

**ANALISI 3 - L22:**  
**COMPLETEZZA DEL SISTEMA TRIGONOMETRICO IN  $L^2$ .**

Data una funzione  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  abbiamo definito la serie di Fourier associata ad  $f$  (o alla sua versione periodica) come la serie di funzioni

$$(1) \quad S[f](t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikt},$$

dove i coefficienti di Fourier  $\widehat{f}_k$  sono definiti dagli integrali

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds.$$

Nel contesto dello spazio di Hilbert  $L^2([-\pi, \pi])$  (che è contenuto in  $L^1$ ) possiamo interpretare questi integrali come prodotti scalari,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle,$$

avendo definito  $\widehat{E}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$ . Abbiamo visto che l'insieme  $\widehat{\Xi} = \{\widehat{E}_k : k \in \mathbb{Z}\}$  forma un sistema ortonormale in  $L^2([-\pi, \pi])$ . In particolare vale la disuguaglianza di Bessel, che nel nostro caso diventa

$$(2) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2}^2.$$

Dedichiamo questa lezione allo studio del legame tra le proprietà di integrabilità e regolarità di  $f$  e le proprietà di convergenza della sua serie di Fourier. Quello che ci aspettiamo è che la serie di Fourier converga alla funzione di partenza quindi permetta di descrivere una decomposizione della funzione come somma numerabile di componenti armoniche ortogonali tra loro.

1. CONVERGENZA TOTALE PER FUNZIONI CONTINUE E REGOLARI A TRATTI

**Definizione 1.1.** Una funzione  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *regolari a tratti* (o anche  $C^1$  a tratti) quando esiste una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  in un numero finito di intervalli  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

tale che, per ogni  $j = 1, \dots, n$ , la funzione  $f$  è di classe  $C^1$  su ciascun intervallo aperto  $]x_{j-1}, x_j[$ , ed inoltre esistono e sono finiti i limiti laterali di  $f$  e di  $f'$  negli estremi di  $I_j$ ,

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}^+) &= \lim_{t \rightarrow x_{j-1}^-} f(t), & f(x_j^-) &= \lim_{t \rightarrow x_j^+} f(t), \\ f'(x_{j-1}^+) &= \lim_{t \rightarrow x_{j-1}^-} f'(t), & f'(x_j^-) &= \lim_{t \rightarrow x_j^+} f'(t). \end{aligned}$$

In questo modo, per ogni  $j = 1, \dots, n$ , il prolungamento continuo sull'intervallo chiuso  $I_j$  della restrizione di  $f$  all'intervallo aperto  $]x_{j-1}, x_j[$  risulta essere di classe  $C^1$ .

Una funzione periodica si dice regolare a tratti quando la sua restrizione ad un intervallo di lunghezza uguale al periodo è regolare a tratti.

Ogni funzione regolare a tratti possiede derivata definita quasi ovunque e tale derivata è una funzione limitata.

Sono funzioni regolari a tratti, ad esempio, i segnali di onda quadra, onda a dente di sega, onda triangolare, di cui abbiamo calcolato le serie di Fourier nella precedente lezione.

**Proposizione 1.2.** *Se  $f$  è una funzione  $2\pi$ -periodica, continua in ogni punto, e regolare a tratti, allora tra i coefficienti di Fourier di  $f'$  e quelli di  $f$  vale la seguente relazione*

$$(3) \quad \widehat{f}'_k = ik\widehat{f}_k.$$

*Dimostrazione.* Siano  $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$  i punti che suddividono l'intervallo  $[-\pi, \pi]$  in intervalli sui quali  $f$  è di classe  $C^1$ . Integrando per parti su ciascun intervallino su cui la funzione è  $C^1$  otteniamo:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(s)e^{-iks} ds = f(x_j)e^{-ikx_j} - f(x_{j-1})e^{-ikx_{j-1}} + ik \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(s)e^{-iks} ds.$$

Sommando rispetto  $j$  otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(s)e^{-iks} ds = \sum_{j=1}^n (f(x_j)e^{-ikx_j} - f(x_{j-1})e^{-ikx_{j-1}}) + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks} ds.$$

