

## ANALISI 3 - L21: POLINOMI TRIGONOMETRICI

I polinomi sono funzioni molto regolari, facili da calcolare e da manipolare. Per questo è desiderabile poter riuscire ad approssimare funzioni qualsiasi con funzioni polinomiali. Quando si ha a che fare con funzioni che manifestano una periodicità, i polinomi standard risultano essere poco adatti a generare buone approssimazioni: un polinomio (in una variabile) di grado  $d$  che assume lo stesso valore più di  $d$  volte deve necessariamente essere costante, mentre funzioni periodiche assumono tutti i loro valori infinite volte. Un polinomio in più variabili può comunque generare una funzione periodica quando i suoi valori vengono letti lungo una curva chiusa opportunamente parametrizzata. Leggendo polinomi definiti sul piano cartesiano lungo la circonferenza unitaria si generano i polinomi trigonometrici che sono funzioni periodiche regolari semplici da calcolare e manipolare e con essi possiamo cercare di approssimare generiche funzioni periodiche.

### 1. POLINOMI, DAL PIANO ALLA CIRCONFERENZA UNITARIA

**1.1. Funzioni periodiche.** Una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *periodica* di *periodo*  $T > 0$  quando

$$f(x + T) = f(x)$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Tutta l'informazione riguardante  $f$  è contenuta in ogni sua restrizione ad un intervallo di lunghezza pari al periodo. In particolare, se  $f$  è localmente integrabile allora

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$$

per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Inoltre, data una funzione  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definita su un intervallo di lunghezza  $T = b - a > 0$ , esiste un'unica funzione periodica  $\tilde{g}$  definita su tutto  $\mathbb{R}$  che sia periodica con periodo  $T$  e che coincida con  $g$  su  $[a, b]$ , essa si ottiene ponendo

$$\tilde{g}(t) := g\left(t - \left\lfloor \frac{t-a}{T} \right\rfloor T\right),$$

dove  $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z}: n \leq x\}$  denota la parte intera del numero  $x$ . Se  $g$  è continua su  $[a, b]$  tale prolungamento  $\tilde{g}$  risulta essere continuo su tutto  $\mathbb{R}$  se e solo se  $g(a) = g(b)$ ; nel caso in cui  $g(a) \neq g(b)$  il prolungamento periodico presenterà delle discontinuità di tipo salto nei punti di ascissa  $a + kT$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Se  $g$  è di classe  $C^1$  su  $[a, b]$  tale prolungamento  $\tilde{g}$  risulta essere di classe  $C^1$  se e solo se  $g(a) = g(b)$  e  $g'(a) = g'(b)$ ; nel caso in cui  $g(a) = g(b)$  ma  $g'(a) \neq g'(b)$  il prolungamento periodico presenterà dei punti angolosi nei punti di ascissa  $a + kT$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le funzioni periodiche hanno un comportamento di carattere ciclico che possiamo associare ad un moto circolare. Sia  $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$  la circonferenza unitaria nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . Possiamo parametrizzare  $U$  tramite un punto che la percorre in senso antiorario con moto circolare uniforme,

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow U, \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

La funzione  $\varphi$  è periodica con periodo  $2\pi$ . Data una funzione  $F(x, y)$  definita su un dominio del piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  contenente  $U$ , la composizione  $f := F \circ \varphi$  genera una funzione periodica che riproduce su ogni periodo i valori che  $F$  assume lungo la circonferenza  $U$ ,

$$f(t) = F(\cos t, \sin t).$$

Per avere una notazione più compatta possiamo identificare  $\mathbb{R}^2$  con il piano complesso  $\mathbb{C}$ , ponendo  $(x, y) = x + iy$ . Abbiamo allora che la circonferenza unitaria è data dall'insieme

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \bar{z} = \frac{1}{z} \right\}.$$

Inoltre, utilizzando la notazione esponenziale, possiamo scrivere

$$\varphi(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}, \quad f(t) = F(e^{it}).$$

