ANALISI 3 - L10 - L11: SOTTOSPAZI DENSI IN L^p

DAMIANO FOSCHI

Una generica funzione di classe L^p può essere molto complicata e irregolare. In questa lezione cominciamo ad esaminare come sia comunque possibile approssimare ogni funzione L^p con funzioni più semplici e regolari.

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- definizioni e proprietà delle funzioni *parte intera*, *parte positiva*, *parte negativa* [Analisi 1];
- proprietà di regolarità della misura di Lebesgue [Analisi 2].

Ricordiamo che la condizione che un sottoinsieme S di uno spazio normato V sia *denso* in V si può formulare nei seguenti equivalenti modi:

- la chiusura di S (nella topologia di V) coincide con tutto V;
- ogni palla metrica di V contiene punti di S;
- per ogni elemento $v \in V$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto di $w \in S$ tale che $\|w - v\| < \varepsilon$;
- per ogni elemento $v \in V$ esiste una successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di S che converge (in norma) a v.

1. Approssimazioni con funzioni semplici

Definizione 1.1. Una funzione misurabile $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *semplice* quando assume solo un numero finito di valori, ovvero quando è della forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}(x),$$

con $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ e dove $A_1, \dots, A_n$ sono sottoinsiemi misurabili di Ω a due a due disgiunti.

Quando tutti gli insiemi A_k hanno misura finita la funzione semplice φ è integrabile e il suo integrale, per la proprietà di linearità dell'integrale, è dato da

$$\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_\Omega \chi_{A_k} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{A_k} \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu\left(A_k\right).$$

Calcolare le norme L^p di funzioni semplici è abbastanza immediato. Ogni funzione semplice è una funzione limitata e abbiamo

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{\substack{k=1,\dots,n\\ \mu(A_k)>0}} |c_k|\,.$$

Date: ultimo aggiornamento, 24 dicembre 2022.

Per ogni $p \in]0, \infty[$ anche $|\varphi|^p$ è una funzione semplice ed essendo gli insiemi A_k disgiunti tra loro abbiamo che $|\varphi|^p = \sum_k |c_k|^p \chi_{A_k}$, dunque la norma L^p di φ è data da

$$\|\varphi\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^p \mu(A_k) \right)^{1/p}.$$

Chiaramente se moltiplichiamo una funzione semplice per un valore scalare otteniamo ancora una funzione semplice. Anche la somma di due funzioni semplici è ancora una funzione semplice, in quanto l'insieme somma di due insiemi finiti è ancora un insieme finito. Lo spazio delle funzioni semplici forma dunque uno spazio vettoriale. Indichiamo con $S(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni semplici e con $S_I(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni semplici integrabili.

Ogni funzione misurabile non negativa si può approssimare come limite puntuale con una successione crescente di funzioni semplici.

Lemma 1.2. *Sia $f \colon \Omega \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Esiste una successione $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici tale che per ogni $x \in \Omega$ valgano le seguenti condizioni:*

(i) *$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant f(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
(ii) *quando $n \geqslant f(x)$ si ha $f(x) - \varphi_n(x) \leqslant 2^{-n}$;*
(iii) *$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che la condizione (iii) è una conseguenza immediata delle prime due (i) e (ii).

Per ogni $t \geqslant 0$ indichiamo con $E_f(t)$ indica l'insieme di sopralivello t per f,

$$E_f(t) := \{x \in \Omega \colon f(x) > t\}.$$

Per ogni coppia di interi n e k definiamo l'intervallo diadico

$$I_{n,k} := \left] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right].$$

