

**ANALISI 3 - L18:
BASI ORTONORMALI**

In uno spazio vettoriale V , una base algebrica (base di Hamel) è un sottoinsieme B formato da vettori *linearmente indipendenti* tali che ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare di un numero *finito* di elementi di B , ovvero

$$V = \text{span } B := \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k : n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{C}, b_k \in B, \forall k = 1, \dots, n \right\}.$$

Questo concetto di base utilizza solo le proprietà algebriche di spazio vettoriale. Ogni spazio vettoriale possiede (almeno) una base algebrica, e due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno sempre la stessa cardinalità.

In uno spazio vettoriale dotato di topologia, come ad esempio uno spazio normato, sotto opportune condizioni di convergenza, possiamo definire combinazioni lineari anche per una infinità numerabile di vettori. Tramite un'operazione di passaggio al limite sappiamo che possiamo dare senso alla somma di un'infinità numerabile di vettori. Tenendo conto di ciò possiamo modificare il concetto di base a quello di un insieme B di vettori linearmente indipendenti le cui combinazioni lineari finite *approssimino* ogni elemento dello spazio V ,

$$V = \overline{\text{span } B}.$$

Abbiamo inoltre visto nella lezione scorsa che negli spazi dotati di prodotto scalare la condizione di ortogonalità, che è più forte della lineare indipendenza, per gli elementi di una base permette di semplificare notevolmente il calcolo dei coefficienti tramite proiezioni ortogonali. È quindi desiderabile avere basi composte da vettori ortogonali, o ancora meglio ortonormali. Con basi ortonormali potremo decomporre ogni vettore come somma di componenti elementari; in spazi di dimensione infinite avremo allora a che fare con somme formate da infinite componenti, non necessariamente a priori numerabili. Ecco quindi la necessità di dare un senso alla somma di famiglie qualsiasi di vettori.

PREREQUISITI

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- Definizione di serie numerica *convergente* e di serie numerica *di Cauchy* [Analisi 1].

1. SOMME DI FAMIGLIE DI VETTORI

Siano A e B due qualsiasi insiemi. Data una funzione $f: A \rightarrow B$, indichiamo con $f_\alpha = f(\alpha)$ i valori della funzione al variare di $\alpha \in A$ e diremo che $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ è una *famiglia* di valori di B indicizzata su A . Ad esempio una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in B non è altro che una funzione da \mathbb{N} a B .

È possibile definire la somma di una famiglia infinita (eventualmente non numerabile) di vettori? Le uniche somme che sappiamo veramente calcolare algebricamente

sono le somme con un numero finito di termini, somme di infiniti termini possiamo ottenerle solo tramite operazioni di limite o di approssimazione. Per una successione numerica $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $z_n \in \mathbb{C}$, sappiamo che possiamo definire la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ tramite il limite, quando esiste, delle sue somme parziali,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k,$$

ovvero, abbiamo che $s_* = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| s_* - \sum_{k=1}^n z_k \right| < \varepsilon,$$

per ogni $n \geq N_\varepsilon$. Questa definizione di somma è strettamente collegata all'ordine con cui vengono considerati gli addendi; quando la serie non è assolutamente convergente, riarrangiando l'ordine dei termini è possibile ottenere differenti valori per la somma. Quando una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha valori reali non negativi, $x_n \geq 0$, il limite che definisce la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ esiste sempre (finito o infinito), non dipende dall'ordine con cui sono arrangiati i termini, e coincide con l'estremo superiore delle somme finite che si possono ottenere dai termini della successione,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} x_k : J \text{ è un sottoinsieme finito di } \mathbb{N} \right\}.$$

Possiamo fare la stessa cosa per definire la somma di una qualsiasi famiglia di termini non negativi.

Definizione 1.1 (Somme di famiglie di numeri reali non negativi). Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una famiglia di valori reali non negativi. Definiamo la *somma* di *tutti* i valori $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ come l'estremo superiore di tutte le possibili somme fatte con un numero finito di tali valori,

$$(1) \quad \sum_{\alpha \in A} x_\alpha := \sup \left\{ \sum_{\alpha \in J} x_\alpha : J \text{ è un sottoinsieme } \textit{finito} \text{ di } A \right\}.$$

Quando tale estremo superiore ha valore finito si dice che la somma è *convergente*, se invece ha valore infinito la somma si dice *divergente*.