**1.2. Restrizione di polinomi dal piano alla circonferenza unitaria.** Se indichiamo un punto del piano con il numero complesso  $z = x + iy$ , e il suo coniugato con  $\bar{z} = x - iy$ , allora  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  e  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ . Ogni monomio  $x^a y^b$  si esprime, tramite la formula di Newton per le potenze del un binomio, come un polinomio (omogeneo) in  $z$  e  $\bar{z}$  di grado  $a + b$ . Ogni polinomio  $Q(x, y)$  di grado  $n$  nelle due variabili reali  $x$  e  $y$  può essere visto allora come un polinomio di grado  $n$  nelle variabili  $z$  e  $\bar{z}$ ,

$$P(z, \bar{z}) := Q\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right);$$

si tratta di una combinazione lineare di termini monomiali della forma  $z^a \bar{z}^b$  con esponenti interi  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $a + b \leq n$ . Se poi andiamo a leggere i valori del polinomio  $P$  lungo la circonferenza unitaria, ponendo  $z = e^{it}$ , ed essendo  $\bar{z} = z^{-1}$ , per i vari termini monomiali abbiamo

$$z^a \bar{z}^b = z^{a-b} = e^{i(a-b)t}.$$

Ecco che la funzione periodica  $p(t) := P(e^{it}, e^{-it})$  risulta essere una combinazione lineare di termini della forma

$$e^{ikt} = (\cos t + i \sin t)^k = \cos(kt) + i \sin(kt),$$

con  $k$  intero che può variare da  $-n$  a  $n$ .

### 1.3. Polinomi trigonometrici.

**Definizione 1.1.** Sia  $n \in \mathbb{N}_0$ . Chiamiamo *polinomio trigonometrico* di grado  $n$  ogni funzione da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  della forma

$$(1) \quad p(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt},$$

con coefficienti  $c_k \in \mathbb{C}$  per  $k = -n, \dots, n$ .

*Osservazione 1.2.* Per le formule di Eulero abbiamo che

$$e^{i0t} = 1, \quad e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt), \quad e^{-ikt} = \cos(kt) - i \sin(kt), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Dunque, sostituendo, otteniamo che i polinomi trigonometrici possono anche essere scritti nella forma

$$(2) \quad p(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kt),$$

con coefficienti  $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{C}$  per  $k = 1, \dots, n$ .

*Osservazione 1.3.* Si ricava facilmente il legame tra i coefficienti  $c_k$  della forma complessa (1) e i coefficienti  $a_k, b_k$  della forma reale (2) del polinomio trigonometrico  $p$ . Per ogni  $k \geq 0$  abbiamo infatti che

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt) = a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, & (b_0 &= 0), & c_0 &= \frac{1}{2}a_0, \\ a_k &= c_k + c_{-k}, & c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}), & c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k). \end{aligned}$$

**Esempio 1.4.** Al polinomio di terzo grado in  $x$  e  $y$

$$Q(x, y) = 1 - 2y + ix^2 - xy^2,$$

corrisponde il polinomio di terzo grado in  $z$  e  $\bar{z}$

$$\begin{aligned} P(z, \bar{z}) &= 1 - \frac{2}{2i}(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}i(z + \bar{z})^2 + \frac{1}{8}(z + \bar{z})(z - \bar{z})^2 = \\ &= 1 + iz - i\bar{z} + \frac{1}{4}iz^2 + \frac{1}{2}iz\bar{z} + \frac{1}{4}i\bar{z}^2 + \frac{1}{8}z^3 - \frac{1}{8}z^2\bar{z} - \frac{1}{8}z\bar{z}^2 + \frac{1}{8}\bar{z}^3. \end{aligned}$$

