ANALISI 3 - L08:
DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- *funzioni potenze*, loro grafici e funzioni inverse [Analisi 1];
- *funzione logaritmo*, grafico e derivate [Analisi 1].

1. Stime per prodotti

Vogliamo studiare le proprietà di integrabilità di tipo $\mathcal{L}^p$ per somme o prodotti di due funzioni. Cominciamo con i prodotti.

Definizione 1.1. Diciamo che la coppia (p, q), con $p, q \in]0, +\infty]$ forma una coppia di *esponenti coniugati* quando

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

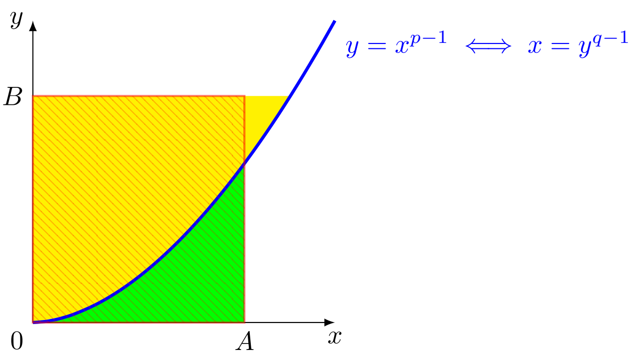
(Con la convenzione di porre $1/\infty = 0$). Se p e q sono esponenti coniugati allora necessariamente $p, q \geqslant 1$, e inoltre valgono le seguenti uguaglianze

$$(p-1)(q-1) = 1, \qquad p + q = pq, \qquad q(p-1) = p.$$

Quando $p \geqslant 1$ indichiamo l'*esponente coniugato* di p con $p' := \frac{p}{p-1}$ (con la convenzione che $1' = \infty$ e $\infty' = 1$).

Lemma 1.2 (Disuguaglianza di Young per potenze)**.** *Sia (p, q) una coppia di esponenti coniugati con $p, q > 1$. Per ogni $A, B \geqslant 0$ si ha*

$$AB \leqslant \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q.$$



Dimostrazione. Consideriamo la funzione $y = \phi(x) := x^{p-1}$ definita per $x \geqslant 0$, che ha come funzione inversa la funzione $x = \psi(y) := y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$ definita per $y \geqslant 0$. Sia ϕ che ψ sono funzioni strettamente crescenti. Per ogni coppia (x, y) con $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, abbiamo che $y \leqslant \phi(x)$ oppure $y \geqslant \phi(x)$, ma quest'ultima condizione

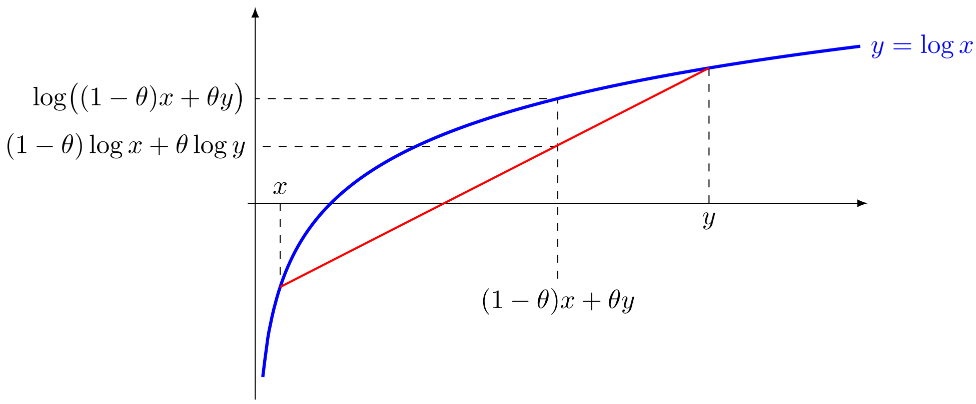
Date: ultimo aggiornamento, 23 novembre 2022.

corrisponde a $x \leqslant \psi(y)$. Dunque ogni punto (x, y) del primo quadrante appartiene al sottografico di ϕ oppure al sottografico di ψ. Quindi il rettangolo $[0, A] \times [0, B]$ è sempre contenuto nell'unione del sottografico di $\phi(x)$ sull'intervallo $[0, A]$ con il sottografico di $\psi(y)$ sull'intervallo $[0, B]$. Questo significa che l'area del rettangolo non supera mai la somma delle aree dei due sottografici, ovvero

$$AB \leqslant \int_0^A \phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^B \psi(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q. \tag{1}$$

□

Altra dimostrazione della disuguaglianza di Young. Consideriamo la funzione logaritmo, $f(x) := \log x$, definita per $x > 0$.