Osservazione 1.2. Per inciso, osserviamo che, nel contesto della teoria astratta della misura, la somma definita in (1) non è altro che l'integrale della funzione x rispetto alla misura del contare \sharp su A ,

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \int_A x(\alpha) d\sharp_\alpha.$$

Per avere somme convergenti è necessario che non ci siano "troppi" termini non nulli da sommare. Di fatto, se si ignorano i termini nulli, ogni somma convergente di termini non negativi si può ricondurre ad una somma di una quantità al più numerabile di termini, dunque ad una somma finita o ad una serie.

Lemma 1.3. *Quando la somma a termini non negativi $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ è convergente allora l'insieme A_* , formato dagli indici $\alpha \in A$ per cui $x_\alpha > 0$, è al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $s_* := \sum_{\alpha \in A} x_\alpha < \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'insieme A_n formato dagli indici $\alpha \in A$ per cui $x_\alpha \geq \frac{1}{n}$. Supponiamo che $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ siano k indici distinti appartenenti a A_n , allora abbiamo

$$s_* \geq \sum_{j=1}^k x_{\alpha_j} \geq \frac{k}{n},$$

e dunque deve essere $k \leq ns_* < \infty$. Questo significa che l'insieme A_n ha cardinalità finita. Siccome $A_* = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ allora A_* ha cardinalità al più numerabile, essendo unione numerabile di insiemi finiti. \square

Diamo ora una definizione per dare senso a somme di famiglie di vettori in uno spazio normato che non dipenda da un particolare ordine tra gli addendi.

Definizione 1.4 (Somme incondizionatamente convergenti di famiglie di vettori). Sia $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ una famiglia di vettori in uno spazio normato. Diciamo che la somma $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$ di tutti i vettori $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge incondizionatamente al vettore v_* quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito $J_\varepsilon \subseteq A$ tale che per ogni sottoinsieme finito $J \subseteq A$ tale che $J_\varepsilon \subseteq J$ si ha

$$\left\| v_* - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| < \varepsilon.$$

Quando una famiglia di vettori possiede una somma incondizionatamente convergente il valore di tale somma è unico.

Possiamo generalizzare il criterio di convergenza di Cauchy per le serie anche al caso di somme di famiglie di vettori.

Definizione 1.5. Sia $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ una famiglia di vettori in uno spazio normato. Diciamo che la somma $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$ è incondizionatamente di Cauchy quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito $J_\varepsilon \subseteq A$ tale che per ogni sottoinsieme finito $K \subseteq A \setminus J_\varepsilon$ si ha

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} v_\alpha \right\| < \varepsilon.$$

Proposizione 1.6. In uno spazio normato ogni somma incondizionatamente convergente è incondizionatamente di Cauchy. In uno spazio di Banach ogni somma incondizionatamente di Cauchy è incondizionatamente convergente.

Dimostrazione. Supponiamo che la somma $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$ converga incondizionatamente al vettore v_* . Dato $\varepsilon > 0$, per la definizione di convergenza, esiste un insieme di indici finito J_ε tale che

$$\left\| v_* - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

per ogni insieme finito di indici J che contiene J_ε . Sia K un sottoinsieme finito di $A \setminus J_\varepsilon$, se consideriamo $J = J_\varepsilon \cup K$, per la disuguaglianza triangolare, abbiamo che

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} v_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha \in J} v_\alpha - \sum_{\alpha \in J_\varepsilon} v_\alpha \right\| \leq \left\| v_* - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| + \left\| v_* - \sum_{\alpha \in J_\varepsilon} v_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dunque la somma è incondizionatamente di Cauchy.