La sommatoria dei termini di bordo, grazie alla continuità di  $f$  nei punti della suddivisione, è di tipo telescopico, si calcola facilmente e per via della periodicità di  $f$  risulta essere nulla,

$$\sum_{j=1}^n (f(x_j)e^{-ikx_j} - f(x_{j-1})e^{-ikx_{j-1}}) = f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0.$$

Otteniamo così che

$$\widehat{f}'_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s)e^{-iks} ds = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks} ds = ik\widehat{f}_k.$$

□

*Osservazione 1.3.* Se  $f$  è  $2\pi$ -periodica, continua, e regolare a tratti, allora abbiamo anche  $f' \in L^2$ . Ne segue che la successione dei coefficienti sta in  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Infatti, utilizzando (3) abbiamo

$$\|(\widehat{f}_k)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_0| + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |\widehat{f}'_k|.$$

Per Hölder (o Cauchy-Schwarz) in  $\ell^2$ , e per la disuguaglianza di Bessel (2) applicata a  $f'$ , abbiamo che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |\widehat{f}'_k| \leq \left(2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}'_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_{L^2},$$

inoltre  $|\widehat{f}_0| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2}$ . Dunque,

$$\|(\widehat{f}_k)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \|f'\|_{L^2}.$$

Questo fatto ci permette di ottenere un primo risultato di convergenza per la serie di Fourier.

**Proposizione 1.4.** *Se  $f$  è una funzione  $2\pi$ -periodica, continua e regolare a tratti, allora la serie di Fourier di  $f$  converge totalmente e la sua somma  $S[f]$  è una funzione continua.*

*Dimostrazione.* La convergenza totale della serie (1) equivale a richiedere che la serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|$  sia convergente, ma questo, per l'osservazione 1.3, segue dalle ipotesi su  $f$ . La convergenza totale implica convergenza uniforme, e siccome tutti i termini della serie sono continui ne segue che la somma  $S[f]$  della serie di Fourier è una funzione continua, essendo limite uniforme di funzioni continue.  $\square$

Attenzione! La proposizione 1.4 ci dice che la serie di funzioni converge ad una funzione  $S[f]$ , ma non ci dice che questa funzione coincide con  $f$ .

## 2. COMPLETEZZA DEL SISTEMA TRIGONOMETRICO IN $L^2$

Quando  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , utilizzando il sistema ortonormale  $\widehat{\Xi} = (\widehat{E}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  possiamo scrivere la serie di Fourier (1) come proiezione ortogonale sulla chiusura  $V := \overline{\text{span } \widehat{\Xi}}$  dello spazio generato dai polinomi trigonometrici,

$$S[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k = P_V(f).$$

Vogliamo dimostrare che la somma  $S[f]$  della serie di Fourier coincide (in  $L^2$ , e dunque quasi ovunque) con la funzione  $f$ . Per il teorema di caratterizzazione delle basi in spazi di Hilbert, ciò equivale a dire che  $\widehat{\Xi}$  è un sistema ortonormale massimale, ovvero che è una base ortonormale in  $L^2$ .

**Teorema 2.1.** *Il sistema trigonometrico  $\widehat{\Xi}$  è una base ortonormale per lo spazio  $L^2([-\pi, \pi])$ .*

Verificare che  $\widehat{\Xi}$  è una base ortonormale, equivale a mostrare che  $\text{span } \widehat{\Xi}$  è denso in  $L^2$ , ad esempio facendo vedere che per ogni  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  è possibile definire una successione  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di polinomi trigonometrici che converge ad  $f$  in norma  $L^2$ .

La somma della serie  $S[f]$  non è altro che il limite (in  $L^2$ ) per  $n \rightarrow \infty$  delle proiezioni ortogonali di  $f$  sui sottospazi dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale ad  $n$ ,

$$S[f] = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \quad p_n := P_{V_n}(f),$$

in particolare abbiamo che

$$(4) \quad p_n(t) = \sum_{k=-n}^n \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikt}.$$

Vogliamo dimostrare che la successione dei polinomi trigonometrici  $p_n$  converge ad  $f$  in norma  $L^2$ .

