ANALISI 3 - L07:
FUNZIONI DI CLASSE L^p

In tante applicazioni si misura spesso la grandezza di funzioni tramite integrali: ad esempio, se $f(x)$ descrive la densità di materia di un corpo che si estende sul dominio Ω la massa del corpo è data dall'integrale $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$; se $v(x)$ descrive la velocità in punto x di un corpo omogeneo che si estende sul dominio Ω la quantità di moto del corpo sarà proporzionale all'integrale $\int_\Omega v(x)^2\,\mathrm{d}x$.

In generale funzioni le cui potenze, per certi esponenti, sono integrabili formano classi di funzioni interessanti. Per ogni $p > 0$ la classe di funzioni f in cui l'integrale $\int |f|^p$ converge ad un valore finito formano uno spazio vettoriale di cui vogliamo studiare le proprietà principali.

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- Definizione della *misura* e dell'*integrale di Lebesgue* [Analisi 2];
- Proprietà degli *insiemi di misura nulla* per la misura di Lebesgue [Analisi 2];
- Nozione di $\liminf$ e di $\limsup$ per limiti di successioni [Analisi 2].

1. Funzioni $\mathcal{L}^p$

Fissiamo uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. [Se non sai cosa sia uno spazio di misura puoi considerare il caso in cui Ω è un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{M}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue contenuti in Ω e μ è la misura di Lebesgue su Ω.]

1.1. Caso $0 < p < \infty$.

Definizione 1.1. Sia $p > 0$. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione μ-misurabile. Definiamo la *semi-quasi-norma* L^p di f tramite la quantità

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu_x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indichiamo con $\mathcal{L}^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni con "norma" L^p finita,

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{C}\,\text{misurabile}\colon \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu_x < \infty \right\}.$$

Quando è chiaro il dominio su cui sono definite le funzioni e la misura scriveremo più sinteticamente $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ e indicheremo lo spazio con $\mathcal{L}^p$.

Proposizione 1.2. *Sia $p > 0$. Lo spazio $\mathcal{L}^p$ è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_p$ è una semi-quasi-norma su $\mathcal{L}^p$.*

Lemma 1.3. *Sia $p > 0$. Dati due qualsiasi numeri A e B abbiamo che*

$$|A + B|^p \leqslant 2^p\big(|A|^p + |B|^p\big), \tag{1}$$

$$|A|^p + |B|^p \leqslant 2\big(|A| + |B|\big)^p. \tag{2}$$

Date: ultimo aggiornamento, 12 dicembre 2022.

Dimostrazione. Vediamo la prima disuguaglianza,

$$|A+B|^p \leqslant \big(|A|+|B|\big)^p \leqslant \big(2\max\{|A|\,,|B|\}\big)^p = \\ = 2^p \max\{|A|^p\,,|B|^p\} \leqslant 2^p\big(|A|^p+|B|^p\big).$$

Vediamo la seconda disuguaglianza,

$$|A|^p+|B|^p \leqslant 2\max\{|A|\,,|B|\}^p \leqslant 2\big(|A|+|B|\big)^p.$$

□

Dimostrazione della proposizione 1.2. Nella disuguaglianza (1) poniamo $A = f(x)$ e $B = g(x)$ e integriamo rispetto d x, per la proprietà di monotonia dell'integrale abbiamo che

$$\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant 2^p \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right). \tag{3}$$

Dunque se $f, g \in \mathcal{L}^p$ segue che anche $f+g \in \mathcal{L}^p$. Possiamo riscrivere la disuguaglianza (3) come

$$\|f+g\|_p^p \leqslant 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right).$$

Applichiamo la disuguaglianza (2) con $A = \|f\|_p$ e $B = \|g\|_p$ e otteniamo

$$\|f+g\|_p^p \leqslant 2^p 2 \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)^p,$$

da cui ricaviamo che $\|\cdot\|_p$ soddisfa la disuguaglianza quasi-triangolare

$$\|f+g\|_p \leqslant 2^{1+\frac{1}{p}} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{L}^p$ abbiamo che $\int |\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu = |\lambda|^p \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$ e dunque anche $\lambda f \in \mathcal{L}^p$, e la (quasi)norma $\|\cdot\|_p$ soddisfa la proprietà di omogeneità