Dato $n \in \mathbb{N}$, per ogni intero k con $0 \leqslant k < n2^n$ poniamo

$$A_{n,k} := \big\{x \in \Omega \colon f(x) \in I_{n,k}\big\} = E_f\Big(\frac{k}{2^n}\Big) \setminus E_f\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big),$$

e poniamo inoltre

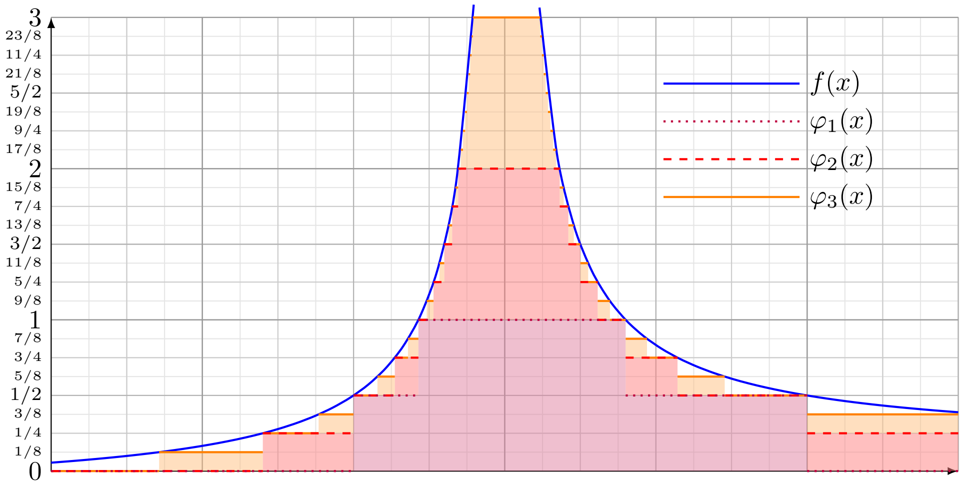
$$A_{n,n2^n} := \{x \in \Omega \colon f(x) > n\} = E_f(n).$$

Gli insiemi

$$A_{n,0}, A_{n,1}, \dots, A_{n,n2^n-1}, A_{n,n2^n}$$

formano una famiglia finita di insiemi a due a due disgiunti. Definiamo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{n,k}}(x).$$



Fissiamo un punto $x \in \Omega$.

Se $f(x) > n$ allora $x \in A_{n,n2^n}$ e $\varphi_n(x) = n < f(x)$; mentre quando $0 < f(x) \leqslant n$ esiste un unico indice k compreso tra 0 e $n2^n - 1$ tale che $f(x) \in I_{n,k}$, per tale indice si ha $\varphi_n(x) = k2^{-n} < f(x)$; quindi $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f(x)$ per ogni x.

Quando $f(x) > n+1 > n$ abbiamo $\varphi_{n+1}(x) = n+1 > n = \varphi_n(x)$; mentre se $0 < f(x) \leqslant n+1$, osserviamo che ogni intervallo diadico $I_{n+1,j}$ di ampiezza $2^{-(n+1)}$ è contenuto nell'intervallo diadico $I_{n,k}$ di ampiezza 2^{-n} per[1] $k = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$, in quanto

$$\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{j}{2} < \frac{j+1}{2} \leqslant \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 1,$$

e dunque $\varphi_{n+1}(x) = j2^{-(n+1)} \geqslant \lfloor j/2 \rfloor 2^{-n} = \varphi_n(x)$; in ogni caso abbiamo che $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$.

Infine, quando $n \geqslant f(x)$, sia k l'indice per cui $f(x) \in I_{n,k}$, siccome tale l'intervallo ha ampiezza 2^{-n} abbiamo

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) = f(x) - \frac{k}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{1}$$

e dunque $\lim_{n\to\infty} f(x) - \varphi_n(x) = 0$, pertanto $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. □

Sfruttando il lemma possiamo approssimare in modo controllato ogni funzione misurabile a valori reali o complessi con successioni di funzioni semplici.

Proposizione 1.3. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Esiste una successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tale che*

- *$|\varphi_n(x)| \leqslant |f(x)|$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \Omega$;*
- *$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, per ogni $x \in \Omega$;*
- *quando $n \geqslant |f(x)|$ allora $|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \sqrt{2}\, 2^{-n}$.*

Dimostrazione. Il caso in cui f sia una funzione a valori reali non negativi è stato trattato nel lemma 1.2.

