

**ANALISI 3 - L15:
PRODOTTO SCALARE**

Sappiamo che il prodotto scalare di due vettori di \mathbb{R}^d , definito da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{k=1}^d x_k y_k, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d,$$

determina la struttura euclidea dello spazio vettoriale; infatti tramite il prodotto scalare è possibile misurare le lunghezze dei vettori, le distanze tra punti e gli angoli formati da due vettori: se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ sono due vettori non nulli e θ è l'angolo formato dai due vettori abbiamo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}, \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Inoltre, tramite il prodotto scalare è possibile definire la nozione di ortogonalità,

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Possiamo dire che è grazie al prodotto scalare e alle sue proprietà che è possibile “fare della geometria” su \mathbb{R}^d . Vogliamo analizziamo in astratto quali sono le proprietà fondamentali di questo prodotto per poterle poi utilizzare per studiare la geometria anche di altri spazi vettoriali.

PREREQUISITI

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- Struttura euclidea dello spazio vettoriale \mathbb{R}^d [Geometria 1, Analisi 2];
- Significato geometrico del segno del *discriminante* di un'equazione di secondo grado [Algebra, Analisi 1];
- Successioni minimizzanti che convergono all'estremo inferiore di un sottoinsieme di numeri reali [Analisi 1].

1. PRODOTTI INTERNI

Definizione 1.1. Sia E uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Un *prodotto interno*, detto anche *prodotto scalare*, su E è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti condizioni per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

- (i) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \overline{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}$;
- (ii) $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$;
- (iii) $\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$;
- (iv) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$;
- (v) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Lo spazio E dotato di un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si dice *pre-hilbertiano*.

Osservazione 1.2. Le condizioni (ii), (iii) ci dicono che rispetto al primo argomento il prodotto interno è lineare, mentre combinate con (i) implicano che rispetto al secondo argomento è antilineare, ovvero

Date: ultimo aggiornamento, 28 dicembre 2022.

- (ii') $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle;$
 (iii') $\langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$

Osservazione 1.3. Le condizioni (i), (ii) e (iii) dicono che il prodotto interno è una forma hermitiana su E , la (iv) dice che tale forma è (semi)definita positiva, la (v) dice che è non degenera.

Osservazione 1.4. Anche nel caso di spazi vettoriali su \mathbb{R} , possiamo dare la nozione di prodotto interno nello stesso modo, con l'unica differenza che il prodotto interno avrà valori reali e la condizione (i) si semplifica in

$$(i') \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle;$$

ovvero $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è una forma *simmetrica*, positiva non degenera.

Esempio 1.5. Diamo alcuni esempi di prodotti interni:

- sullo spazio di dimensione finita \mathbb{C}^d abbiamo il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{C}^d} := \sum_{k=1}^d z_k \bar{w}_k, \quad \mathbf{z} = (z_k)_{k=1, \dots, d}, \mathbf{w} = (w_k)_{k=1, \dots, d} \in \mathbb{C}^d;$$

- sullo spazio di dimensione infinita ℓ^2 abbiamo il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \bar{w}_k, \quad \mathbf{z} = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}, \mathbf{w} = (w_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2;$$

- sullo spazio di funzioni $L^2(\Omega)$ abbiamo il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} f(x) \bar{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

La verifica delle proprietà di prodotto interno in questi casi è abbastanza semplice e la lasciamo come esercizio al lettore.

Una delle proprietà fondamentale di ogni prodotto interno è quella di verificare la cosiddetta disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Teorema 1.6 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto che verifica le ipotesi (i), (ii), (iii) e (iv) della definizione 1.1, allora per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ si ha*

$$(1) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

Dimostrazione. Poniamo $A := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, $b := \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $B = |b|$, $C = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$. Se $B = 0$ la disuguaglianza (1) è triviale. Se $B \neq 0$ allora poniamo $\lambda := tb/B$, con $t \in \mathbb{R}$. Usando il fatto che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è una forma hermitiana (semi)definita positiva abbiamo che

$$0 \leq \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \\ = A + \lambda \bar{b} + \bar{\lambda} b + |\lambda|^2 C.$$

Osserviamo che $\lambda \bar{b} = \bar{\lambda} b = tB$ e $|\lambda|^2 = t^2$. Otteniamo che $A + 2Bt + Ct^2 \geq 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il discriminante del polinomio di secondo grado deve essere non positivo, ovvero $B^2 - AC \leq 0$, il che equivale proprio a (1). \square

La nozione di prodotto interno generalizza il concetto di prodotto scalare per gli spazi euclidei. Analogamente al caso di dimensione finita, con il prodotto interno possiamo definire una norma ponendo

$$(2) \quad \|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Infatti vale la disuguaglianza triangolare.