**2.1. Nuclei di Dirichlet.** Possiamo riscrivere la formula (4) sottoforma di un unico integrale,

$$(5) \quad p_n(t) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds e^{ikt} = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-s)} dt = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(t-s) dt,$$

dove con  $D_n$  indichiamo i cosiddetti *nuclei di Dirichlet*, si tratta di particolari polinomi trigonometrici definiti da

$$(6) \quad D_n(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Siccome  $e^{ikt} = (e^{it})^k$ , la somma che definisce i nuclei di Dirichlet non è altro che la somma di  $2n+1$  termini di una progressione geometrica di ragione  $q := e^{it}$ ; possiamo

quindi calcolare una formula esplicita per  $D_n$ : quando  $0 < |t| \leq \pi$  abbiamo  $q \neq 1$  e dunque

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n q^k = \frac{1}{2\pi} \cdot q^{-n} \cdot \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} - q^{-n-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}; \end{aligned}$$

mentre per  $t = 0$  abbiamo  $q = 1$  e

$$D_n(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n 1 = \frac{2n+1}{2\pi}.$$

Integrando termine a termine la somma in (6) troviamo che

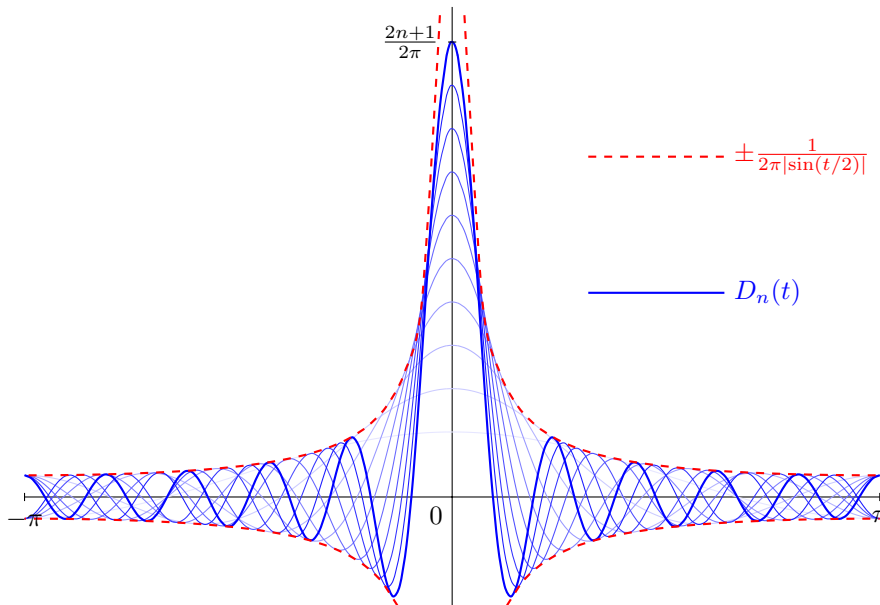
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \langle E_0, E_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle E_0, E_0 \rangle = 1,$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}_0$ . Se integriamo  $D_n$  in valore assoluto invece otteniamo una sequenza divergente di valori,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{\sin(\frac{1}{2}t)} dt > \\ &> \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \\ &> \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Siccome la serie armonica  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  è divergente, per confronto otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|D_n\|_{L^1} = +\infty.$$



**2.2. Convolutioni di funzioni periodiche.** Osserviamo che l'ultimo integrale in (5) non è altro che un integrale di convoluzione. Possiamo modificare la definizione di convoluzione che abbiamo visto per funzioni definite su  $\mathbb{R}$  in modo da adattarla per funzioni periodiche.