Letto lungo la circonferenza trigonometrica, con  $z = e^{it}$  e la sostituzione  $\bar{z} = 1/z$ , si riduce a

$$\begin{aligned} P(z, z^{-1}) &= 1 + iz - iz^{-1} + \frac{1}{4}iz^2 + \frac{1}{2}i + \frac{1}{4}iz^{-2} + \frac{1}{8}z^3 - \frac{1}{8}z - \frac{1}{8}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-3} = \\ &= \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{4}iz^{-2} + \left(-\frac{1}{8} - i\right)z^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{8} + i\right)z + \frac{1}{4}iz^2 + \frac{1}{8}z^3, \end{aligned}$$

che corrisponde al polinomio trigonometrico di terzo grado in forma complessa,

$$\begin{aligned} p(t) &= P(e^{it}, e^{-it}) = \\ &= \frac{1}{8}e^{-3it} + \frac{1}{4}ie^{-2it} + \left(-\frac{1}{8} - i\right)e^{-it} + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{8} + i\right)e^{it} + \frac{1}{4}ie^{2it} + \frac{1}{8}e^{3it}, \end{aligned}$$

e che in forma reale diventa

$$p(t) = \left(1 + \frac{1}{2}i\right) - \frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{2}i\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(3t) - 2\sin(t).$$

**Esempio 1.5.** La funzione  $(\cos t)^4$  è un polinomio trigonometrico. Infatti

$$\begin{aligned} (\cos t)^4 &= \frac{1}{16}(e^{it} + e^{-it})^4 = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} e^{kit} e^{-(4-k)it} = \\ &= \frac{1}{16}e^{-4it} + \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{1}{16}e^{4it} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t). \end{aligned}$$

**1.4. Sistema ortonormale trigonometrico.** I polinomi trigonometrici sono sempre funzioni continue e periodiche con periodo  $2\pi$ . Se li consideriamo su un solo periodo, possiamo pensarli come elementi dello spazio di Hilbert  $L^2([-\pi, \pi])$  su quale è definito il prodotto scalare  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt$ .

**Definizione 1.6.** Per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  e  $t \in \mathbb{R}$ , definiamo le funzioni

$$(3) \quad E_k(t) := e^{ikt}, \quad C_k(t) := \cos(kt), \quad S_k(t) := \sin(kt).$$

Chiamiamo queste funzioni *armoniche elementari*. Con esse formiamo due famiglie di funzioni periodiche

$$\Xi := (E_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \Theta := (C_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \cup (S_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} E_k &= C_k + iS_k, & C_k &= \operatorname{Re} E_k = \frac{1}{2}(E_k + E_{-k}), \\ E_{-k} &= C_k - iS_k, & S_k &= \operatorname{Im} E_k = \frac{1}{2i}(E_k - E_{-k}). \end{aligned}$$

L'insieme  $V_n$  dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a  $n$  forma un sottospazio vettoriale (complesso) di dimensione finita generato da armoniche elementari,

$$(4) \quad V_n := \operatorname{span} \{E_k : k = -n, \dots, n\} = \operatorname{span} \{C_0, C_1, \dots, C_n, S_1, \dots, S_n\}.$$

**Proposizione 1.7.** *Le famiglie  $\Xi$  e  $\Theta$  sono formate da funzioni a due a due ortogonali in  $L^2([-\pi, \pi])$*

*Dimostrazione.* La verifica è semplice in quanto ogni prodotto scalare da controllare si riconduce ad un integrale di una funzione in cui la primitiva è periodica e continua, e quindi l'integrale è nullo. Se  $j, k \in \mathbb{Z}$  con  $j \neq k$ ,

$$\langle E_j, E_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{-ikt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = \left[ \frac{e^{i(j-k)t}}{i(j-k)} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0.$$

Se  $k \in \mathbb{N}$  abbiamo

$$\begin{aligned} \langle C_0, C_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = \left[ \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = 0; \\ \langle C_0, S_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) dt = \left[ -\frac{\cos(kt)}{k} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Se  $j, k \in \mathbb{N}$  con  $j \neq k$ , abbiamo  $j+k > 0$  e  $j-k \neq 0$ , usando le formule di Werner otteniamo

$$\begin{aligned} \langle C_j, C_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \cos(kt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j+k)t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j-k)t) dt = 0; \\ \langle S_j, S_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt) \sin(kt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j+k)t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j-k)t) dt = 0. \end{aligned}$$

Se  $j, k \in \mathbb{N}$ , sempre usando le formule di Werner,

$$\langle C_j, S_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \sin(kt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((j+k)t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((j-k)t) dt = 0.$$