Proposizione 1.7. Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ si ha

$$(3) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Dimostrazione. Usando la definizione della norma e le proprietà di linearità del prodotto interno,

$$(4) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (1) abbiamo

$$\operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Dunque

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

da cui segue (3). □

Si verifica poi facilmente che la norma (2) soddisfa anche tutte le altre proprietà richieste ad una norma. Abbiamo così che ogni spazio pre-hilbertiano è dunque in modo naturale anche uno spazio normato grazie alla norma indotta dal prodotto interno.

Definizione 1.8. Chiamiamo *spazio di Hilbert* ogni uno spazio vettoriale dotato di un prodotto interno e che sia **completo** rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

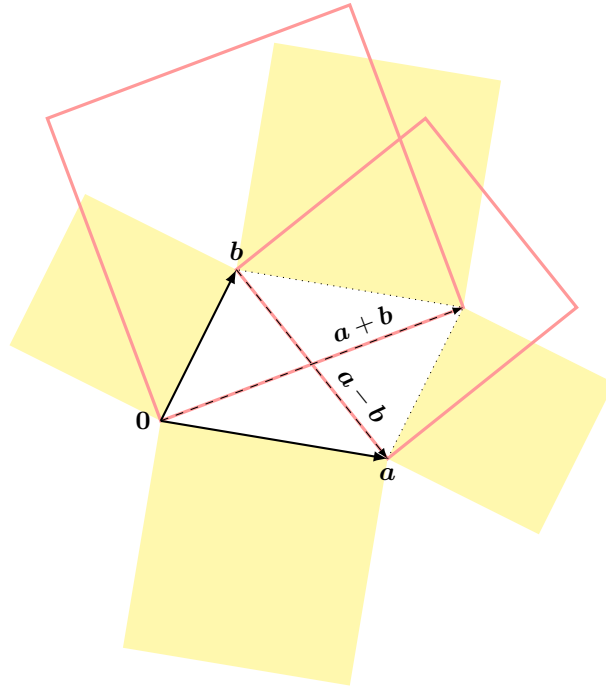
Gli spazi di Hilbert sono dunque casi particolari di spazi di Banach. Ad esempio \mathbb{R}^d e \mathbb{C}^d con le norme euclidee sono spazi di Hilbert di dimensione finita. Mentre ℓ^2 e $L^2(\Omega)$ sono esempi di spazi di Hilbert di dimensione infinita.

2. IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA

Proposizione 2.1 (Identità del parallelogramma). *In uno spazio pre-hilbertiano, dotato della norma indotta dal prodotto interno, per ogni coppia di vettori \mathbf{a}, \mathbf{b} si ha*

$$(5) \quad \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2.$$

Quello che ci dice l'identità (5) è che in un parallelogramma la somma delle aree dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma delle aree dei quadrati dei quattro lati.



Dimostrazione. Ripetendo i conti fatti in (4) abbiamo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{b}\|^2, \\ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{b}\|^2.\end{aligned}$$

Sommando le due righe si ottiene l'identità cercata. \square

L'identità del parallelogramma è la cartina di tornasole per verificare se in uno spazio normato la norma è compatibile con un prodotto interno, ovvero se la struttura metrica dello spazio è di tipo euclideo.

Esempio 2.2. Consideriamo gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ al variare di $p \in [1, \infty]$. È possibile dotarli di un prodotto interno la cui corrispondente norma coincida con la norma L^p ? Proviamo a testare la validità dell'identità del parallelogramma. Siano $f = \chi_{[0,1]}$ e $g = \chi_{[1,2]}$, Abbiamo $|f + g| = |f - g| = \chi_{[0,2]}$ e dunque

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1, \quad \|f + g\|_p = \|f - g\|_p = 2^{1/p}.$$

Se vale l'identità allora deve essere $(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2$, ovvero $2 \cdot 2^{2/p} = 4$, che implica $p = 2$. Questo significa che quando $p \neq 2$ lo spazio L^p non è prehilbertiano. Nel caso $p = 2$ invece abbiamo una struttura euclidea, in quanto la norma L^2 è la norma indotta dal prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$.