Nel caso in cui $f : \Omega \to \mathbb{R}$ assuma solo valori reali allora possiamo utilizzare la decomposizione $f = f_+ - f_-$, dove $f_+ := \max\{f, 0\}$ è la parte positiva di f e $f_- := \max\{0, -f\}$ è la parte negativa di f. Sia f_+ che f_- sono due funzioni

[1] Ricordiamo che la *parte intera* di $x \in \mathbb{R}$ è definita da $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$, ovvero l'intero più grande che non supera x

misurabili a valori non negativi, e dunque per il lemma 1.2 esistono due successioni di funzioni semplici (φ_n^+) e (φ_n^-) tali che per ogni $x \in \Omega$ abbiamo

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \varphi_n^+(x) \leqslant f_+(x), && \lim_{n\to\infty} \varphi_n^+(x) = f_+(x), \\ &0 \leqslant \varphi_n^-(x) \leqslant f_-(x), && \lim_{n\to\infty} \varphi_n^-(x) = f_-(x), \end{aligned}$$

ed inoltre quando $n \geqslant |f(x)| = \max\{f_+(x), f_-(x)\}$ abbiamo

$$f_+(x) - \varphi_n^+(x) \leqslant 2^{-n}, \quad f_-(x) - \varphi_n^-(x) \leqslant 2^{-n}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\varphi_n := \varphi_n^+ - \varphi_n^-$; si tratta di una funzione semplice a valori reali, in quanto differenza di funzioni semplici non negative. Abbiamo che $(\varphi_n)_+ = \varphi_n^+$ e $(\varphi_n)_- = \varphi_n^-$, e dunque

$$|\varphi_n| = (\varphi_n)_+ + (\varphi_n)_- = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leqslant f_+ + f_- = |f|.$$

Inoltre, per linearità del limite, per ogni $x \in \Omega$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^+(x) - \lim_{n\to\infty} \varphi_n^-(x) = f_+(x) - f_-(x) = f(x).$$

Infine, quando $n \geqslant |f(x)|$ abbiamo

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = \max\bigl\{f_+(x) - \varphi_n^+(x),\ f_-(x) - \varphi_n^-(x)\bigr\} \leqslant 2^{-n}.$$

Nel caso generale di una funzione f a valori complessi, possiamo scrivere $f = g + \mathrm{i}h$, dove g e h sono funzioni misurabili a valori reali, $g = \mathrm{Re}(f)$ e $h = \mathrm{Im}(f)$. Per quanto visto nel caso precedente g e h possono essere approssimate con successioni di funzioni semplici e dunque esistono due successioni $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici a valori reali tali che per ogni $x \in \Omega$ abbiamo

$$\begin{aligned} &|\alpha_n(x)| \leqslant |g(x)|, && \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = g(x), \\ &|\beta_n(x)| \leqslant |h(x)|, && \lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = h(x), \end{aligned}$$

ed inoltre quando $n \geqslant |f(x)| \geqslant \max\{|g(x)|, |h(x)|\}$ abbiamo

$$|g(x) - \alpha_n(x)| \leqslant 2^{-n}, \quad |h(x) - \beta_n(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\varphi_n := \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$; si tratta di una funzione semplice a valori complessi, con $\mathrm{Re}(\varphi_n) = \alpha_n$ e $\mathrm{Im}(\varphi_n) = \beta_n$. Abbiamo

$$|\varphi_n| = \sqrt{(\alpha_n)^2 + (\beta_n)^2} \leqslant \sqrt{g^2 + h^2} = |f|.$$

Inoltre, per linearità del limite, per ogni $x \in \Omega$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = g(x) + \mathrm{i}h(x) = f(x).$$

Infine, quando $n \geqslant |f(x)|$ abbiamo

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = \sqrt{\bigl(g(x) - \alpha_n(x)\bigr)^2 + \bigl(h(x) - \beta_n(x)\bigr)^2} \leqslant \sqrt{(2^{-n})^2 + (2^{-n})^2} = \sqrt{2}\, 2^{-n}.$$

□

Teorema 1.4. *L'insieme $S(\Omega)$ delle funzioni semplici è denso in $L^\infty(\Omega)$; inoltre ogni $f \in L^\infty$ può essere approssimata con una successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tali che $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ per ogni n.*

Per ogni $p \in [1, \infty[$, l'insieme $S_I(\Omega)$ delle funzioni semplici integrabili è denso in $L^p(\Omega)$; inoltre ogni $f \in L^p$ può essere approssimata con una successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tali che $\|\varphi_n\|_p \leqslant \|f\|_p$ per ogni n.