Viceversa, supponiamo che la somma sia incondizionatamente di Cauchy in uno spazio di Banach. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di indici J_n tale che

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} v_\alpha \right\| < \frac{1}{n},$$

per ogni insieme finito di indici K con $K \subseteq A \setminus J_n$. Sia $w_n := \sum_{\alpha \in J_n} v_\alpha$. Abbiamo che

$$\|w_m - w_n\| = \left\| \sum_{\alpha \in J_m \setminus J_n} v_\alpha - \sum_{\alpha \in J_n \setminus J_m} v_\alpha \right\| \leq \left\| \sum_{\alpha \in J_m \setminus J_n} v_\alpha \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in J_n \setminus J_m} v_\alpha \right\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Questo prova che $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, e quindi, per la completezza dello spazio di Banach, è una successione convergente. Mostriamo ora che il limite v_* a cui converge (w_n) è anche il valore della somma di tutta la famiglia

$(\mathbf{v}_\alpha)_{\alpha \in A}$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere n sufficientemente grande in modo da avere $n > 2/\varepsilon$ e $\|\mathbf{v}_* - \mathbf{w}_n\| < \varepsilon/2$. Per ogni insieme finito di indici J che contiene J_n , abbiamo che

$$\left\| \mathbf{v}_* - \sum_{\alpha \in J} \mathbf{v}_\alpha \right\| \leq \|\mathbf{v}_* - \mathbf{w}_n\| + \left\| \sum_{\alpha \in J \setminus J_n} \mathbf{v}_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

□

Definizione 1.7 (Somme assolutamente convergenti di famiglie di vettori). Sia $(\mathbf{v}_\alpha)_{\alpha \in A}$ una famiglia di vettori in uno spazio di normato. Diciamo che la *somma* $\sum_{\alpha \in A} \mathbf{v}_\alpha$ *converge assolutamente* quando la somma a termini negativi $\sum_{\alpha \in A} \|\mathbf{v}_\alpha\|$ converge a un valore finito.

Proposizione 1.8. *Ogni somma assolutamente convergente è una somma incondizionatamente di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $s_* := \sum_{\alpha \in A} \|\mathbf{v}_\alpha\| < \infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà un insieme finito di indici J_ε tale che

$$s_* - \varepsilon < \sum_{\alpha \in J_\varepsilon} \|\mathbf{v}_\alpha\|.$$

Per ogni insieme finito di indici K contenuto in $A \setminus J_\varepsilon$, abbiamo

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} \mathbf{v}_\alpha \right\| \leq \sum_{\alpha \in K} \|\mathbf{v}_\alpha\| = \left(\sum_{\alpha \in K \cup J_\varepsilon} \|\mathbf{v}_\alpha\| \right) - \left(\sum_{\alpha \in J_\varepsilon} \|\mathbf{v}_\alpha\| \right) < s_* - (s_* - \varepsilon) = \varepsilon.$$

□

Segue dalle proposizioni 1.6 e 1.8 che ogni somma assolutamente convergente in uno spazio di Banach è incondizionatamente convergente.

Per somme di valori scalari è vero anche il viceversa, somme incondizionatamente convergenti di numeri complessi sono anche assolutamente convergenti. In uno spazio di Banach di dimensione infinita invece possono esistere somme incondizionatamente convergenti ma non assolutamente convergenti, ad esempio si consideri la successione $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di successioni $\mathbf{v}_n := \frac{1}{n} \mathbf{e}_n$ in ℓ^2 , dove \mathbf{e}_n è la successione canonica con tutte le coordinate nulle tranne l' n -esima uguale a 1, abbiamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{v}_n = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbf{v}_n\|_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Anche per le somme incondizionatamente convergenti non si possono avere “trop-pi” termini non nulli da sommare, e quindi ci si può sempre ricondurre al caso numerabile.

