

**ANALISI 3 - L23:**  
**CONVERGENZA PUNTUALE DELLA SERIE DI FOURIER.**

Abbiamo già visto che la serie di Fourier di una funzione continua e regolare a tratti converge totalmente, e dunque uniformemente, ad una funzione continua. Vediamo ora come anche in presenza di discontinuità di tipo salto la serie di Fourier di una funzione regolare a tratti converge sempre almeno puntualmente in ogni punto, e nei punti di continuità ricostruisce fedelmente la funzione di partenza.

1. CONVERGENZA PUNTUALE PER FUNZIONI REGOLARI A TRATTI

**Definizione 1.1.** Data una funzione  $f$  regolare a tratti e un punto  $t_*$  definiamo il *valore regolarizzato* di  $f$  in  $t_*$  come il valore medio tra il limite destro e il limite sinistro di  $f$  in  $t_*$ ,

$$\frac{f(t_*^+) + f(t_*^-)}{2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow t_*^+} f(t) + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow t_*^-} f(t).$$

Nei punti in cui  $f$  è continua il valore regolarizzato di  $f$  coincide con il valore di  $f$ .

**Teorema 1.2.** *Se  $f$  è una funzione  $2\pi$ -periodica e regolare a tratti allora la serie di Fourier di  $f$  converge in ogni punto al valore regolarizzato di  $f$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni punto  $t_*$  fissato si tratta di dimostrare che la successione dei valori  $v_n := (f * D_n)(t_*)$  delle somme parziali della serie di Fourier, che sappiamo essere data dalle convoluzioni con i nuclei di Dirichlet, converge al valore regolarizzato  $v := \frac{1}{2} (f(t_*^+) + f(t_*^-))$  per  $n \rightarrow \infty$ . I nuclei di Dirichlet sono funzioni pari,  $D_n(-s) = D_n(s)$ , e dunque

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-\pi}^0 f(t_* - s) D_n(s) ds + \int_0^\pi f(t_* - s) D_n(s) ds = \\ &= \int_0^\pi f(t_* + s) D_n(-s) ds + \int_0^\pi f(t_* - s) D_n(s) ds = \\ &= \int_0^\pi (f(t_* + s) + f(t_* - s)) D_n(s) ds. \end{aligned}$$

Inoltre, siccome  $\int_{-\pi}^\pi D_n(s) ds = 1$ , per simmetria abbiamo  $\int_0^\pi D_n(s) ds = \frac{1}{2}$  e quindi possiamo scrivere

$$v = (f(t_*^+) + f(t_*^-)) \int_0^\pi D_n(s) ds = \int_0^\pi (f(t_*^+) + f(t_*^-)) D_n(s) ds.$$

Mettendo insieme le due cose otteniamo

$$v_n - v = \int_0^\pi g(s) D_n(s) ds$$

dove

$$g(s) := f(t_* + s) + f(t_* - s) - f(t_*^+) - f(t_*^-).$$

La funzione  $g$  è regolare a tratti e abbiamo

$$g(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = 0, \quad g'(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g'(s) = f'(t_*^+) - f'(t_*^-).$$

Utilizzando le formule esplicite per i nuclei di Dirichlet (ricavate nella scorsa lezione) abbiamo che

$$(1) \quad v_n - v = \int_0^\pi \frac{g(s)}{2\pi \sin(s/2)} \cdot \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})s} - e^{-i(n+\frac{1}{2})s}}{2i} ds = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi h_+(s) e^{ins} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi h_-(s) e^{-ins} ds = \widehat{h}_{+n} + \widehat{h}_{-n},$$

dove abbiamo posto

$$h_\pm(s) := \begin{cases} \pm \frac{g(s)e^{\pm is/2}}{2i \sin(s/2)}, & \text{se } s \in ]0, \pi], \\ 0, & \text{se } s \in ]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Queste funzioni  $h_\pm$  sono funzioni limitate, in quanto la  $g$  è limitata, e per  $s \rightarrow 0^+$ , per la regola di De L'Hopital, abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} h_\pm(s) = \pm \frac{1}{2i} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g(s)}{\sin(s/2)} = \mp i \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g'(s)}{\cos(s/2)} = \mp i (f'(t_\star^+) - f'(t_\star^-)).$$