Dimostrazione. Sia f una funzione misurabile e sia (φ_n) la successione di funzioni semplici approssimante descritta dalla proposizione 1.3. Siccome puntualmente abbiamo $|\varphi_n| \leqslant |f|$ allora ne segue che $\|\varphi_n\|_p \leqslant \|f\|_p$ per ogni $p \in [1, +\infty]$

Nel caso $p = \infty$, abbiamo inoltre che quando $n \geqslant \|f\|_\infty$ la condizione

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \sqrt{2}2^{-n}$$

vale per quasi ogni $x \in \Omega$, ovvero $\|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant \sqrt{2}2^{-n}$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0,$$

ovvero la successione φ_n converge ad f in L^∞.

Nel caso $1 \leqslant p < \infty$, il fatto che $\varphi_n \in L^p$ implica che φ_n assume ciascuno dei suoi valori non nulli solo su insiemi di misura finita e dunque è integrabile. Osserviamo che per ogni $x \in \Omega$ vale il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - \varphi_n(x)|^p = 0,$$

ed inoltre abbiamo il controllo dominato

$$|f(x) - \varphi_n(x)|^p \leqslant (|f(x)| + |\varphi_n(x)|)^p \leqslant 2^p |f(x)|^p .$$

Siccome $|f|^p$ è una funzione integrabile, possiamo applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x) - \varphi_n(x)|^p \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

e dunque $\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_p = 0$, ovvero la successione φ_n converge ad f in L^p. □

2. Approssimazioni con funzioni continue

Supponiamo ora che l'insieme Ω usato come dominio per le nostre funzioni sia un sottoinsieme *aperto* dello spazio euclideo $\mathbb{R}^d$. La norma euclidea di $\mathbb{R}^d$ determina su Ω una struttura metrica e topologica e ci permette di considerare funzioni continue definite su Ω. Indichiamo con $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$ la norma euclidea di un vettore $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Supponiamo inoltre che la misura μ sia una misura *regolare* rispetto alla topologia di Ω; questo significa che ogni insieme *boreliano* è misurabile (è sufficiente che lo siano gli aperti) e che per ogni sottoinsieme misurabile E di Ω la misura dell'insieme E si può approssimare con la misura degli aperti che lo contengono o con la misura dei compatti in esso contenuti,

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf \{\mu(A) \colon A \subset \Omega,\ A \text{ è aperto},\ E \subseteq A\}, \\ \mu(E) &= \sup \{\mu(K) \colon K \subset \Omega,\ A \text{ è un compatto},\ K \subseteq E\}. \end{aligned}$$

In particolare, quando E ha misura finita allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A e un compatto K tali che $K \subseteq E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Queste proprietà di regolarità valgono ad esempio per la misura di Lebesgue[2] su $\mathbb{R}^n$.

Vogliamo dimostrare che le funzioni continue riescono ad approssimare le funzioni di classe L^p quando p è finito.

Ricordiamo che il supporto di una funzione continua $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui f assume valori non nulli,

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega \colon f(x) \neq 0\}}.$$

Tale insieme coincide con il complementare dell'unione di tutti gli aperti sui quali f si annulla.

[2] Le proprietà di regolarità della misura di Lebesgue sono state illustrate nell'insegnamento di analisi matematica 2 al secondo anno di corso.

Teorema 2.1. *Sia* $1 \leqslant p < \infty$. *L'insieme* $C_c(\Omega)$ *delle funzioni continue a supporto compatto è denso in* $L^p(\Omega)$.

L'idea è quella di far vedere che è possibile approssimare in norma L^p ogni funzione semplice integrabile con funzioni continue a supporto compatto e poi utilizzare il risultato di densità delle funzioni semplici visto nella sezione precedente. Quindi il primo obiettivo sarà quello di approssimare con funzioni continue la funzione caratteristica di un insieme misurabile.