**Definizione 2.2.** Siano  $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ . Considerando il loro prolungamento periodico, possiamo pensare  $f$  e  $g$  definite su tutto  $\mathbb{R}$  come funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ . La convoluzione (periodica con periodo  $2\pi$ ) di  $f$  con  $g$  è definita allora tramite l'integrale

$$f * g(t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quando  $f$  e  $g$  sono funzioni  $L^2$  la loro convoluzione è sempre ben definita ed inoltre è una funzione continua e periodica (e quindi  $f * g$  sta in  $L^2$ ). Segue dalla disuguaglianza di Hölder che

$$|f * g(t)| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Nel contesto delle lezioni sulla serie di Fourier, con il simbolo di convoluzione  $*$  intenderemo sempre la convoluzione periodica, anche se il simbolo è lo stesso che abbiamo usato per la convoluzione su  $\mathbb{R}$  nelle precedenti lezioni;

Si verifica facilmente che la convoluzione periodica è commutativa, associativa, e lineare in entrambi i suoi argomenti:

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad (f + \lambda g) * h = (f * h) + \lambda(g * h),$$

per ogni  $f, g, h \in L^2$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Proposizione 2.3.** La convoluzione di una funzione in  $L^2([-\pi, \pi])$  con un polinomio trigonometrico è ancora un polinomio trigonometrico,

*Dimostrazione.* Per la legge esponenziale abbiamo che

$$E_k(t-s) = e^{ik(t-s)} = e^{-iks}e^{ikt} = \overline{E_k(s)}E_k(t),$$

da cui segue che  $f * E_k = \langle f, E_k \rangle E_k = 2\pi \widehat{f}_k E_k$ . Dato un polinomio trigonometrico  $p = \sum_{k=-n}^n c_k E_k \in V_n$ , per linearità abbiamo

$$f * p = \sum_{k=-n}^n c_k (f * E_k) = \sum_{k=-n}^n (2\pi c_k \widehat{f}_k) E_k \in V_n.$$

□

Tornando alla formula (5) per la proiezione ortogonale su  $V_n$ , ora può essere scritta sottoforma di convoluzione con i nuclei di Dirichlet,

$$p_n = P_{V_n} f = f * D_n.$$

**2.3. Nuclei di Fejér.** Abbiamo ora una successione di polinomi trigonometrici candidata ad approssimare una funzione  $f \in L^2$  che è data dalle proiezioni  $p_n = f * D_n$  ottenute con le convoluzione con i nuclei di Dirichlet. Purtroppo i nuclei di Dirichlet, per il loro carattere fortemente oscillante, risultano difficili da manipolare, in quanto producono quantità divergenti se integrati in valore assoluto. Possiamo invece utilizzare un'altra famiglia di polinomi approssimanti, costruiti come somme di Cesaro (medie aritmetiche) dei nuclei di Dirichlet, che risultano avere proprietà leggermente più favorevoli per stime puntuali.

**Definizione 2.4.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , definiamo il *nucleo di Fejér* come il polinomio trigonometrico  $F_n$  di grado  $n-1$  ottenuto come media aritmetica dei primi  $n$  nuclei di Dirichlet,

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k.$$

Dalla formula esplicita che abbiamo ricavato per i nuclei di Dirichlet,

$$(7) \quad D_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

possiamo ottenere anche una formula esplicita per i nuclei di Fejér. Ricordiamo che  $\sin \alpha = \operatorname{Im}(e^{i\alpha})$ ,

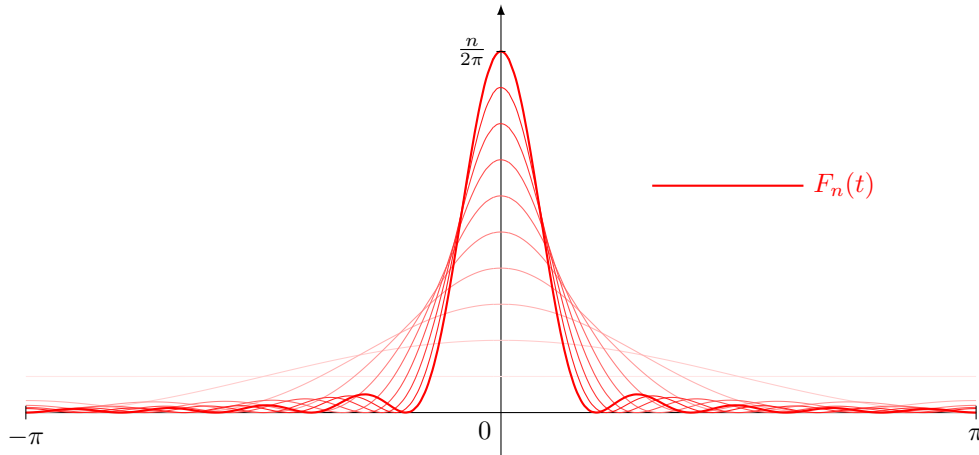
$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{1}{2\pi n \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi n \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k + \frac{1}{2}\right)t}\right). \end{aligned}$$