Dunque abbiamo che  $h_\pm \in L^1([-\pi, \pi])$ ; e i loro coefficienti di Fourier formano successioni infinitesime, e quindi dalla formula (1) ricaviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - v = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{h}_{+n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{h}_{-n} = 0.$$

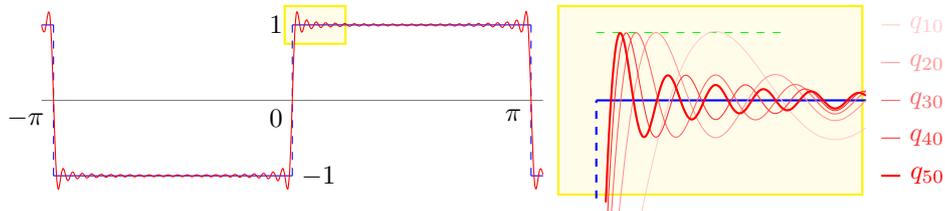
□

## 2. FENOMENO DI GIBBS

Per completare il discorso sulla convergenza puntuale della serie di Fourier di un segnale continuo a tratti cerchiamo di capire cosa succede in un intorno di un punto di discontinuità di tipo salto. Consideriamo il segnale di un onda quadra

$$f(t) := \begin{cases} -1, & \text{se } t \in ]-\pi, 0[, \\ 1, & \text{se } t \in ]0, \pi[, \end{cases} \quad S[f](t) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ dispari}}} \frac{4 \sin(kt)}{\pi k}, \quad q_n(t) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ dispari}}} \frac{4 \sin(kt)}{\pi k}.$$

Diamo un'occhiata ai grafici delle sue approssimazioni  $q_n$ ,

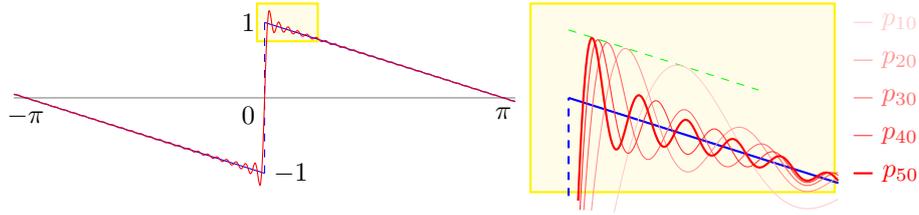


Notiamo che al crescere del grado di approssimazione, lo scarto massimo tra il polinomio approssimante e la funzione da approssimare non sembra tendere a zero, anzi sembra mantenersi costante.

La stessa cosa la si nota osservando le approssimazioni per il segnale di un'onda a dente di sega. Consideriamo un segnale  $h$  a dente di sega con un salto per  $t = 0$  di ampiezza 2 con  $h(0^+) = 1$  e  $h(0^-) = -1$ ,

(2)

$$h(t) := \begin{cases} -1 - \frac{t}{\pi}, & \text{se } t \in ]-\pi, 0[, \\ 1 - \frac{t}{\pi}, & \text{se } t \in ]0, \pi[, \end{cases} \quad S[h](t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2 \sin(kt)}{\pi k}, \quad p_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin(kt)}{\pi k}.$$



Ogni segnale regolare a tratti si può scrivere come somma di un segnale continuo regolare a tratti più una combinazione lineare di denti di sega traslati.

**Proposizione 2.1.** Sia  $f(t)$  un segnale  $2\pi$ -periodico regolare a tratti con discontinuità di tipo salto nei punti  $t_j$ , con salti di ampiezza  $c_j := f(t_j^+) - f(t_j^-)$ , per  $j = 1, \dots, m$ . Allora  $f$  può essere decomposto nella somma

$$f(t) = g(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m c_j h(t - t_j),$$

dove  $g(t)$  è un segnale continuo regolare a tratti e i termini  $c_j h(t - t_j)$  sono riscalamamenti traslati del segnale a dente di sega (2).

*Dimostrazione.* Basta verificare che la quantità  $f(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m c_j h(t - t_j)$  è una funzione continua nei punti  $t_j$ . Lasciamo questa semplice verifica come esercizio.  $\square$

La serie di Fourier di una somma di segnali si ottiene come somma delle serie di Fourier di ciascuna componente. Abbiamo visto che la componente continua regolare a tratti  $g$  ha una serie di Fourier che converge uniformemente, e quindi le sue approssimazioni hanno uno scarto massimo che tende a zero. La serie di Fourier di  $f$  nell'intorno della discontinuità  $t_j$  risulterà pertanto avere uno scarto asintoticamente equivalente a quello della componente a dente di sega  $c_j h(t - t_j)$ , che sarà una versione traslata e riscalata di quello che si vede in figura.