Osservazione 2.3. Nel caso di uno spazio pre-hilbertiano reale abbiamo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2, \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

e se invece di sommare facciamo la differenza otteniamo

$$(6) \quad 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Tale formula, detta di *polarizzazione*, ci permette di esprimere il prodotto interno usando solo la norma.

Osservazione 2.4. Nel caso di uno spazio pre-hilbertiano complesso abbiamo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2, \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2, \\ \|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Im}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2, \\ \|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\operatorname{Im}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

Combinando insieme queste identità otteniamo la formula di polarizzazione nel caso complesso data da

$$(7) \quad 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2.$$

L'identità del parallelogramma caratterizza gli spazi normati che possiedono una struttura pre-hilbertiana.

Teorema 2.5 (Jordan - Von Neumann). *Se su uno spazio normato vale l'identità del parallelogramma (5), allora le formule (6), nel caso reale, e (7), nel caso complesso, definiscono un prodotto interno compatibile con la norma.*

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso di uno spazio normato reale (il caso complesso si ottiene in modo analogo e lasciamo i dettagli come esercizio per il lettore).

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale, usiamo la formula (6) per definire un'operazione da $V \times V$ a valori in \mathbb{R} ponendo

$$(8) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = \frac{1}{4} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

La proprietà di simmetria, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_V$, segue dal fatto che $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ hanno la stessa norma. Anche la proprietà di positività è immediata

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_V = \frac{1}{4} \|2\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{0}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0,$$

ed inoltre se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_V = 0$ allora $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$ e dunque $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ricavare le proprietà di linearità invece non è immediato; il motivo della difficoltà sta nel fatto che la definizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ è basata su una combinazione di quantità quadratiche e non lineari, sarà l'identità del parallelogramma l'ingrediente chiave che ci permetterà di recuperare la linearità. Cominciamo con l'osservare che, grazie all'identità del parallelogramma,

$$\begin{aligned}\langle 2\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V &= \frac{1}{4} \|\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{x} + (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left(2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \right) - \frac{1}{4} \left(2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V.\end{aligned}$$

Grazie a questa nuova identità otteniamo

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, 4\mathbf{z} \rangle_V &= 2\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, 2\mathbf{z} \rangle_V = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} + \mathbf{y} + 2\mathbf{z}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{x} + \mathbf{y} - 2\mathbf{z}\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \|(\mathbf{x} + \mathbf{z}) + (\mathbf{y} + \mathbf{z})\|^2 - \frac{1}{2} \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})\|^2 = \\ &= \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{y} + \mathbf{z}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right) - \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right) = \\ &= \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \right) + \left(\|\mathbf{y} + \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^2 \right) = \\ &= 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_V + 4\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_V = 2\langle \mathbf{x}, 2\mathbf{z} \rangle_V + 2\langle \mathbf{y}, 2\mathbf{z} \rangle_V = \langle \mathbf{x}, 4\mathbf{z} \rangle_V + \langle \mathbf{y}, 4\mathbf{z} \rangle_V.\end{aligned}$$

Sostituendo $\mathbf{z}/4$ a \mathbf{z} otteniamo che

$$(9) \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_V = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_V + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_V.$$

Grazie a quest'ultima proprietà, per induzione si dimostra che $\langle n\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = n\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sostituendo \mathbf{x}/n a \mathbf{x} otteniamo anche $\langle \frac{1}{n}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = \frac{1}{n}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V$. Inoltre, siccome dalla definizione (8) abbiamo che $\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle = 0$, da (9) segue anche che

$$0 = \langle (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle -\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

e dunque $\langle (-1)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = (-1)\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V$. Combinando tutte queste cose ricaviamo che

$$\langle \frac{k}{n}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = \frac{k}{n}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V$$

per ogni numero razionale $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. Per passare a coefficienti reali, osserviamo che, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, la funzione $\lambda \mapsto \|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ è sempre una funzione continua da \mathbb{R} in \mathbb{R} , infatti

$$\begin{aligned} \left| \|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mu\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \right| &= \left(\|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\| + \|\mu\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \right) \left| \|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\| - \|\mu\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \right| \leq \\ &\leq \left((|\lambda| + |\mu|) \|\mathbf{x}\| + 2\|\mathbf{y}\| \right) |\lambda - \mu| \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Ne segue che anche la funzione $\lambda \mapsto \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V$ è continua e quindi l'identità