L'ultima sommatoria, è la somma di  $n$  termini di una progressione geometrica di ragione  $e^{it}$  e con primo termine  $e^{i\frac{1}{2}t}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k + \frac{1}{2}\right)t} &= e^{i\frac{1}{2}t} \frac{(e^{it})^n - 1}{e^{it} - 1} = e^{i\frac{1}{2}t} \cdot \frac{e^{i\frac{n}{2}t} - e^{-i\frac{n}{2}t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} = e^{i\frac{n}{2}t} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nt\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \\ &= \frac{\sin(nt)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} + i \frac{(\sin\left(\frac{1}{2}nt\right))^2}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}. \end{aligned}$$

Otteniamo così che

$$(8) \quad F_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nt\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)^2.$$



**Proposizione 2.5.** I nuclei di Fejér godono delle seguenti proprietà:

(A)  $F_n$  è una funzione pari a valori non negativi,

$$F_n(t) = F_n(-t) \geq 0;$$

(B)  $F_n$  sono funzioni di massa unitaria,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \|F_n\|_{L^1} = 1;$$

(C) la massa di  $f_n$  tende a concentrarsi intorno all'origine, infatti per ogni  $\delta \in ]0, \pi]$  abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt = 0.$$

*Dimostrazione.* La proprietà (A) risulta evidente dalla formula (8). La proprietà (B) segue dalla definizione e dal fatto che ogni nucleo di Dirichlet ha integrale 1,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1.$$

La proprietà (C) segue dal fatto che la funzione  $(\sin(t/2))^{-2}$  è continua e limitata su ogni intervallo della forma  $[\delta, \pi]$  con  $\delta \in ]0, \pi]$ , e dunque ha integrale finito (dipendente da  $\delta$ ),

$$0 \leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt = \frac{1}{\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \left( \frac{\sin(\frac{1}{2}nt)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right)^2 dt \leq \frac{1}{\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{(\sin(\frac{1}{2}t))^2} dt = \frac{C_{\delta}}{n}.$$

□

La proposizione ci dice che la successione dei nuclei di Fejer si comporta come una famiglia di mollificatori riscaldati, concentrando una massa unitaria sempre più vicino all'origine; come abbiamo già visto per i mollificatori, anche in questo caso otteniamo che l'operazione di convoluzione con questi nuclei permette di approssimare l'identità sugli spazi  $L^p$ .

**Proposizione 2.6.** *Sia  $1 \leq p < \infty$ . Data  $f \in L^p([-\pi, \pi])$  allora la successione  $(f * F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  delle convoluzioni con i nuclei di Fejér converge ad  $f$  in norma  $L^p$ .*

*Dimostrazione.* Siccome  $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) ds = 1$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (f * F_n)(t) - f(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) F_n(s) ds - f(t) \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) ds = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) F_n(s) ds. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza integrale di Minkowski e la positività dei nuclei di Fejér otteniamo

$$\|(f * F_n) - f\|_{L^p} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} F_n(s) ds,$$

dove  $\tau_{-s}(t) := t - s$  indica la traslazione di passo  $-s$ . Per la proprietà di continuità della norma  $L^p$  rispetto alle traslazioni, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che se  $|s| < \delta$  allora  $\|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Per qualsiasi  $s$ , per la disuguaglianza triangolare e l'invarianza delle norme  $L^p$  rispetto alle traslazioni, vale sempre la stima  $\|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}$ . Combinando le due stime troviamo che

$$\begin{aligned} \|(f * F_n) - f\|_{L^p} &\leq \\ &\leq \int_{|s| < \delta} \|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} F_n(s) ds + \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} F_n(s) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + 2\|f\|_{L^p} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_n(s) ds \end{aligned}$$

Per il punto (C) della proposizione 2.3, l'ultimo integrale è infinitesimo per  $n \rightarrow \infty$ , e dunque per  $n$  sufficientemente grande tale integrale risulterà minore di  $\varepsilon/(4\|f\|_p)$  e quindi avremo che  $\|(f * F_n) - f\|_{L^p} < \varepsilon$ . Questo significa che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f * F_n) - f\|_p = 0.$$

□

Ecco che siamo ora pronti per dare la dimostrazione della completezza del sistema trigonometrico in  $L^2$ .