Lemma 1.9. *Sia $(\mathbf{v}_\alpha)_{\alpha \in A}$ una famiglia di vettori in uno spazio di normato. Quando la somma $\sum_{\alpha \in A} \mathbf{v}_\alpha$ è incondizionatamente convergente allora l'insieme A_* , formato dagli indici $\alpha \in A$ per cui $\mathbf{v}_\alpha \neq 0$, è al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}_* := \sum_{\alpha \in A} \mathbf{v}_\alpha$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'insieme A_n formato dagli indici $\alpha \in A$ per cui $\|\mathbf{v}_\alpha\| \geq \frac{1}{n}$. Sappiamo che esiste un sottoinsieme finito $J_n \subseteq A$ tale che per ogni sottoinsieme finito J contenente J_n si ha

$$\left\| \mathbf{v}_* - \sum_{\alpha \in J} \mathbf{v}_\alpha \right\| < \frac{1}{2n}.$$

Per ogni $\beta \notin J_n$, per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\|\mathbf{v}_\beta\| = \left\| \sum_{\alpha \in J_n \cup \{\beta\}} \mathbf{v}_\alpha - \sum_{\alpha \in J_n} \mathbf{v}_\alpha \right\| \leq \left\| \mathbf{v}_* - \sum_{\alpha \in J_n \cup \{\beta\}} \mathbf{v}_\alpha \right\| + \left\| \mathbf{v}_* - \sum_{\alpha \in J_n} \mathbf{v}_\alpha \right\| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

e dunque $\beta \notin A_n$. Ne segue che $A_n \subseteq J_n$ e dunque A_n ha cardinalità finita. Siccome $A_\star = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ allora A_\star ha cardinalità al più numerabile, essendo unione numerabile di insiemi finiti. \square

Osservazione 1.10. Ripetendo ragionamenti analoghi a quelli fatti nella dimostrazione della proposizione 1.6 si ottiene che per ogni somma incondizionatamente convergente $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$ esiste una successione insiemi finiti di indici $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che la successione delle somme parziali (finite) corrispondenti ai J_n converge alla somma totale

$$(2) \quad \sum_{\alpha \in A} v_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in J_n} v_\alpha.$$

Nel caso di somme incondizionatamente convergenti di vettori in uno spazio prehilbertiano, utilizzando il fatto che esse sono limiti di successioni di somme finite, per la continuità del prodotto interno, abbiamo che

$$(3) \quad \left\langle \sum_{\alpha \in A} v_\alpha, \sum_{\beta \in B} w_\beta \right\rangle = \sum_{(\alpha, \beta) \in A \times B} \langle v_\alpha, w_\beta \rangle.$$

2. SISTEMI ORTONORMALI COMPLETI

Nel caso di famiglie di vettori ortogonali in uno spazio di Hilbert possiamo dare una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza incondizionata della loro somma.

Lemma 2.1. *Sia $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$ una famiglia di vettori a due a due ortogonali in uno spazio di Hilbert H . Allora la somma $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha$ converge incondizionatamente se e solo se $\sum_{\alpha \in A} \|h_\alpha\|^2 < \infty$, e in tal caso abbiamo*

$$(4) \quad \left\| \sum_{\alpha \in A} h_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha \in A} \|h_\alpha\|^2.$$

Dimostrazione. Sia J un insieme finito di indici. Per l'ipotesi di ortogonalità e per il teorema di Pitagora,

$$\left\| \sum_{\alpha \in J} h_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha \in J} \|h_\alpha\|^2.$$

Da queste identità segue che la condizione che la somma di vettori $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha$ sia incondizionatamente di Cauchy in H coincide con la condizione che la somma di numeri non negativi $\sum_{\alpha \in A} \|h_\alpha\|^2$ sia incondizionatamente di Cauchy in \mathbb{R} . Dunque una converge incondizionatamente se e solo se l'altra converge incondizionatamente. L'identità (4) segue approssimando le somme con limiti di successioni di somme finite come in (2) e utilizzando la continuità della norma. \square

I risultati che abbiamo ricavato nelle precedenti lezioni per sistemi ortonormali finiti e proiezioni ortogonali su sottospazi di dimensione finita possono ora essere estesi al caso generale.