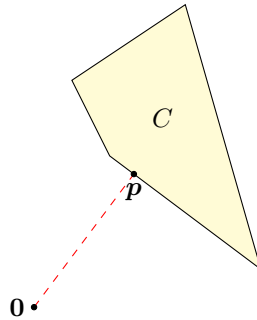
$$\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V$$

che abbiamo dimostrato valere su \mathbb{Q} si estende per continuità a tutto \mathbb{R} . \square

3. TEOREMA DEL PUNTO DI MINIMA DISTANZA

Teorema 3.1. *Sia C un sottoinsieme non vuoto, convesso, topologicamente completo di uno spazio di pre-hilbertiano. Esiste un unico elemento $\mathbf{p} \in C$ con norma minima, ovvero tale che*

$$\|\mathbf{p}\| = \text{dist}(C, \mathbf{0}) := \inf_{\mathbf{x} \in C} \|\mathbf{x}\|.$$



Dimostrazione. Sia $d := \text{dist}(C, \mathbf{0})$. Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ per la convessità anche $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2 \in C$, e per l'identità del parallelogramma abbiamo

$$(10) \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 - 4\left\| \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \right\|^2 \leq 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 - 4d^2.$$

In particolare, ciò garantisce l'unicità del punto con norma minima: infatti se $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = d$ allora dalla (10) segue che $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$. Inoltre, per la definizione di estremo inferiore esiste una successione $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di punti di C tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\| = d$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|\mathbf{x}_n\|^2 < d^2 + \varepsilon^2/4$$

per ogni $n \geq N$. Applichiamo (10) con $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_m$ e con $n, m \geq N$ e otteniamo

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|^2 \leq 2\|\mathbf{x}_n\|^2 + 2\|\mathbf{x}_m\|^2 - 4d^2 < \varepsilon^2.$$

Ne segue che la successione $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e dunque, per la completezza di C , è convergente ad un punto $\mathbf{p} := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \in C$. Per la continuità della norma abbiamo che $\|\mathbf{p}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\| = d$. \square

Osservazione 3.2. Senza l'ipotesi di convessità su C non è garantita né unicità né esistenza del punto di minima norma. Consideriamo ad esempio l'insieme $\{\mathbf{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ in ℓ^2 formato dalle successioni $\mathbf{e}_n = (e_{n,k})$ dove $e_{n,k} = 0$ se $k \neq n$ e $e_{n,n} = 1$; essendo formato da tutti punti isolati, si tratta di un insieme chiuso e completo, e siccome tutti i suoi punti stanno sulla sfera unitaria ogni suo punto è punto di minima norma. Invece, l'insieme $\{(1 + 1/n)\mathbf{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ è anch'esso chiuso e completo in ℓ^2 , ma non possiede alcun punto di minima norma.

Osservazione 3.3. Le ipotesi di convessità e completezza del sottoinsieme C richieste dal teorema 3.1 sono garantite ad esempio nel caso in cui C sia un sottospazio di dimensione finita, oppure nel caso in cui C sia un convesso compatto.

In uno spazio metrico completo ogni sottoinsieme chiuso è automaticamente completo. Questo ci permette di riformulare il teorema 3.1 nel caso di spazi di Hilbert nel seguente modo

Teorema 3.4. *Se C è un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di uno spazio di Hilbert allora esiste un unico elemento $\mathbf{p} \in C$ con norma minima, ovvero tale che*

$$\|\mathbf{p}\| = \text{dist}(C, \mathbf{0}) := \inf_{\mathbf{x} \in C} \|\mathbf{x}\|.$$

Operando una semplice traslazione il teorema 3.4 ci garantisce l'esistenza e unicità del punto di minima distanza di un convesso chiuso rispetto ad un qualsiasi punto dello spazio di Hilbert.