È una funzione crescente in quanto $f'(x) = 1/x > 0$. Siccome $f''(x) = -1/x^2 < 0$ si tratta anche di una funzione concava, il grafico di f è una curva con la concavità rivolta verso il basso, dunque le corde che uniscono due punti del grafico stanno sotto al grafico, ovvero abbiamo che

$$(1-\theta)\log x + \theta \log y \leqslant \log\left((1-\theta)x + \theta y\right) \tag{2}$$

per ogni $x, y > 0$ e $\theta \in [0, 1]$. Dati $A > 0$ e $B > 0$, scegliamo $x = A^p$, $y = B^q$, $\theta = 1/q$, e quindi $1 - \theta = 1 - 1/q = 1/p$. Sostituendo questi valori in (2) otteniamo

$$\log(AB) = \frac{1}{p}\log(A^p) + \frac{1}{q}\log(B^q) \leqslant \log\Big(\frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q\Big),$$

da cui per la monotonia del logaritmo segue subito la disuguaglianza di Young. □

Teorema 1.3. *Sia (p, q) una coppia di esponenti coniugati. Dati $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, abbiamo che il prodotto fg è una funzione di $\mathcal{L}^1$ e vale la seguente stima, detta* disuguaglianza di Hölder,

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$ siano non nulli, in caso contrario avremmo che f è nulla quasi ovunque oppure g è nulla quasi ovunque, da cui segue che il prodotto fg è nullo quasi ovunque, e quindi con norma L^1 nulla.

Quando $p, q > 1$, utilizziamo la disuguaglianza (1) con $A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ e $B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando rispetto ad x otteniamo

$$\frac{\int |fg| \,\mathrm{d}\mu}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int |g|^q \,\mathrm{d}\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

e dunque

$$\int |fg| \; \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Nel caso in cui $p = \infty$ e $q = 1$ ricaviamo più semplicemente

$$\int |fg| \; \mathrm{d}\mu \leqslant \operatorname{ess\,sup} |f| \int |g| \; \mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1 .$$

□

Corollario 1.4. *Siano $p, q, r \in]0, +\infty]$ tali che*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{3}$$

Se $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ allora $fg \in \mathcal{L}^r$ e vale la disuguaglianza di Hölder generalizzata

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q . \tag{4}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la condizione 3 implica che $(p/r, q/r)$ è una coppia di esponenti coniugati. Poniamo

$$F(x) := |f(x)|^r , \qquad G(x) := |g(x)|^r .$$

Si verifica facilmente che $F \in \mathcal{L}^{p/r}$ e $F \in \mathcal{L}^{p/r}$ con

$$\|F\|_{p/r} = \|f\|_p^r , \qquad \|G\|_{q/r} = \|g\|_q^r .$$

Applichiamo il teorema 1.3 al prodotto FG e otteniamo

$$\int |fg|^r \; \mathrm{d}\mu = \int FG \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|F\|_{p/r} \|G\|_{q/r} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r ,$$

da cui si ricava (4). □

Iterando il risultato del corollario si può generalizzare ulteriormente la disuguaglianza di Hölder al caso di prodotti di n funzioni.

Proposizione 1.5. *Date n funzioni $f_1, \dots, f_n$ e $n+1$ esponenti $p, p_1, \dots, p_n > 0$ tali che*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p}, \qquad f_k \in \mathcal{L}^{p_k},\; k = 1, \dots, n,$$

per il prodotto delle n funzioni abbiamo che $\prod_{k=1}^n f_k \in \mathcal{L}^p$ e vale la stima

$$\Big\| \prod_{k=1}^{n} f_k \Big\|_p \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k} .$$

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione si può procedere per induzione su n. Il caso $n = 2$ è stato trattato nel corollario 1.4. Il passo induttivo da n a $n+1$ lo lasciamo come esercizio per il lettore. □

Abbiamo visto che quando una funzione appartiene a due spazi $\mathcal{L}^p$ con esponenti diversi allora essa sta anche in tutti gli spazi con esponenti intermedi. Grazie alla disuguaglianza di Hölder possiamo descrivere in maniera quantitativa il carattere di queste inclusioni.

Proposizione 1.6. *Siano $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Se $f \in \mathcal{L}^{p_0} \cap \mathcal{L}^{p_1}$ allora vale la seguente stima di interpolazione*

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta} ,$$

per ogni $p \in]p_0, p_1[$, dove $\theta \in]0, 1[$ è determinato dalla condizione

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il corollario 1.4 al prodotto $|f|^{1-\theta} \cdot |f|^{\theta}$, considerando $|f|^{1-\theta} \in \mathcal{L}^{p_0/(1-\theta)}$ e $|f|^{\theta} \in \mathcal{L}^{p_1/\theta}$. Lasciamo i dettagli come esercizio per il lettore. □

Quando Ω è un dominio di misura finita, gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$ sono incapsulati uno dentro l'altro.