□

*Osservazione 1.8.* L'ortogonalità implica la lineare indipendenza delle funzioni nelle famiglie  $\Xi$  e  $\Theta$ . In particolare segue che il sottospazio  $V_n$  dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a  $n$  ha dimensione  $2n+1$ . Ogni polinomio  $p \in V_n$  può essere scritto in modo unico come combinazione di armoniche elementari in notazione esponenziale,

$$p = \sum_{k=-n}^n c_k E_k,$$

oppure come combinazione di armoniche elementari in notazione trigonometrica,

$$p = \frac{1}{2} a_0 C_0 + \sum_{k=1}^n (a_k C_k + b_k S_k).$$

Il legame tra i coefficienti  $a_k$ ,  $b_k$  e  $c_k$  è quello descritto nell'osservazione 1.3.

Si calcola facilmente la norma in  $L^2([-\pi, \pi])$  delle funzioni armoniche elementari definite in (3):

$$\|E_k\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Rinormalizzando le funzioni del sistema ortogonale  $\Xi$  otteniamo il sistema ortonormale trigonometrico  $\widehat{\Xi} = (\widehat{E}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  formato dalle funzioni armoniche elementari normalizzate definite da

$$\widehat{E}_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vedremo nella prossima lezione come questo sistema ortonormale costituisca una base (numerabile) per lo spazio  $L^2([-\pi, \pi])$ .

## 2. APPROSSIMAZIONI IN $L^2$ CON POLINOMI TRIGONOMETRICI

Il sistema finito di armoniche elementari normalizzate  $\{\widehat{E}_k : k = -n, \dots, n\}$  costituisce una base ortonormale per il sottospazio  $V_n$  dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a  $n$ . Con esso possiamo facilmente scrivere una formula per la proiezione ortogonale su  $V_n$  in  $L^2$ . Data una funzione  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , utilizzando le formule che abbiamo ricavato nelle lezioni precedenti, abbiamo che la proiezione ortogonale di  $f$  su  $V_n$  è data dal polinomio trigonometrico

$$p := P_{V_n} f = \sum_{k=-n}^n \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k,$$

ovvero

$$(5) \quad p(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikt},$$

dove i coefficienti di Fourier  $\widehat{f}_k$  sono dati da

$$(6) \quad \widehat{f}_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, E_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds.$$

Il polinomio trigonometrico  $p$  definito in (5) è quello, tra tutti i polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a  $n$ , che ha minima distanza, in norma  $L^2$ , dalla funzione  $f$ , ovvero quello che minimizza lo scarto quadratico.

Per la disuguaglianza di Bessel abbiamo inoltre che

$$(7) \quad \|f\|_{L^2}^2 \geq \sum_{k=-n}^n |\langle f, \widehat{E}_k \rangle|^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}_k|^2.$$

## 3. SERIE DI FOURIER

I coefficienti di Fourier  $\widehat{f}_k$ , definiti in (6), non dipendono dalla scelta del grado  $n$  di approssimazione, e la formula (5), che descrive la proiezione ortogonale di  $f$  su  $V_n$ , può essere considerata come una somma parziale di una serie di funzioni.

**Definizione 3.1.** Data una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodica con periodo  $2\pi$  e localmente integrabile, è ben definita la successione  $(\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  dei coefficienti di Fourier di  $f$  definiti da

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds.$$

Chiamiamo *serie di Fourier* associata alla funzione  $f$  la serie di funzioni

$$(8) \quad S[f](t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k e^{ikt}.$$

La formula (8) al momento è puramente formale, il fatto che la somma converga effettivamente ad una funzione  $S[f]$  ben definita dipende dalle proprietà di integrabilità e regolarità della funzione  $f$ . Ci occuperemo delle proprietà di convergenza nelle prossime lezioni. Per il momento esaminiamo qualche esempio di calcolo e qualche proprietà della successione dei coefficienti.

*Osservazione 3.2.* Chiedere che una funzione periodica sia localmente integrabile equivale a chiedere che la funzione sia di classe  $L^1$  su un intervallo di lunghezza pari ad un periodo. Nel nostro caso dunque i coefficienti di Fourier sono ben definiti per ogni  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  e dalla loro definizione segue immediatamente che

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1([-\pi, \pi])}.$$

Possiamo dire di più.