*Dimostrazione del teorema 2.1.* Sia  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ . Siano  $q_n := f * F_n$  i polinomi trigonometrici ottenuti come convoluzione con i nuclei di Fejer. Per la proposizione (2.6) abbiamo che la successione  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ad  $f$  in norma  $L^2$ . Dunque i polinomi trigonometrici sono densi in  $L^2$ , ovvero

$$\overline{\text{span } \widehat{\Xi}} = L^2([-\pi, \pi]).$$

Ciò equivale a dire che il sistema ortonormale  $\widehat{\Xi}$  è una base per lo spazio di Hilbert  $L^2([-\pi, \pi])$ . □

**Corollario 2.7** (Convergenza della serie di Fourier in  $L^2$ ). *Sia  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ . La successione dei polinomi trigonometrici  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definita da*

$$p_n(x) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikt} = f * D_n,$$

*converge alla funzione  $f$  per  $n \rightarrow \infty$  in norma  $L^2$ . (Ricordiamo che con  $\widehat{f}_k$  indichiamo i coefficienti di Fourier di  $f$ , e con  $D_n$  i nuclei di Dirichlet)*

Questo significa in particolare che la somma  $S[f]$  della serie di Fourier di una funzione  $f \in L^2$  coincide quasi ovunque con la funzione  $f$ .

*Dimostrazione.* Il corollario segue immediatamente dal fatto che  $\widehat{\Xi}$  è una base per  $L^2$  in quanto, in virtù del teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali, abbiamo che la somma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k(t),$$

converge incondizionatamente ad  $f$  in  $L^2$ .

In alternativa, potevamo anche osservare che essendo  $p_n = f * D_n$  la proiezione ortogonale di  $f$  sul sottospazio dei polinomi ortogonali di grado minore o uguale a  $n$ ,  $p_n$  è anche il polinomio trigonometrico più vicino ad  $f$  in norma  $L^2$  tra tutti quelli di grado minore o uguale a  $n$ , e in particolare sarà più vicino ad  $f$  di quanto lo siano le convoluzioni  $q_n = f * F_n$  con i nuclei di Fejér,

$$\|p_n - f\|_{L^2} \leq \|q_n - f\|_{L^2}.$$

Per la proposizione 2.6 abbiamo che  $q_n$  converge ad  $f$  in norma  $L^2$  e quindi per confronto anche  $p_n$ . □

**2.4. Identità di Plancherel.** Sempre per il teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali in spazi di Hilbert, abbiamo che la disuguaglianza di Bessel (2) si trasforma ora nella seguente *identità di Plancherel*: se  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  allora

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \langle f, \widehat{E}_k \rangle \right|^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2,$$

ovvero

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt,$$

In particolare, trattandosi di una serie convergente, ritroviamo un'altra dimostrazione del fatto che la successione dei coefficienti è infinitesima.



Nel caso in cui la serie di Fourier è scritta nella forma trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

siccome abbiamo che

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad \widehat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \widehat{f}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e quindi

$$|\widehat{f}_0|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2, \quad |\widehat{f}_k|^2 + |\widehat{f}_{-k}|^2 = \frac{1}{2}|a_k|^2 + \frac{1}{2}|b_k|^2,$$

l'identità di Plancherel diventa

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{N}} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