Teorema 2.2 (Disuguaglianza di Bessel, caso generale). *Sia S un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert H (ovvero per ogni $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in S$ abbiamo $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle = 0$ se $\mathbf{h}' \neq \mathbf{h}$ e $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle = 1$ se $\mathbf{h}' = \mathbf{h}$). Sia V il più piccolo sottospazio chiuso che contiene S , ovvero $V = \overline{\text{span } S}$. Allora per ogni $\mathbf{x} \in H$ abbiamo che :*

(i) *vale la disuguaglianza di Bessel*

$$(5) \quad \sum_{\mathbf{h} \in S} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2;$$

(ii) *tutti i prodotti $\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle$ sono nulli tranne che per una quantità al più numerabile di elementi $\mathbf{h} \in S$.*

- (iii) la somma $\sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h}$ converge incondizionatamente alla proiezione ortogonale $P_V(\mathbf{x})$.

Dimostrazione. La disuguaglianza (5) segue dalla sua versione per sistemi ortonormali finiti che abbiamo ottenuto nella lezione scorsa: se $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ sono n vettori distinti di S allora

$$\sum_{k=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{h}_k \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

L'affermazione (ii) segue dalla disuguaglianza di Bessel (5) per via del lemma 1.3. Dimostriamo ora (iii). Il fatto che la somma $\sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h}$ converga incondizionatamente segue anch'esso dalla disuguaglianza di Bessel (5) per via del lemma 2.1 osservando che $(\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h})_{\mathbf{h} \in S}$ è una famiglia di vettori a due a due ortogonali e che $\|\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h}\| = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle|$. Sia $\mathbf{p} = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h}$, essendo \mathbf{p} uguale a un limite di combinazioni lineari di elementi di S abbiamo che $\mathbf{p} \in V$. Per ogni $\mathbf{h}' \in S$, per la continuità del prodotto interno e per l'ortonormalità di S , abbiamo

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{h}' \rangle = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{h}' \rangle.$$

Dunque $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{h}' \rangle = 0$ per ogni $\mathbf{h}' \in S$. ovvero $\mathbf{x} - \mathbf{p} \in S^\perp = V^\perp$. Quindi per la proprietà caratteristica delle proiezioni ortogonali abbiamo che $\mathbf{p} = P_V(\mathbf{x})$ è la proiezione ortogonale di \mathbf{x} su V . \square

Abbiamo così ottenuto una formula generale per calcolare la proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso V di uno spazio di Hilbert: se S è un sistema ortonormale che genera un sottospazio denso in V allora la proiezione ortogonale su V è data da

$$(6) \quad P_V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h}.$$

Nel caso in cui $V = \overline{\text{span } S}$ non coincida con tutto lo spazio di Hilbert H , allora esiste un vettore non nullo $\mathbf{x} \in H \setminus V$. Per il punto (iii) il vettore $\mathbf{w} := \mathbf{x} - P_V(\mathbf{x})$ è ortogonale a V e non è nullo, normalizzandolo otteniamo un vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$ di norma 1 e ortogonale ai vettori di S . L'insieme $S' = S \cup \{\mathbf{u}\}$ è quindi ancora un sistema ortonormale che contiene propriamente S .

Teorema 2.3. *Sia S un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert H . Le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:*

- (a) S è massimale rispetto all'inclusione tra i sistemi ortonormali in H ;
- (b) $S^\perp = \{\mathbf{0}\}$;
- (c) $\text{span}(S)$ è denso in H ;
- (d) (serie di Fourier astratta) per ogni $\mathbf{x} \in H$ abbiamo

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h};$$

- (e) (identità di Parseval) per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ abbiamo

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{h} \rangle};$$

- (f) (identità di Plancherel) Per ogni $\mathbf{x} \in H$ abbiamo

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{\mathbf{h} \in S} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle|^2.$$

Dimostrazione. Vediamo che (a) implica (b). Se S è massimale non esistono vettori unitari ortogonali a S e quindi S^\perp non può contenere vettori non nulli.

Vediamo che (b) implica (c). Siccome sappiamo che vale la decomposizione ortogonale $H = \overline{\text{span}(S)} \oplus S^\perp$, se S^\perp contiene solo il vettore nullo allora deve essere $\overline{\text{span}(S)} = H$.