2.1. **Distanze da insiemi.**

Definizione 2.2. Dato un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$ e un punto $p \in \Omega$ la distanza di p da E è definita da

$$\operatorname{dist}(p, E) := \inf_{q \in E} |p - q| .$$

Dati due sottoinsiemi A e B di Ω la distanza di A da B è definita da

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf_{\substack{p \in A \\ q \in B}} |p - q| = \inf_{p \in A} \operatorname{dist}(p, B).$$

Osserviamo che per l'insieme vuoto $E = \varnothing$ abbiamo

$$\operatorname{dist}(p, \varnothing) = \inf \varnothing = +\infty,$$

mentre quando E è non vuoto la distanza $\operatorname{dist}(p, E)$ è sempre una quantità finita non negativa.

Lemma 2.3. *Se* E *non è vuoto allora la funzione* $x \mapsto \operatorname{dist}(x, E)$ *è lipschitziana su* Ω *con costante di Lipschitz uguale a* 1*,*

$$|\operatorname{dist}(x, E) - \operatorname{dist}(y, E)| \leqslant \operatorname{dist}(x, y), \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$\operatorname{dist}(x, E) \leqslant \operatorname{dist}(x, q) \leqslant \operatorname{dist}(y, q) + \operatorname{dist}(x, y), \quad \forall q \in E,$$

e dunque passando all'estremo inferiore rispetto a q a destra otteniamo

$$\operatorname{dist}(x, E) \leqslant \operatorname{dist}(y, E) + \operatorname{dist}(x, y).$$

Scambiando il ruolo di x e y troviamo anche che

$$\operatorname{dist}(y, E) \leqslant \operatorname{dist}(x, E) + \operatorname{dist}(x, y).$$

Le ultime due disuguaglianze insieme implicano la tesi. □

Lemma 2.4. *Siano* K *un compatto e* C *un chiuso di* $\mathbb{R}^d$. *Se* K *e* C *sono disgiunti allora* $\operatorname{dist}(K, C) > 0$.

Dimostrazione. Possiamo assumere che K e C siano entrambi diversi dal vuoto. La funzione $x \mapsto \operatorname{dist}(x, C)$ è una funzione continua (essendo lipschitziana) e per il teorema di Weierstrass esiste un punto $p \in K$ in cui tale funzione assume il suo minimo sul compatto K,

$$\operatorname{dist}(K, C) = \min_{x \in K} \operatorname{dist}(x, C) = \operatorname{dist}(p, C).$$

Se K non interseca C allora p è esterno a C, ovvero esiste una palla $B(p, r)$ con centro in p e raggio $r > 0$ che non interseca C, questo significa che $\operatorname{dist}(p, C) > 0$. □

Definizione 2.5. Dato un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^d$ e un raggio $r \geqslant 0$ definiamo l'*ispessimento di* E *di raggio* r come l'insieme

$$E_r := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \colon \operatorname{dist}(x, E) \leqslant r \right\} .$$

Lemma 2.6. *L'ispessimento E_r è sempre un insieme chiuso. Se E è limitato l'ispessimento E_r è un insieme compatto.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che E non sia vuoto, in quanto se $E = \varnothing$ allora $E_r = \varnothing$ è compatto in modo triviale.

Osserviamo che E_r è chiuso in quanto è la controimmagine dell'intervallo chiuso $[0, r]$ tramite la funzione continua $x \mapsto \operatorname{dist}(x, E)$.