Vediamo quindi di analizzare meglio il comportamento delle approssimazioni del segnale a dente di sega (2). Derivando termine a termine i polinomi approssimanti  $p_k$  troviamo,

$$\begin{aligned} p'_n(t) - h'(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq k \leq n} \cos(kt) + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \cos(kt) \right) = \\ &= 2D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Il massimo valore di  $|p_n - h|$  si trova in corrispondenza del primo zero di  $D_n$  a destra dell'origine, ovvero nel primo zero del fattore  $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)$ , ovvero nel punto

$$t = \tau_n := \frac{2\pi}{2n + 1}.$$

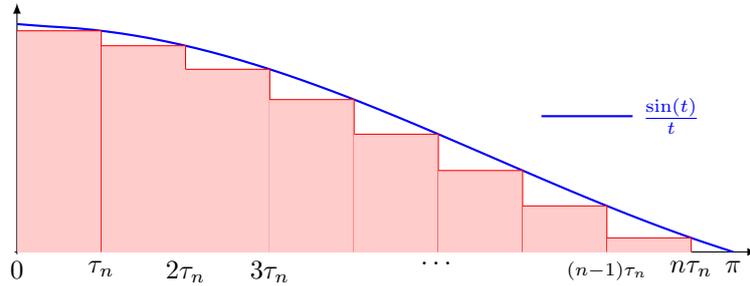
Dunque

$$\|p_n - h\|_{L^\infty} = p_n(\tau_n) - h(\tau_n) = \left( \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{2 \sin(k\tau_n)}{\pi k} \right) - 1 + \frac{\tau_n}{\pi}.$$

La sommatoria che compare in questa formula può essere interpretata come una somma di Darboux che approssima un integrale di Riemann:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin(k\tau_n)}{k} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin(k\tau_n)}{k\tau_n} \tau_n = \underline{S}(\phi, \sigma_n),$$

dove con  $\underline{S}(\phi, \sigma_n)$  indichiamo la somma inferiore relativa alla funzione  $\phi(t) := \frac{\sin t}{t}$  rispetto alla suddivisione  $\sigma_n := \{0, \tau_n, 2\tau_n, \dots, n\tau_n, \pi\}$  dell'intervallo  $[0, \pi]$ .



Quando  $n \rightarrow \infty$  tale somma inferiore tende all'integrale  $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$  e dunque abbiamo che lo scarto massimo tra il segnale dente di sega e le sue approssimazioni trigonometriche non tende a zero, ma ad un valore positivo

$$\Delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - h\|_{L^\infty} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 = 0.1789797 \dots$$

Ciò significa che per una discontinuità di tipo un salto l'approssimazione con somme parziali della serie di Fourier nelle vicinanze della discontinuità presenta sempre un errore relativo di quasi il 9% del valore del salto. Questa proprietà della convergenza puntuale della serie di Fourier va sotto il nome di *fenomeno di Gibbs*.

### 3. ESERCIZI

#### 3.1. Convergenza puntuale per funzioni regolari a tratti.

*Esercizio 3.1.* Dimostra che ogni funzione  $2\pi$ -periodica regolare a tratti si può scrivere come somma di una funzione *continua* regolare a tratti più una combinazione lineare di traslate del segnale a dente di sega.

*Esercizio 3.2.* Considera la serie di Fourier per la funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  che coincide con  $f(t) = e^t$  per  $t \in ]-\pi, \pi[$  (e di cui abbiamo già calcolato i coefficienti negli esempi della lezione 14). Esaminando la convergenza della serie di Fourier nei punti  $t_0 = 0$  e  $t_1 = \pi$  determina la somma delle serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}.$$

#### 3.2. Fenomeno di Gibbs.

*Esercizio 3.3.* Completa la dimostrazione della proposizione 2.1.

*Esercizio 3.4.* Spiega perché per le convoluzioni con i nuclei di Fejér non si verifica il fenomeno di Gibbs.