Proposizione 3.5. *Sia H uno spazio di Hilbert. Sia C è un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di H e sia \mathbf{q} un punto di H . Allora esiste un unico elemento $\mathbf{p} \in C$ con distanza minima da \mathbf{q} , ovvero tale che*

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \text{dist}(C, \mathbf{q}) := \inf_{\mathbf{x} \in C} \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|.$$

4. ESERCIZI

4.1. Prodotti interni.

Esercizio 4.1. Verifica che i prodotti scalari definiti nell'esempio 1.5 sono effettivamente dei prodotti interni sui relativi spazi.

Esercizio 4.2. Sia $M = (m_{jk})$ una matrice $d \times d$ a valori reali. Determina sotto quali condizioni su M si ha che

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{j,k=1,\dots,n} m_{jk} x_j y_k = \mathbf{x}^t M \mathbf{y}$$

definisce un prodotto interno su \mathbb{R}^d .

Esercizio 4.3. Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{R} e siano \mathbf{e}^k , con $k = 1, \dots, d$, i vettori di una sua base. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto interno su E . Verifica che allora si ha

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j,k=1}^d m_{jk} x_j y_k,$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, dove $m_{jk} := \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k \rangle$, $x_j := \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}^j \rangle$, $y_k := \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}^k \rangle$. Verifica inoltre che la matrice $M = (m_{jk})$ è simmetrica e definita positiva.

Esercizio 4.4. Verifica che se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto interno allora si ha uguaglianza in (1) se e solo se \mathbf{x} e \mathbf{y} sono linearmente dipendenti.

Esercizio 4.5. Verifica che la norma definita in (2) possiede effettivamente tutte le caratteristiche per essere una norma.

Esercizio 4.6 (Continuità del prodotto interno). Sia E uno spazio pre-hilbertiano normato con la norma indotta dal prodotto interno. Dimostra che $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ è una applicazione continua da $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ facendo vedere che se $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ e $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$ in E allora $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ in \mathbb{C} .

Esercizio 4.7. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tre punti di uno spazio pre-hilbertiano. Dimostra che vale la disuguaglianza

$$\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| + \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

(Suggerimento: applica la disuguaglianza triangolare ai valori di $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$ definita per $\mathbf{x} \neq 0$, e prova a semplificare l'espressione $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2$.) In quali casi si ha uguaglianza?

Esercizio 4.8. Sia $X := \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = 0\}$. Verifica che

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f'(t) \overline{g'(t)} dt$$

definisce un prodotto interno su X . Fai vedere che X con tale prodotto interno non è uno spazio di Hilbert, ovvero che non è completo rispetto alla norma

$$\|f\|_X := \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Usando le proprietà di continuità del prodotto interno possiamo completare ogni spazio pre-hilbertiano rispetto alla norma indotta dal prodotto interno ottenendo uno spazio di Hilbert.

Esercizio 4.9. Sia $(H, \|\cdot\|_H)$ uno spazio di Banach e sia E un suo sottospazio denso dotato di un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ compatibile con la norma, nel senso che $\|\mathbf{x}\|_H^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_E$, per ogni $\mathbf{x} \in E$. Dimostra che ponendo

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_H := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle_E,$$

dove $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di punti di E convergente a \mathbf{x} e $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di punti di E convergente a \mathbf{y} , si definisce su H un prodotto interno che lo rende uno spazio di Hilbert.

Esercizio 4.10. Considera lo spazio di funzioni

$$H := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ misurabile, } xf(x) \in L^2(0, 1)\},$$

dotato della norma $\|f\|_H := \left(\int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

- Fai un esempio esplicito di una funzione $f \in H \setminus L^2$.
- Definisci su H un prodotto interno compatibile con la sua norma e verifica che H è uno spazio di Hilbert.
- Considera l'operatore lineare $J : L^2 \rightarrow H$ definito da $J(f) = f$; mostra che J è continuo e calcola la sua norma operatoriale.

Esercizio 4.11. Considera lo spazio c delle successioni convergenti (ovvero che possiedono limite finito). Dimostra che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle_c: c \times c \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$(11) \quad \langle x, y \rangle_c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n \overline{y_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{y_n}, \quad \forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c,$$

definisce un prodotto scalare su c .