Proposizione 1.7. *Se $\mu(\Omega) < +\infty$ e $0 < r < q \leqslant +\infty$ allora abbiamo*

$$\mathcal{L}^q(\Omega) \subset \mathcal{L}^r(\Omega),$$

e vale la stima

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \big(\mu(\Omega)\big)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il corollario 1.4 al prodotto $1 \cdot f$, considerando $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ e $1 \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, dove p è definito da $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q} > 0$, e osservare che

$$\|1\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega 1^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \big(\mu(\Omega)\big)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}.$$

□

2. Stime per somme

Andiamo ora a considerare somme di funzioni in $\mathcal{L}^p$. Quando $p \geqslant 1$, utilizzando la disuguaglianza di Hölder possiamo dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma L^p; così, in questo caso, essa viene promossa da quasi-norma a semi-norma. La disuguaglianza triangolare per norme L^p viene anche chiamata disuguaglianza di Minkowski.

Teorema 2.1. *Quando $p \geqslant 1$ per ogni $f, g \in \mathcal{L}^p$ si ha*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ è immediato, per la disuguaglianza triangolare puntuale, $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, abbiamo

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \big(|f| + |g|\big) \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Il caso $p > 1$ è leggermente più impegnativo. Indichiamo con $q = p' = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di p. Abbiamo già visto che quando $f, g \in \mathcal{L}^p$ anche $f + g \in \mathcal{L}^p$ e dunque $M := \|f+g\|_p$ è una quantità finita. Possiamo supporre $M > 0$, altrimenti la stima sarebbe immediata. Cerchiamo di stimare M in modo ottimale. Indichiamo tra parentesi ciò che ci permette di arrivare al passaggio successivo:

$$\begin{aligned}
M^p &= \int |f+g|^{p-1} |f+g| \,\mathrm{d}\mu && \text{(disug. triang. puntuale)}\\
&\leqslant \int |f+g|^{p-1} \big(|f| + |g|\big) \,\mathrm{d}\mu && \text{(linearità dell'integrale)}\\
&= \int |f+g|^{p-1} |f| \,\mathrm{d}\mu + \int |f+g|^{p-1} |g| \,\mathrm{d}\mu && \text{(Hölder su ciascun integrale)}\\
&\leqslant \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \|f\|_p + \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \|g\|_p && \Big(\,(p-1)q = p,\ \frac{p}{q} = p-1\,\Big)\\
&\leqslant \|f+g\|_p^{p-1} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\\
&= M^{p-1}\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big).
\end{aligned}$$

Dividendo a destra e a sinistra per la quantità finita e non nulla M^{p-1} otteniamo $M \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, che è la stima cercata. □

Quando $p \in]0,1[$ la quasi norma $\|\cdot\|_p$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare. Si considerino, ad esempio, le funzioni caratteristiche di due intervalli $f = \chi_{[0,1]}$ e $g = \chi_{[2,3]}$. Si calcola facilmente che $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ e $\|f+g\|_p = 2^{1/p}$. Se $0 < p < 1$ si ha $2^{1/p} > 1 + 1$.

3. Esercizi

3.1. **Stime per prodotti.**

Esercizio 3.1. Completa la dimostrazione della proposizione 1.5.

Esercizio 3.2. Completa la dimostrazione della proposizione 1.6.

3.2. **Spazi di successioni ℓ^p.** Tutto quanto visto finora per funzioni $\mathcal{L}^p$ si può applicare al caso particolare in cui $\Omega = \mathbb{N}$ e la misura $\mu = \sharp$ è la *misura del contare*, per la quale $\sharp(A)$ è la cardinalità di A, quando A è un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$, oppure $\sharp(A) = \infty$, quando A è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$. In questo caso le funzioni non sono altro che successioni numeriche e l'integrale diventa la sommatoria di una serie. Gli spazi $\mathcal{L}^p$ che si ottengono saranno spazi vettoriali di successioni che indicheremo con ℓ^p. Più precisamente, per ogni $p > 0$ definiamo

$$\ell^p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

con quasi-norma data da

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}. \tag{5}$$

Definiamo anche

$$\ell^\infty := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\},$$

con norma data da

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| .$$

Esercizio 3.3. Sia $p > 0$. Verifica che ℓ^p è uno spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_p$ è una quasi norma.

Esercizio 3.4. Siano $0 < p < q \leqslant \infty$. Verifica che $\ell^p \subset \ell^q$ e che

$$\|(x_n)_n\|_q \leqslant \|(x_n)_n\|_p .$$

Esercizio 3.5. Dimostra la disuguaglianza di Hölder per successioni: sia (p,q) una coppia di esponenti tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1,$$

se $(x_n)_n \in \ell^p$ e $(y_n)_n \in \ell^q$ allora $(x_n y_n)_n \in \ell^1$ e vale

$$\sum_n |x_n y_n| \leqslant \|(x_n)_n\|_p \|(y_n)_n\|_q .$$

Esercizio 3.6. Dimostra che quando $p \geqslant 1$, la norma $\|\cdot\|_p$ descritta in (5) verifica tutte le proprietà richieste ad un norma.