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda|\, \|f\|_p\,.$$

□

Osservazione 1.4. Integrali di funzioni misurabili su insiemi di misura nulla sono sempre nulli. La misura soffre in un certo senso di "miopia" e non riesce a distinguere funzioni che differiscono solo su insiemi di misura nulla. Per questo motivo quando $\|f\|_p = 0$ non possiamo concludere che $f = 0$, ma solamente che $f(x) = 0$ quasi ovunque in Ω, ovvero che esiste un insieme di misura nulla E tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega \setminus E$. Ad esempio la funzione di Dirichlet, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che vale $f(x) = 1$ per ogni razionale $x \in \mathbb{Q}$ e vale $f(x) = 0$ per ogni irrazionale $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, si annulla quasi ovunque, in quanto $\mathbb{Q}$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}$, dunque $\|f\|_p = 0$; ma $f(x) \neq 0$ su un sottoinsieme denso in $\mathbb{R}$. Torneremo su questo fatto in una prossima lezione.

Proposizione 1.5. *Siano* $0 < p_0 < p_1 < \infty$. *Se* $f \in \mathcal{L}^{p_0} \cap \mathcal{L}^{p_1}$ *allora* $f \in \mathcal{L}^p$ *per ogni* $p \in [p_0, p_1]$.

In particolare abbiamo che l'insieme dei $p > 0$ per cui si ha che $f \in \mathcal{L}^p$ è sempre un intervallo.

Dimostrazione. Decomponiamo $f = f_0 + f_1$ come somma di due funzioni, con f_0 che contiene la parte "bassa" e f_1 la parte "alta" di f, ponendo

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leqslant 1, \\ 0, & \text{se } |f(x)| > 1, \end{cases} \qquad f_1(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } |f(x)| \leqslant 1, \\ f(x), & \text{se } |f(x)| > 1. \end{cases}$$

Siccome f_0 e f_1 non sono mai entrambe diverse da zero abbiamo

$$|f|^p = |f_0|^p + |f_1|^p\,.$$

Integrando troviamo

$$\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int |f_0|^p \,\mathrm{d}\mu + \int |f_1|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Per il primo integrale a destra dell'uguale, poiché $|f_0| \leqslant 1$ e $p > p_0$, abbiamo

$$\int |f_0|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f_0|^{p_0} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f|^{p_0} \,\mathrm{d}\mu.$$

Per il secondo integrale, poiché quando non è nullo $|f_1| > 1$ e $p < p_1$, abbiamo

$$\int |f_1|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f_1|^{p_1} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f|^{p_1} \,\mathrm{d}\mu.$$

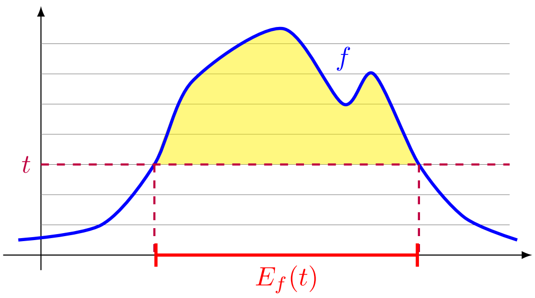
Mettendo insieme i vari pezzi otteniamo che per ogni $t > 0$ vale

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_{p_0}^{p_0} + \|f\|_{p_1}^{p_1},$$

e questo prova che $f \in \mathcal{L}^p$. □

Definizione 1.6. Sia $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile e sia $t \geqslant 0$. Indichiamo con $E_f(t)$ l'*insieme di sopralivello* t per f formato dai punti in cui $|f|$ assume valore maggiore di t,

$$E_f(t) := \{x \in \Omega \colon\ |f(x)| > t\}.$$



La funzione $t \mapsto \mu\big(E_f(t)\big)$, che calcola la misura dei sopralivelli, è una funzione monotona non crescente e non negativa e dunque integrabile (in senso generalizzato) secondo Riemann. Se integriamo per strati orizzontali il sottografico di $|f|^p$ otteniamo la formula

$$\begin{aligned}\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \mu\,\{x \in \Omega \colon\ |f(x)|^p > s\}\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_0^\infty \mu\big\{x \in \Omega \colon\ |f(x)| > s^{1/p}\big\}\,\mathrm{d}s = p\int_0^\infty \mu\big(E_f(t)\big)t^{p-1}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il cambio di variabile $s = t^p$.