**Proposizione 3.3.** *Data una funzione  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ , la successione  $(\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  dei suoi coefficienti di Fourier è infinitesima per  $|k| \rightarrow \infty$ .*

Questo risultato è un caso particolare del seguente lemma di Riemann-Lebesgue.

**Teorema 3.4** (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Data  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la funzione  $\widehat{f}$  definita da*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx$$

*è infinitesima per  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo prima di tutto che la funzione  $\widehat{f}$  risulta essere limitata dalla norma  $L^1$  di  $f$ ,

$$(9) \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}.$$

Verifichiamo prima il lemma per una funzione  $g$  di classe  $C^1$  a supporto compatto. Siccome

$$e^{-i\xi x} = -\frac{1}{i\xi} \partial_x e^{-i\xi x},$$

possiamo integrare per parti e ricavare che

$$\widehat{g}(\xi) = -\frac{1}{i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \partial_x e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Dunque  $\widehat{g}$  è infinitesima all'infinito, in quanto

$$(10) \quad |\widehat{g}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|} \|g'\|_{L^1}.$$

Sappiamo che le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in  $L^1$ , e dunque, data  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una funzione  $g$  di classe  $C^1$  a supporto compatto tale che  $\|f - g\|_{L^1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Per linearità dell'integrale e per la stima (9) abbiamo

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1}.$$

Possiamo inoltre applicare la stima (10) a  $g$ , così quando  $|\xi| \geq \frac{2}{\varepsilon} \|g'\|_{L^1}$  otteniamo

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1} + \frac{1}{|\xi|} \|g'\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Questo implica che  $\widehat{f}(\xi)$  è infinitesima per  $|\xi| \rightarrow \infty$ . □

*Osservazione 3.5.* Nel caso di una funzione  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  dalla disuguaglianza di Bessel (7) segue che la successione dei coefficienti di Fourier è di quadrato sommabile,  $(\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , e abbiamo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2.$$

*Osservazione 3.6.* La serie (8) è una somma numerabile di armoniche elementari in forma esponenziale (quelle della famiglia  $\Xi$ ). Utilizzando le relazioni tra i coefficienti descritte nell'osservazione 1.3 possiamo riscrivere la serie come somma numerabile di armoniche elementari in forma trigonometrica (quelle della famiglia  $\Theta$ ),

$$S[f](t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

dove i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  sono dati da:

$$\begin{aligned} a_0 &:= 2\widehat{f}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \, ds, \\ a_k &:= \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) \, ds, \\ b_k &:= i\widehat{f}_k - i\widehat{f}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) \, ds. \end{aligned}$$

*Osservazione 3.7.* Se  $f$  è una funzione a valori reali allora i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  sono anch'essi reali e quindi la forma trigonometrica permette di esprimere la serie di Fourier in termini di quantità tutte reali.

*Osservazione 3.8.* Se  $f$  è una funzione pari,  $f(-t) = f(t)$ , allora l'integrando  $f(s) \sin(ks)$  è una funzione dispari e dunque l'integrale che definisce i coefficienti  $b_k$  si annulla. In questo caso la serie di Fourier si riduce a

$$S[f](t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt),$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \cos(ks) \, ds.$$

Se  $f$  è una funzione dispari,  $f(-t) = -f(t)$ , allora l'integrando  $f(s) \cos(ks)$  è una funzione dispari e dunque l'integrale che definisce i coefficienti  $a_k$  si annulla. In questo caso la serie di Fourier si riduce a

$$S[f](t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt),$$

dove i coefficienti sono dati da

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin(ks) \, ds.$$

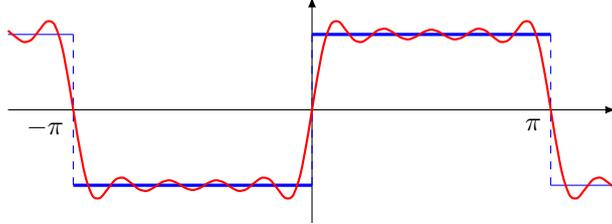
**Esempio 3.9** (Onda quadra). Consideriamo la funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  che coincide con  $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$  per  $t \in ]-\pi, \pi[$ . Siccome si tratta di una funzione dispari avremo  $a_k = 0$  e

