ANALISI 3 - L19: STRUTTURA DEGLI SPAZI DI HILBERT

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti.

1. Struttura ℓ^2 degli spazi di Hilbert

Teorema 1.1. *Se A e B sono due basi ortonormali dello stesso spazio di Hilbert H allora A e B hanno la stessa cardinalità.*

Dato un insieme E indichiamo con $\sharp E$ la sua cardinalità.

Dimostrazione. Se A è un insieme finito allora H è uno spazio vettoriale di dimensione finita e quindi $H = \operatorname{span}(A) = \operatorname{span}(B)$, e dunque A e B hanno la stessa cardinalitá essendo anche basi in senso algebrico.

Supponiamo quindi che sia A che B siano insiemi infiniti. Per ogni $a \in A$, definiamo $B_a := \{b \in B \colon \langle a, b\rangle \neq 0\}$. Abbiamo che $B \subseteq \cup_{a\in A} B_a$, infatti se fosse $\langle a, b\rangle = 0$ per ogni $a \in A$ allora avremmo $b \in A^\perp$ e dunque dovrebbe essere $b = 0$. Ogni insieme B_a è al più numerabile. Per le regole di calcolo dei numeri cardinali abbiamo

$$\sharp B \leqslant \sharp\left(\cup_{a\in A} B_a\right) \leqslant \sharp\left(A \times \mathbb{N}\right) = \sharp A.$$

Invertendo il ruolo di A e B si ottiene anche che $\sharp A \leqslant \sharp B$. □

Esistono spazi di Hilbert con basi di qualsiasi cardinalità. Anzi, qualsiasi insieme può essere considerato la base di qualche spazio di Hilbert.

Esempio 1.2. Sia S un insieme (qualunque). Indichiamo con $\mathbb{C}^S$ l'insieme delle applicazioni da S a $\mathbb{C}$. Lo spazio

$$\ell^2(S) := \left\{x \in \mathbb{C}^S \colon \sum_{h\in S} |x(h)|^2 < +\infty\right\}$$

dotato del prodotto scalare

$$\langle x, y\rangle := \sum_{h\in S} x(h)\overline{y(h)},$$

e della corrispondente norma $\|x\| := \left(\sum_{h\in S} |x(h)|^2\right)^{1/2}$, è uno spazio di Hilbert. Possiamo identificare l'insieme S con il sottoinsieme $\tilde{S} = \left\{e_s \in \mathbb{C}^S \colon s \in S\right\}$, dove per ogni $s \in S$ poniamo $e_s(t) = 0$ per ogni $t \neq s$, e $e_s(s) = 1$. L'insieme $\tilde{S}$ è una base ortonormale per $\ell^2(S)$ con la stessa cardinalità di S.

Nel caso in cui $S = \mathbb{N}$ ritroviamo lo spazio $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ delle successioni di quadrato sommabile.

Definizione 1.3. Due spazi di Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ si dicono *isomorfi* quando esiste un'applicazione $\phi \colon X \to Y$ lineare e biettiva tale che

$$\langle a, b\rangle_X = \langle \phi(a), \phi(b)\rangle_Y, \quad \forall a, b \in X. \tag{1}$$

Date: ultimo aggiornamento, 28 dicembre 2022.

Per via delle formule di polarizzazione, la condizione (1) equivale a richiedere che ϕ sia un'isometria che preserva le norme indotte dai prodotti scalari,

$$\|a\|_X = \|\phi(a)\|_Y\,, \quad \forall a \in X.$$

Due spazi di Hilbert isomorfi possiedono di fatto la stessa struttura, e tramite l'isomorfismo ϕ i punti di uno spazio possono essere identificati con i corrispondenti punti dell'altro spazio.

Se A e B sono due insiemi con la stessa cardinalità, a partire da una biezione tra A e B è facile costruire un isomorfismo tra gli spazi di Hilbert $\ell^2(A)$ e $\ell^2(B)$.

Se S è una base ortonormale per lo spazio di Hilbert H, il teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali visto nella lezione precedente ci dice che l'applicazione lineare Φ che ad un elemento x di H associa la famiglia dei *coefficienti di Fourier*

$$\Phi(x) := \big(\langle x, h\rangle\big)_{h\in S}$$

è un isomorfismo tra H e $\ell^2(S)$.

Dunque tutti gli spazi di Hilbert hanno una struttura del tipo $\ell^2(S)$ per qualche insieme S.

Osservazione 1.4. Attenzione! Dato un intervallo $[a,b]$ con $a < b$, lo spazio $\ell^2([a,b])$ del tipo che abbiamo considerato in questo paragrafo non è isometrico allo spazio $L^2([a,b])$ delle funzioni su $[a,b]$ di quadrato integrabile che abbiamo definito quando abbiamo parlato degli spazi L^p. Le basi del primo sono non numerabili in quanto ogni base ha la stessa cardinalità di $[a,b]$, mentre per il secondo mostriamo ora che esistono basi numerabili.