Esercizio 4.12. Sia \mathcal{P} lo spazio dei polinomi in una variabile reale a coefficienti reali. Per ogni intero non negativo k , sia $D^k: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ l'operatore che alla funzione f associa la sua derivata k -esima,

$$D^0[f] = f, D^1[f] = f', D^2[f] = f'', \dots, D^k[f] = f^{(k)}, \dots$$

Ad ogni polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$ possiamo associare l'operatore $p(D): \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ definito da

$$p(D)[f] := \sum_{k=0}^d a_k D^k[f].$$

- Calcola il valore di $p(D)[q](1)$ nel caso in cui

$$p(x) = 2 + 3x + 4x^2, \quad q(x) = 5 + 6x + 7x^2.$$

- Dato $x_* \in \mathbb{R}$, verifica che l'applicazione che alla coppia $(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ associa il valore scalare

$$\langle p, q \rangle_{x_*} := p(D)[q](x_*)$$

è un prodotto scalare se e solo se $x_* = 0$.

- Lo spazio pre-Hilbertiano $(\mathcal{P}, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ è uno spazio di Hilbert?

4.2. Identità del parallelogramma.

Esercizio 4.13. Dimostra che le norme di ℓ^p sono indotte da un prodotto interno se e solo se $p = 2$.

Esercizio 4.14. Verifica che nel caso di uno spazio pre-Hilbertiano reale vale anche la formula di polarizzazione data da

$$2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2.$$

Esercizio 4.15. Dimostra il teorema 2.5 nel caso di uno spazio normato complesso.

Definizione 4.16. Uno spazio normato V si dice *uniformemente convesso* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ con $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon$ si ha $\|(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2\| \leq 1 - \delta$.

Esercizio 4.17. Dimostra che ogni spazio pre-hilbertiano è uniformemente convesso.

4.3. Teorema del punto di minima distanza.

Esercizio 4.18. Dimostra che il teorema 3.4 e la proposizione 3.5 valgono anche per spazi di Banach uniformemente convessi.

Esercizio 4.19. Fai un esempio di sottoinsieme chiuso e convesso del piano cartesiano \mathbb{R}^2 per il quale non si ha unicità del punto di minima norma, rispetto alla norma $\|(x, y)\| := |x| + |y|$.

Esercizio 4.20. Sia $C := \left\{ f \in L^1(0, 1) : \int_0^1 f = 1 \right\}$. Dimostra che C è convesso e chiuso in $L^1(0, 1)$ e che possiede infiniti elementi di norma minima.

Esercizio 4.21. Sia $C := \left\{ f \in L^1(0, 1) : \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1 \right\}$. Dimostra che C è convesso e chiuso in $C(0, 1)$ (dotato della norma del sup, $\|f\| := \sup |f|$) e che non esiste alcun elemento di norma minima.

Esercizio 4.22. Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio pre-Hilbertiano E , siano $\mathbf{p} \in C$ e $\mathbf{q} \in E$. Dimostra che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

- (A) il punto \mathbf{p} è un punto di C con minima distanza da \mathbf{q} , ovvero $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \min_{\mathbf{x} \in C} \|\mathbf{q} - \mathbf{x}\|$;
- (B) per ogni $\mathbf{x} \in C$ si ha che $\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle \leq 0$.

Prova inoltre a dare una interpretazione geometrica della condizione (B).

Esercizio 4.23. In uno spazio di Hilbert H , sia $B := \{\mathbf{x} \in H : \|\mathbf{x} - c\| \leq r\}$ la palla chiusa di centro c e raggio r . Determina delle formule esplicite per calcolare il punto di minima distanza in B da un generico punto $x \in H$.

Esercizio 4.24. Sia C il sottoinsieme di $L^2(\mathbb{R})$ formato dalle funzioni a valori reali (quasi ovunque) non negativi.

- Dimostra che C è un sottoinsieme chiuso e convesso di $L^2(\mathbb{R})$.
- Verifica che il punto di C di minima distanza da una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ è dato dalla funzione

$$f_+(x) := \max\{0, \operatorname{Re}(f(x))\}.$$