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(ks) \, ds = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} \frac{4}{\pi k}, & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } k \text{ è pari.} \end{cases}$$

La serie di Fourier associata risulta essere

$$S[f](t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k} \sin(kt) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)t)}{2m-1}.$$

In figura ecco il grafico dell'onda quadra  $f$  e della sua proiezione su  $V_6$ :



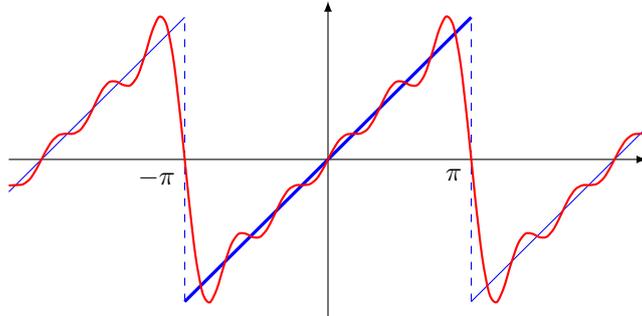
**Esempio 3.10** (Onda a dente di sega). Consideriamo la funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  che coincide con  $f(t) = t$  per  $t \in ]-\pi, \pi[$ . Siccome si tratta di una funzione dispari avremo anche questa volta  $a_k = 0$ , mentre integrando per parti si ottiene

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s \cdot \sin(ks) \, ds = \dots = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

La serie di Fourier associata risulta essere

$$S[f](t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kt).$$

In figura ecco il grafico dell'onda a dente di sega  $f$  e della sua proiezione su  $V_5$ :



**Esempio 3.11** (Onda triangolare). Consideriamo la funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  che coincide con  $f(t) = |t|$  per  $t \in ]-\pi, \pi[$ . Siccome si tratta di una funzione pari questa volta avremo  $b_k = 0$ , mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s \, ds = \pi,$$

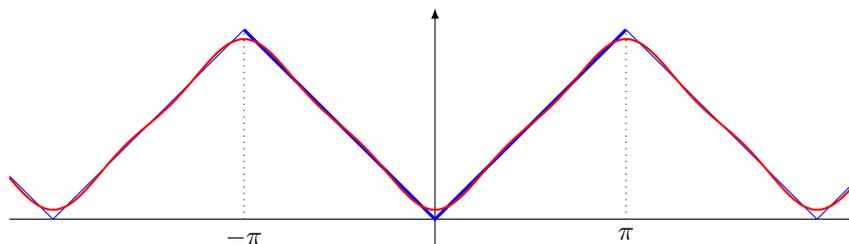
e, per  $k \in \mathbb{N}$ , integrando per parti si ottiene

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s \cdot \cos(ks) \, ds = \dots = -\frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } k \text{ è pari.} \end{cases}$$

La serie di Fourier associata risulta essere

$$S[f](t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} \cos(kt) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos((2m-1)t)}{(2m-1)^2}.$$

In figura ecco il grafico dell'onda triangolare  $f$  e della sua proiezione su  $V_3$ :



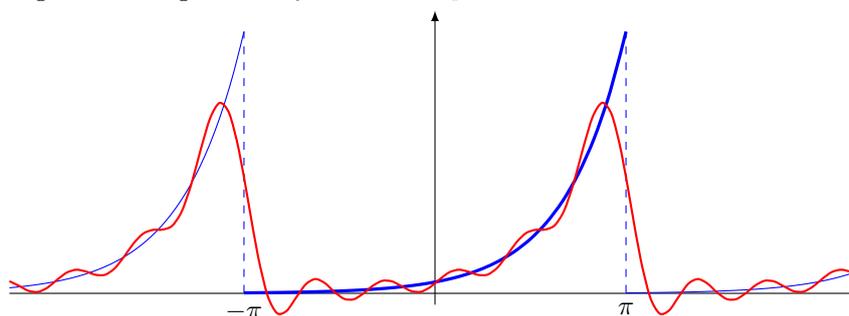
*Osservazione 3.12.* Consideriamo la funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  che coincide con  $f(t) = e^t$  per  $t \in ]-\pi, \pi[$ . Calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier,