Se restringiamo l'integrazione da tutto Ω alla regione $E_f(t)$ otteniamo la stima

$$\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_f(t)} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_f(t)} t^p \,\mathrm{d}\mu = t^p \mu\big(E_f(t)\big),$$

da cui ricaviamo la *disuguaglianza di Chebyshev*

$$\mu\big(E_f(t)\big) \leqslant \frac{1}{t^p}\,\|f\|_p^p, \tag{4}$$

che in particolare ci garantisce che i sopralivelli con $t > 0$ per funzioni $\mathcal{L}^p$ hanno sempre misura finita.

1.2. **Caso $p = \infty$.** Supponiamo ora che $f \in \mathcal{L}^p$ per ogni $p \geqslant p_0$ e cerchiamo di capire cosa succede a $\|f\|_p$ quando $p \to \infty$.

Per la disuguaglianza di Chebyshev (4) abbiamo

$$\|f\|_p \geqslant t\left(\mu\big(E_f(t)\big)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Passando al limite per $p \to \infty$, siccome

$$\lim_{p\to\infty}\left(\mu\big(E_f(t)\big)\right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} 1, & \text{se } E_f(t) \text{ ha misura positiva,}\\ 0, & \text{se } E_f(t) \text{ ha misura nulla,}\end{cases}$$

troviamo che

$$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \geqslant M := \sup\left\{t \geqslant 0\colon \mu\big(E_f(t)\big) > 0\right\}. \tag{5}$$

Essendo la misura degli $E_f(t)$ monotona non crescente e non negativa, abbiamo che il valore M coincide anche con

$$M = \inf\left\{t \geqslant 0\colon \mu\big(E_f(t)\big) = 0\right\},$$

e dunque M è il minimo valore per cui si ha che $|f(x)| \leqslant M$ quasi ovunque (ovvero a meno di un insieme di misura nulla). Tale valore non è altro che l'estremo superiore essenziale per la funzione $|f|$.

Definizione 1.7. Data una funzione misurabile $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$, diciamo che $m \in [-\infty, +\infty]$ è un *maggiorante essenziale* per g quando $g(x) \leqslant m$ quasi ovunque, ovvero quando l'insieme $\{x \in \Omega\colon g(x) > m\}$ è un insieme di misura nulla. L'estremo inferiore dei maggioranti essenziali per g si dice *estremo superiore essenziale* di g e lo indichiamo con

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} g(x) := \inf\{m \in [-\infty, +\infty]\colon g(x) \leqslant m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Proposizione 1.8. *L'estremo superiore essenziale di g è un maggiorante essenziale per g. E dunque è il minimo dei maggioranti essenziali.*

Dimostrazione. Sia $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di maggioranti essenziali che converge all'estremo superiore essenziale $m_\star$. Abbiamo che l'insieme

$$E_\star := \{x \in \Omega\colon g(x) > m_\star\}$$

è contenuto nell'unione degli insiemi $E_n := \{x \in \Omega\colon g(x) > m_n\}$. Ma gli insiemi E_n hanno tutti misura nulla, e quindi anche $E_\star$ avrà misura nulla in quanto contenuto nell'unione di una famiglia numerabile di insiemi di misura nulla. □

Tornando ai calcoli che stavamo facendo, la disuguaglianza (5) possiamo quindi scriverla come

$$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|. \tag{6}$$

Per la proposizione 1.8 abbiamo che esiste un insieme di misura nulla E per il quale si ha che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)| = \sup_{x\in\Omega\setminus E}|f(x)|.$$

Gli integrali non modificano il loro valore se riduciamo il dominio di integrazione rimuovendo un insieme di misura nulla, dunque

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p = \int_{\Omega\setminus E}|f|^{p-p_0}\,|f|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \Big(\sup_{\Omega\setminus E}|f|\Big)^{p-p_0}\int_{\Omega\setminus E}|f|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu =\\ = \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|f|\Big)^{p-p_0}\int_{\Omega}|f|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

ovvero
$$\|f\|_p \leqslant \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |f|\right)^{1-\frac{p_0}{p}} \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}}.$$
Passando al limite per $p \to \infty$ otteniamo

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{7}$$

Confrontando le due stime (6) e (7) otteniamo che
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |f|.$$
Questo risultato giustifica la seguente definizione per la norma per il caso $p = \infty$.

