = c \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k) \cos\left(k \frac{\pi}{L} x\right),$$

Derivando termine a termine la serie che definisce  $G$  si ottiene esattamente la serie (14) che definisce il dato iniziale  $g$ , e dunque  $G$  è (formalmente) una primitiva di  $g$ . Se supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^2$  e  $g$  di classe  $C^1$ , allora  $G$  risulta essere effettivamente di classe  $C^2$  e la formula (15) descrive una funzione  $u$  di classe  $C^2$  che risulta essere effettivamente una soluzione dell'equazione delle onde (9).

*Osservazione 3.1.* La formula (15) ci mostra anche come la soluzione  $u$  sia composta dalla somma di due onde viaggianti, che si propagano traslando in direzioni opposte, una con velocità  $c$  e l'altra con velocità  $-c$ ,

$$u(t, x) = U_+(x+ct) + U_-(x-ct), \quad U_{\pm}(s) = \frac{1}{2} f(s) \pm \frac{1}{2c} G(s).$$

#### 4. ESERCIZI

##### 4.1. Serie di Fourier per funzioni di periodo $T$ qualsiasi.

*Esercizio 4.1.* Riscrivi le formule per la serie di Fourier in forma trigonometrica (con coseni e seni), per i suoi coefficienti, e per l'identità di Plancherel, nel caso di una funzione di periodo  $T$  qualsiasi.

*Esercizio 4.2.* Dato un intervallo limitato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , costruisci una base ortonormale per lo spazio  $L^2([a, b])$ ,

*Esercizio 4.3.* Partendo dallo sviluppo in serie di potenze della funzione esponenziale,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

- Dimostra che ogni armonica elementare  $x \mapsto e^{i\lambda x}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , può essere approssimata in modo uniforme con dei polinomi su ogni intervallo limitato  $[a, b]$ .
- Dimostra che se una funzione in  $L^2([a, b])$  è ortogonale ad ogni monomio  $x \mapsto x^k$  con  $k \in \mathbb{N}_0$  allora è ortogonale anche ad ogni funzione armonica elementare.
- Dimostra che l'insieme dei polinomi è denso in  $L^2([a, b])$ .

##### 4.2. Equazione del calore.

*Esercizio 4.4.* Determina delle formule per esprimere la soluzione  $u(t, x)$  dell'equazione del calore

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u$$

per  $t \geq 0$  e  $x \in [0, L]$ , con dato iniziale

$$u(0, x) = f(x) \in L^2([0, L]),$$

e soggetta alle condizioni di isolamento al bordo date da

$$\partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, L) = 0.$$

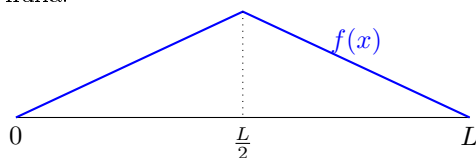
*Esercizio 4.5.* Ripeti l'esercizio precedente cambiando però le condizioni al bordo in

$$u(t, 0) = 0, \quad \partial_x u(t, L) = 0.$$

#### 4.3. Equazione delle onde.

*Esercizio 4.6.* Spiega sotto quali ipotesi su  $f$  e  $g$  possiamo giustificare (a posteriori) la derivazione termine a termine ottenuta in (12) della serie (11).

*Esercizio 4.7.* Supponi che una corda vibrante lunga  $L$ , e fissata alle estremità, all'istante  $t = 0$  abbia una posizione iniziale  $f(x)$  descritta dalla seguente figura e una velocità iniziale nulla.



Analizzando l'espressione finale della formula (15) disegna la forma che assume la corda nei vari istanti  $t > 0$ .