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^s e^{-iks} ds = \left[ \frac{e^{(1-ik)s}}{2\pi(1-ik)} \right]_{s=-\pi}^{s=\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ik)} \left( e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi} \right) = (-1)^k \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{1+ik}{1+k^2}. \end{aligned}$$

La serie di Fourier associata è data da

$$\begin{aligned} S[f](t) &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \frac{1+ik}{1+k^2} e^{ikt} = \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{1+k^2} (\cos(kt) - k \sin(kt)) \right). \end{aligned}$$

In figura ecco il grafico di  $f$  e della sua proiezione su  $V_5$ :



#### 4. ESERCIZI

##### 4.1. Polinomi nel piano e sulla circonferenza unitaria.

*Esercizio 4.1.* Determina, sia in forma complessa che in forma reale, i polinomi trigonometrici corrispondenti ai seguenti polinomi in due variabili:

$$P_1(x, y) = (1 + 2i)x + (3 - 4i)y;$$

$$P_2(x, y) = 1 + y + x^2;$$

$$P_3(x, y) = x^3 - iy^3;$$

$$P_4(x, y) = 16ix^3y.$$

*Esercizio 4.2.* Scrivi in forma estesa complessa e in forma estesa reale i seguenti polinomi trigonometrici:

$$p_1(t) = (\sin t)(\cos t);$$

$$p_2(t) = \cos(3t)e^{-2it};$$

$$p_3(t) = (1 + \sin t)^4.$$

*Esercizio 4.3.* Dimostra che le funzioni periodiche  $t \mapsto e^{ikt}$  sono tra loro linearmente indipendenti al variare di  $k \in \mathbb{Z}$  senza utilizzare l'ortogonalità.

*Esercizio 4.4.* Dimostra che ogni polinomio trigonometrico  $p \in V_n$  della forma (2) con coefficienti reali,  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , può essere scritto in modo unico nella forma

$$p(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(kt + \phi_k),$$

con coefficienti  $A_k \geq 0$  e  $\phi_k \in ]-\pi, \pi]$ . Determina quale relazione intercorre tra i coefficienti  $a_k, b_k$  e i coefficienti  $A_k, \phi_k$ .

#### 4.2. Serie di Fourier.

*Esercizio 4.5.* Cosa puoi dire della serie di Fourier associata ad un polinomio trigonometrico?

*Esercizio 4.6.* Sia  $f(t)$  una funzione  $2\pi$ -periodica localmente integrabile e sia  $g(t) = f(t - t_*)$  la traslazione di  $f$  di passo  $t_*$ . Determina il legame che intercorre tra i coefficienti di Fourier di  $f$  e i coefficienti di Fourier di  $g$ , sia nella notazione esponenziale, che nella notazione trigonometrica.

Nei seguenti esercizi ti viene chiesto di calcolare i termini della serie di Fourier di alcune funzioni. Dopo aver fatto i conti, con l'aiuto di un calcolatore elettronico disegna i grafici delle funzioni e sovrapponi su essi i grafici della somma dei primi termini della serie, osserva anche cosa succede all'aumentare dei termini.

*Esercizio 4.7.* Calcola la serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica che coincide con  $(t)_+$  (parte positiva di  $t$ ) per  $|t| \leq \pi$ .

*Esercizio 4.8.* Calcola la serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica che coincide con  $\pi^2 - t^2$  per  $|t| \leq \pi$ .

*Esercizio 4.9.* Sia  $0 < \lambda < 1$ . Calcola la serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica che coincide con  $\sin(\lambda t)$  per  $|t| \leq \pi$ . (Attenzione si tratta di una funzione con discontinuità in  $\pm\pi$ .)