Inoltre se E è limitato allora esiste un raggio $R \geqslant 0$ tale che $E \subseteq B(0, R)$, per la disuguaglianza triangolare segue che $E_r \subseteq B(0, R+r)$, quindi E_r è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^d$ e dunque, per il teorema di Heine-Borel, è compatto. □

2.2. **Approssimazioni continue di funzioni caratteristiche.**

Lemma 2.7. *Siano K un compatto non vuoto e A un aperto di $\mathbb{R}^d$ tali che $K \subset A$. Allora esistono un aperto $\widetilde{A}$ e un compatto $\widetilde{K}$ tali che*

$$K \subset \widetilde{A} \subset \widetilde{K} \subset A. \tag{2}$$

Dimostrazione. Sia $C := \mathbb{R}^d \setminus A$ il complementare di A. Siccome A è aperto, C è chiuso ed è disgiunto da K, per l'ipotesi $K \subset A$, per il lemma 2.4 abbiamo che $\operatorname{dist}(K, C) > 0$. Sia $0 < r < \operatorname{dist}(K, C)$. Basta scegliere allora come $\widetilde{K}$ l'ispessimento di K di raggio r,

$$\widetilde{K} := K_r = \left\{x \in \mathbb{R}^d \colon \operatorname{dist}(x, K) \leqslant r\right\},$$

che è compatto per il lemma 2.6, e come $\widetilde{A}$ l'insieme dei punti interni di $\widetilde{K}$,

$$\widetilde{A} := \mathring{\widetilde{K}} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \colon \operatorname{dist}(x, K) < r\right\},$$

che è aperto. □

Proposizione 2.8. *Siano K un compatto e A un aperto di $\mathbb{R}^d$ tali che $K \subset A$. Allora esiste una funzione continua $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ con supporto compatto contenuto in A tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in K$.*

Dimostrazione. Se $K = \varnothing$ basta prendere come f la funzione nulla. Possiamo allora supporre che K non sia vuoto. Per il lemma 2.7 esistono un aperto $\widetilde{A}$ e un compatto $\widetilde{K}$ per i quali valgono le inclusioni (2). Sia $C = \mathbb{R}^d \setminus \widetilde{A}$ il chiuso ottenuto come complementare di $\widetilde{A}$, e che dunque è disgiunto da K.

Essendo i due chiusi K e C disgiunti, le distanze $\operatorname{dist}(x, K)$ e $\operatorname{dist}(x, C)$ non possono annullarsi simultaneamente; risulta allora ben definita la funzione

$$f(x) := \frac{\operatorname{dist}(x, C)}{\operatorname{dist}(x, C) + \operatorname{dist}(x, K)} \in [0, 1], \quad x \in R^d.$$

Per $x \in C$ abbiamo $f(x) = \frac{0}{0 + \operatorname{dist}(x, K)} = 0$ e dunque se $f(x) \neq 0$ allora $x \in \widetilde{A}$; ciò significa che il supporto di f è contenuto nella chiusura di A che a sua volta è contenuta nel compatto $\widetilde{K}$. Dunque f ha supporto compatto contenuto in $\widetilde{K}$ e quindi in A.

Per $x \in K$ abbiamo $f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, C)}{\operatorname{dist}(x, C) + 0} = 1$. □

Ora siamo pronti per mostrare come è possibile approssimare funzioni caratteristiche di insiemi misurabili con funzioni continue.

Lemma 2.9. *Sia $1 \leqslant p < \infty$. Sia E un sottoinsieme misurabile di Ω con misura finita e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste una funzione f continua a supporto compatto in Ω tale che $\|f - \chi_E\|_p < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Per la proprietà di regolarità della misura μ abbiamo che esistono un aperto A e un compatto K tali che $K \subseteq E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus K) < \varepsilon^p$. Sia f la funzione continua a suppporto compatto fornita dalla proposizione 2.8. Quando $x \in K$ abbiamo $f(x) = 1$ e $\chi_E(x) = 1$; quando $x \notin A$ abbiamo $f(x) = 0$ e $\chi_E(x) = 0$; dunque se $f(x) \neq \chi_E(x)$ allora $x \in A \setminus K$. Inoltre, siccome f assume valori compresi tra 0 e 1 abbiamo che

$$|f(x) - \chi_E(x)| = \begin{cases} 1 - f(x), & \text{se } x \in E, \\ f(x), & \text{se } x \notin E, \end{cases} \leqslant 1.$$

Otteniamo allora che

$$\int_\Omega |f(x) - \chi_E(x)|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{A \setminus K} 1^p \,\mathrm{d}\mu = \mu(A \setminus K) < \varepsilon^p.$$

□

Formando combinazioni lineari di approssimazioni di funzioni caratteristiche possiamo ottenere approssimazioni di funzioni semplici.