Consideriamo in $L^2([a,b])$ lo spazio $\mathcal{P}$ formato dalle funzioni polinomiali. Possiamo considerare $\mathcal{P}$ come il sottospazio generato dalla famiglia numerabile di funzioni monomiali

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots. \tag{2}$$

Tali monomi non formano un sistema ortonormale, ma tramite il procedimendo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt possiamo costruire una sequenza numerabile di polinomi ortonormali che generano tutto $\mathcal{P}$. Si ottiene una sequenza di polinomi che non sono altro che delle versioni traslate e riscalate dei polinomi di Legendre. Siccome, come vedremo nel seguente teorema, i polinomi formano un insieme denso in $L^2([a,b])$, sempre per il teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali risulta che tale sequenza costituisce una base numerabile per $L^2([a,b])$. Dunque $L^2([a,b])$ risulta essere isomorfo a ℓ^2.

Proposizione 1.5. *Lo spazio $\mathcal{P}$ delle funzioni polinomiali è denso in $L^2([a,b])$*

La seguente dimostrazione è interessante in quanto utilizza molti dei concetti che abbiamo visto nelle scorse lezioni a proposito degli spazi L^p e delle convoluzioni.

Dimostrazione. Per $\varepsilon > 0$ consideriamo la famiglia di funzioni gaussiane

$$\gamma_\varepsilon(x) := \pi^{-1/2}\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{-(x/\varepsilon)^2}.$$

Si tratta di funzioni integrabili riscalate in modo che

$$\gamma_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\gamma_1(x/\varepsilon), \qquad \int \gamma_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Per quanto visto a proposito delle approssimazioni dell'identità tramite convoluzioni, data una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$, abbiamo che la convoluzione $\gamma_\varepsilon * f$ converge alla funzione f in norma L^2 quando $\varepsilon \to 0^+$. Se utilizziamo l'espansione in serie di Taylor per la funzione esponenziale

$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$

troviamo che

$$\gamma_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\varepsilon^{2k+1} k!},$$

Tale serie di potenze converge totalmente su ogni compatto, in particolare converge uniformemente su tutti gli intervalli chiusi e limitati. Le somme parziali di questa serie sono i polinomi

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\varepsilon^{2k+1} k!}.$$

Per funzioni continue, la convergenza uniforme coincide con la convergenza in norma L^∞, e su un intervallo limitato implica anche la convergenza in norma L^1, in quanto la norma L^∞ domina la norma L^1. Sia ora f una funzione di $L^2([a,b])$, possiamo pensarla definita su tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(x) = 0$ quando $x \notin [a,b]$. La convoluzione $p_k * f$ definisce una funzione continua su $[a,b]$,

$$p_k * f(x) = \int_a^b f(y) p_k(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in [a,b]. \tag{3}$$

Quando $x, y \in [a,b]$ abbiamo che $x - y \in [a-b, b-a]$, e siccome p_k converge a γ_ε in norma L^1 su $[a-b, b-a]$ per $k \to \infty$, per le stime di Young abbiamo che $p_k * f$ converge a $\gamma_\varepsilon * f$ in norma L^2 su $[a,b]$ per $k \to \infty$, in quanto

$$\left\| p_k * f - \gamma_\varepsilon * f \right\|_{L^2([a,b])} \leqslant \left\| p_k - \gamma_\varepsilon \right\|_{L^1([a-b,b-a])} \left\| f \right\|_{L^2([a,b])}.$$

Per ogni $x \in [a,b]$ la convoluzione (3) si può scrivere come

$$p_k * f(x) = \langle f, q \rangle_{L^2([a,b])},$$

dove q è il polinomio $q(y) := p_k(x-y)$. Supponiamo ora che la funzione f sia ortogonale in $L^2([a,b])$ al sottospazio $\mathcal{P}$ formato dalle funzioni polinomiali, ciò significa che il prodotto scalare di f in $L^2([a,b])$ con un qualsiasi polinomio è sempre nullo, in particolare avremo che $p_k * f$ è la funzione nulla per ogni k. Siccome $p_k * f$ converge a $\gamma_\varepsilon * f$ in norma L^2 per $k \to \infty$, avremo anche che $\gamma_\varepsilon * f$ è la funzione nulla, e questo per ogni $\varepsilon > 0$. Nel limite per $\varepsilon \to 0^+$, abbiamo che $\gamma_\varepsilon * f$ converge a f in norma L^2 e dunque anche f risulta nulla. Ciò significa che l'ortogonale di $\mathcal{P}$ in $L^2([a,b])$ è il sottospazio nullo, e di conseguenza $\mathcal{P}$ è denso in $L^2([a,b])$. □

2. Esercizi

2.1. **Struttura ℓ^2 degli spazi di Hilbert.**

Esercizio 2.1. Dimostra tutte le affermazioni contenute nell'esempio 1.2.

Esercizio 2.2. Se A e B sono due insiemi con la stessa cardinalità, partendo da una biezione tra A e B costruisci un isomorfismo tra gli spazi di Hilbert $\ell^2(A)$ e $\ell^2(B)$.

Esercizio 2.3. Verifica che le funzioni monomiali (2) sono linearmente indipendenti in $L^2([a,b])$.

Esercizio 2.4. Costruisci un'isomorfismo tra $L^2(\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x)$ e $L^2([-1,1])$. *[Prova a cercarlo nella forma di una trasformazione che porta una funzione $f(x)$ nella funzione $F(t) := A(t) f(\psi(t))$ per opportune funzioni $A(t)$ e $\psi(t)$ da determinare e indipendenti da f.]* Spiega perché $L^2(\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x)$ possiede una base numerabile.