Vediamo che (c) implica (d). Se $\overline{\text{span} S} = H$, la formula (6) per le proiezioni ortogonali ci dice che

$$\mathbf{x} = P_H(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{x} \in H.$$

Vediamo che (d) implica (e). Applichiamo la formula (3) alle somme

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \mathbf{h}, \quad \mathbf{y} = \sum_{\mathbf{h}' \in S} \langle \mathbf{y}, \mathbf{h}' \rangle \mathbf{h}'$$

e otteniamo

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{h}' \rangle \langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle = \sum_{\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{h}' \rangle} \langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle = \sum_{\mathbf{h} \in S} \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{h} \rangle}.$$

Si vede immediatamente che (e) implica (f) prendendo $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Vediamo che (f) implica (a). Se \mathbf{x} è un vettore ortogonale ad S allora $\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = 0$ per ogni $\mathbf{h} \in S$ e quindi (f) implica che $\|\mathbf{x}\| = 0$ e dunque $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Non essendoci vettori non nulli ortogonali ad S ne segue che S è massimale tra i sistemi ortonormali. \square

Definizione 2.4. Un sistema ortonormale S che soddisfa le condizioni (tra loro equivalenti) descritte nel teorema 2.3 si dice *base ortonormale*, o anche *sistema ortonormale completo*, per lo spazio di Hilbert H .

Teorema 2.5. *Ogni spazio di Hilbert possiede una base ortonormale.*

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia Ω di tutti i sistemi ortonormali di H (parzialmente) ordinata rispetto alla relazione di inclusione. Se $\tilde{\Omega}$ è un sottoinsieme di Ω totalmente ordinato allora $\tilde{S} := \cup_{S \in \tilde{\Omega}} S$ è ancora un elemento di Ω maggiorante di $\tilde{\Omega}$. Per il lemma di Zorn esiste quindi un elemento massimale in Ω , ovvero una base ortonormale di H . \square

3. ESERCIZI

3.1. Somme di famiglie di vettori.

Esercizio 3.1. Dimostra che quando una famiglia di vettori possiede una somma incondizionatamente convergente il valore di tale somma è unico.

Esercizio 3.2. Dimostra che quando una somma a termini non negativi converge ad un valore finito allora tale somma è anche incondizionatamente convergente.

Esercizio 3.3. Dimostra che per una somma incondizionatamente convergente vale la disuguaglianza

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} v_\alpha \right\| \leq \sum_{\alpha \in A} \|v_\alpha\|.$$

Esercizio 3.4. Dimostra la validità di quanto affermato nell'osservazione 1.10.

3.2. Sistemi ortonormali completi.

Esercizio 3.5 (Base di Haar). Per ogni coppia di interi non negativi (n, k) con $0 \leq k \leq 2^n - 1$ considera i seguenti intervalli,

$$I_{n,k} := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right], \quad A_{n,k} := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \right], \quad B_{n,k} := \left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right],$$

e considera le seguenti funzioni,

$$\varphi_{n,k} := \chi_{I_{n,k}}, \quad h_{n,k} := 2^{n/2} (\chi_{A_{n,k}} - \chi_{B_{n,k}}).$$

- Verifica che la famiglia

$$S := \{\varphi_{0,0}\} \cup \{h_{n,k} : 0 \leq k \leq 2^n - 1, n \geq 0\}$$

è un sistema ortonormale in $L^2([0, 1])$.

- Per ogni $m \in \mathbb{N}$ siano

$$S_m := \{\varphi_{0,0}\} \cup \{h_{n,k} : 0 \leq k \leq 2^n - 1, 0 \leq n \leq m - 1\},$$

$$T_m := \{\varphi_{m,k} : 0 \leq k \leq 2^m\}.$$

Verifica che $\text{span } S_m = \text{span } T_m$.

- Dimostra che se una funzione continua definita su $[0, 1]$ è ortogonale in $L^2([0, 1])$ a tutte le funzioni $\varphi_{n,k}$ allora è nulla quasi ovunque.
- Verifica che il sistema ortonormale S è una base ortonormale per $L^2([0, 1])$.