Proposizione 2.10. *Sia $1 \leqslant p < \infty$. Sia φ è una funzione semplice integrabile su Ω e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste una funzione g continua a supporto compatto in Ω tale che $\|g - \varphi\|_p < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Le funzioni semplici integrabili non identicamente nulle sono della forma $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$, dove possiamo supporre le costanti c_k non nulle e gli insiemi A_k di misura finita. Per ogni k, per il lemma 2.9 applicato alla funzione χ_{A_k}, abbiamo che esiste una funzione continua a supporto compatto g_k tale che

$$\|g_k - \chi_{A_k}\|_p < \frac{\varepsilon}{n\,|c_k|}$$

Se definiamo $g := \sum_{k=1}^n c_k g_k$ otteniamo una funzione continua a supporto compatto per la quale abbiamo

$$\|g - \varphi\|_p = \Big\|\sum_{k=1}^n c_k (g_k - \chi_{A_k})\Big\|_p \leqslant \sum_{k=1}^n |c_k|\, \|g_k - \chi_{a_k}\|_p < \sum_{k=1}^n |c_k| \frac{\varepsilon}{n\,|c_k|} = \varepsilon.$$

□

2.3. **Densità di funzioni continue in L^p.** Ora abbiamo tutto quello che ci serve per dimostrare il teorema di densità delle funzioni continue in L^p.

Dimostrazione del teorema 2.1. Sia $f \in L^p$ e sia $\varepsilon > 0$. Per il teorema 1.4 esiste una funzione semplice integrabile φ tale che $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon/2$. Per la proposizione 2.10 esiste una funzione continua a supporto compatto tale che $\|g - \varphi\|_p < \varepsilon/2$. Per la disuguaglianza triangolare otteniamo che

$$\|f - g\|_p \leqslant \|f - \varphi\|_p + \|g - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Il teorema 2.1 ci dice che le funzioni continue sono vicine a tutte le funzioni L^p. Questo ci permette di dimostrare molte proprietà degli spazi L^p dimostrandole prima per funzioni continue a supporto compatto e poi procedendo per densità. Vediamo ad esempio la proprietà di continuità della norma L^p rispetto alle traslazioni.

Definizione 2.11. Dato $h \in \mathbb{R}^d$ definiamo l'operatore di *traslazione di passo* h come la trasformazione $\tau_h \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ data da $\tau_h(x) := x + h$.

La norma L^p su $\mathbb{R}^d$ è invariante rispetto a traslazioni; se $g = f \circ \tau_h$, ovvero $g(x) = f(x+h)$, abbiamo

$$\|g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)|^p \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \, \mathrm{d}y = \|f\|_p^p ,$$

in quanto la msura di Lebesgue è invariante rispetto al cambio di variabile

$$x \mapsto y = x + h, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

Risulta che per $p < \infty$ la traslata $f \circ \tau_h$ approssima f in norma L^p quando $h \to 0$.

Proposizione 2.12 (Continuità delle traslazioni in L^p)**.** *Sia $1 \leqslant p < \infty$ e sia $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Allora*

$$\lim_{h \to 0} \|f \circ \tau_h - f\|_p = 0. \tag{3}$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che la proprietà (3) vale per funzioni continue a supporto compatto in $\mathbb{R}^d$. Sia $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ con supporto contenuto nel compatto K. Quando $|h| < 1$ il supporto della traslata $g \circ \tau_h$ è contenuto nel compatto K_1 ottenuto come ispessimento di K di raggio 1. Sia $M = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x)|$, per il teorema di Weierstrass tale massimo esiste finito. Abbiamo quindi che

$$|g(x+h) - g(x)|^p \leqslant (|g(x+h)| + |g(x)|)^p \leqslant (2M)^p \chi_{K_1}(x),$$

e osserviamo che χ_{K_1} è una funzione integrabile in quanto K_1 ha misura di Lebesgue finita. Inoltre per la continuità di g vale il limite puntuale