**Esempio 2.8.** Riprendiamo in mano i calcoli fatti nella scorsa lezione per ottenere i coefficienti di Fourier del segnale a dente di sega. Abbiamo visto che la funzione  $f(t) = t$  per  $t \in [-\pi, \pi]$  ha come coefficienti di Fourier  $a_k = 0$  e  $b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$ . L'identità di Plancherel in questo caso diventa

$$4\pi \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \pi \sum_{k \in \mathbb{N}} |b_k|^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^3,$$

che si semplifica nella famosa somma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### 3. ESERCIZI

#### 3.1. Convergenza totale per funzioni continue e regolari a tratti.

*Esercizio 3.1.* Sia  $0 < a < 1$ . Siano  $f$  e  $g$  le funzioni  $2\pi$ -periodica che coincidono con  $f(t) = \cos(at)$  e  $g(t) = \sin(at)$  per  $t \in [-\pi, \pi]$ . Calcola i termini della serie di Fourier di  $f$  e sfruttando la relazione (3) tra i coefficienti di una funzione e quelli della sua derivata scrivi i termini della serie di Fourier di  $g$ . Verifica che la serie di Fourier di  $f$  converge totalmente, e che la serie di Fourier di  $g$  non converge totalmente.

*Esercizio 3.2.* Se  $f$  è una funzione  $2\pi$ -periodica di classe  $C^2$ , quale relazione c'è tra i coefficienti di Fourier di  $f$  e i coefficienti di Fourier di  $f''$ ?

*Esercizio 3.3.* Determina esplicitamente la funzione  $f(t)$  che ha come serie di Fourier la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{2^n}.$$

[Suggerimento: la serie in questione è la parte reale di una serie geometrica a valori complessi.]

#### 3.2. Convolutioni periodiche.

*Esercizio 3.4.* Spiega perché la convoluzione periodica di due funzioni di  $L^2([-\pi, \pi])$  è una funzione continua e periodica.

*Esercizio 3.5.* Calcola la convoluzione periodica  $f * g$  nei seguenti casi:

- (1)  $f(t) = (\sin t)^2$ ,  $g(t) = (\cos t)^4$ ;
- (2)  $f$  è l'onda quadra e  $g$  è l'onda a dente di sega che abbiamo studiato nella precedente lezione.

### 3.3. Nuclei di Dirichlet e di Fejer.

*Esercizio 3.6.* Calcola le convoluzioni  $D_n * D_m$  tra nuclei di Dirichlet. [Riesci a calcolarle senza fare calcoli?]

*Esercizio 3.7.* Determina i coefficienti numerici che permettono di esprimere i nuclei di Fejer come combinazione lineare delle funzioni armoniche elementari.

*Esercizio 3.8* (Somme di Cesaro in spazi normati). Per capire il legame tra nuclei di Dirichlet e nuclei di Fejer dimostra il seguente lemma che illustra la peculiarità delle somme di Cesaro.

**Lemma 3.9.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione convergente in uno spazio normato. Definiamo  $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora la successione  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente e il suo limite è lo stesso di  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 3.4. Completezza del sistema trigonometrico in $L^2$ .

*Esercizio 3.10.* Dimostra che se  $f$  è una funzione  $2\pi$ -periodica e continua allora la successione  $(f * F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  delle convoluzioni con i nuclei di Fejér converge uniformemente ad  $f$ .

*Esercizio 3.11.* Determina la miglior approssimazione in  $L^2([-\pi, \pi])$  con un polinomio trigonometrico di grado 2 per la funzione  $\cosh(t)$ .

*Esercizio 3.12.* Ogni funzione di  $L^2([0, \pi])$  può essere estesa in modo unico ad una funzione dispari o ad una funzione pari di  $L^2([-\pi, \pi])$ . Sfruttando questa idea dimostra che:

- l'insieme di funzioni  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kt) : k \in \mathbb{N} \right\}$  è una base ortonormale per  $L^2([0, \pi])$ ;
- l'insieme di funzioni  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kt) : k \in \mathbb{N}_0 \right\}$  è una base ortonormale per  $L^2([0, \pi])$ .

*Esercizio 3.13.* Utilizzando l'identità di Plancherel applicata ai segnali di onda quadra e di onda triangolare visti nella precedente lezione, calcola la somma esatta delle seguenti serie numeriche,

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k^4}, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^4}.$$