$$\lim_{h \to 0} |g(x+h) - g(x)|^p = 0.$$

Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e ottenere che

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \|g \circ \tau_h - g\|_p = \lim_{h \to 0} \left(\int |g(x+h) - g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} &= \\ = \left(\lim_{h \to 0} \int |g(x+h) - g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ora procediamo per *densità*. Data una generica $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e un $\varepsilon > 0$, per il teorema 2.1 esiste una funzione $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tale che $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, e per invarianza della norma L^p rispetto a traslazioni abbiamo anche che $\|f \circ \tau_h - g \circ \tau_h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Per la funzione g vale il limite (4) e dunque esiste un $\delta > 0$ tale che se $|h| < \delta$ allora $\|g \circ \tau_h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Applicando la disuguaglianza triangolare, otteniamo che quando $|h| < \delta$ si ha

$$\|f \circ \tau_h - f\|_p \leqslant \|f \circ \tau_h - g \circ \tau_h\|_p + \|g \circ \tau_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

2.4. **Cosa succede in L^∞?** Nel caso in cui $p = \infty$ non riusciamo ad approssimare con funzioni continue tutte le funzioni essenzialmente limitate, anche rinunciando alla condizione di compattezza del supporto. Per una funzione continua f abbiamo infatti che

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |f| . \tag{5}$$

Come conseguenza abbiamo che se una successione di funzioni continue converge in norma L^∞ allora converge uniformemente, e il limite uniforme di funzioni continue è ancora una funzione continua. Questo significa che funzioni continue non possono approssimare funzioni discontinue in norma L^∞. Lo spazio $BC(\Omega)$ delle funzioni continue e limitate su Ω è un sottospazio chiuso di L^∞, che non coincide con tutto $L^\infty(\Omega)$.

3. Esercizi

3.1. Approssimazioni con funzioni semplici.

Definizione 3.1. Una funzione $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice funzione *a scala* quando è della forma

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}(t),$$

dove $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, mentre $I_1, \dots, I_n$ sono intervalli di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti.

Siccome ogni intervallo di $\mathbb{R}$ è misurabile per la misura di Lebesgue abbiamo che ogni funzione a scala è una funzione semplice. Non è vero però il viceversa.

Esercizio 3.2. Fai un esempio di funzione semplice su $\mathbb{R}$ che non sia una funzione a scala.

Quando tutti gli intervalli I_k hanno lunghezza finita allora la funzione a scala ψ è integrabile.

Esercizio 3.3. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Dimostra che l'insieme delle funzioni a scala integrabili è denso in $L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.4. Fai vedere con un controesempio che l'insieme delle funzioni a scala non è denso in $L^\infty(\mathbb{R})$.

3.2. Approssimazioni tramite troncamenti.

Esercizio 3.5. Data una funzione misurabile $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definiamo la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dei suoi troncamenti ponendo

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leqslant n \text{ e } |x| \leqslant n, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostra che, quando $f \in L^p$ con $p \in [1, \infty[$, la successione (f_n) converge ad f in norma L^p.

3.3. Approssimazioni con funzioni continue.

Esercizio 3.6. Fai un esempio di due sottoinsiemi insiemi chiusi disgiunti C_1 e C_2 di $\mathbb{R}$ tali che $\operatorname{dist}(C_1, C_2) = 0$.

Esercizio 3.7. Sia $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostra che la funzione caratteristica di un intervallo limitato $[a, b]$ può essere approssimata in norma L^p con funzioni derivabili a supporto compatto su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.8. Dato $\lambda > 0$ definiamo l'*omotetia* di fattore λ come la trasformazione $\sigma_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\sigma_\lambda(t) = \lambda t$. Dimostra che per una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leqslant p < \infty$, si ha che le funzioni "riscalate" $g_\lambda := f \circ \sigma_\lambda$ convergono ad f in norma L^p per $\lambda \to 1$. Tale risultato vale anche per $p = \infty$?

Esercizio 3.9. Dimostra l'identità (5) per funzioni continue.