Definizione 1.9. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Definiamo la *(semi)norma* L^∞ per f come la quantità
$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$
Indichiamo con $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni con (semi)norma L^∞ finita,
$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}\,\text{misurabile}:\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Quando è chiaro il dominio su cui sono definite le funzioni e la misura scriveremo più sinteticamente $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|$ e indicheremo lo spazio con $\mathcal{L}^\infty$.

Proposizione 1.10. *Lo spazio $\mathcal{L}^\infty$ è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_\infty$ è una seminorma su $\mathcal{L}^\infty$.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Consideriamo gli insiemi
$$\begin{aligned} A &:= \{x\colon\ |f(x)| > \|f\|_\infty\}, \\ B &:= \{x\colon\ |g(x)| > \|g\|_\infty\}, \\ C &:= \{x\colon\ |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}. \end{aligned}$$
Per ipotesi A e B sono insiemi di misura nulla.

Quando $x \notin A \cup B$ abbiamo
$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$
e quindi deve necessariamente essere $C \subseteq A \cup B$, per cui anche C deve avere misura nulla essendo contenuto nell'unione di due insiemi di misura nulla. Ma ciò implica che $\|\cdot\|_\infty$ soddisfa la disuguaglianza triangolare
$$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty,$$
e in particolare $f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

Quando $\lambda \neq 0$ e $t \geqslant 0$, abbiamo che $|f(x)| > t$ se e solo se $|\lambda f(x)| > |\lambda|\, t$; l'insieme $\{x\colon\ |f(x)| > t\}$ coincide allora con l'insieme $\{x\colon\ |\lambda f(x)| > s\}$ per $s = |\lambda|\, t$. Dunque deve valere la proprietà di omogeneità $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$. □

Osservazione 1.11. Osserviamo che la (semi)-norma L^∞, pur essendo il limite di quantità definite tramite integrali ha una definizione che non è basata su un integrale. Nella sua definizione comunque entra in gioco la misura μ che si sta considerando, in quanto il concetto di insieme di misura nulla, che sta alla base della definizione di estremo superiore essenziale, dipende dalla scelta della misura.

1.3. **Esempi di funzioni $\mathcal{L}^p$.** Determinare se una funzione appartiene ad uno spazio $\mathcal{L}^p$ con $0 < p < \infty$ equivale a verificare se l'integrale $\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu$ risulta essere convergente. Per farlo è importante conoscere bene le proprietà di confronto e i criteri di convergenza per i cosidetti integrali generalizzati (o integrali impropri) di funzioni a valori non negativi. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.12. Tra le principali funzioni che vengono utilizzate come modello per confronti negli integrali generalizzati ci sono le potenze ad esponente negativo. Siano $p, \alpha > 0$.

- Consideriamo la funzione $f(x) := x^{-\alpha}$ definita per $x \in]0,1]$.

$$\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha p} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha p}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha p}\right), & \text{se } \alpha p \neq 1, \\ -\log \varepsilon, & \text{se } \alpha p = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha p}, & \text{se } \alpha p < 1, \\ +\infty, & \text{se } \alpha p \geqslant 1. \end{cases}$$

  Abbiamo dunque che $f \in \mathcal{L}^p(]0,1])$ se e solo se $p < \frac{1}{\alpha}$ e in tal caso

$$\|f\|_{L^p(0,1)} = (1-\alpha p)^{-1/p}.$$

- Consideriamo ora $f(x) := x^{-\alpha}$ definita per $x \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^\infty |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = \lim_{L \to +\infty} \int_1^L x^{-\alpha p} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha p}\left(L^{1-\alpha p} - 1\right), & \text{se } \alpha p \neq 1, \\ \log L, & \text{se } \alpha p = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha p - 1}, & \text{se } \alpha p > 1, \\ +\infty, & \text{se } \alpha p \leqslant 1. \end{cases}$$

  Abbiamo dunque che $f \in \mathcal{L}^p([1,+\infty[)$ se e solo se $p > \frac{1}{\alpha}$ e in tal caso

$$\|f\|_{L^p(1,+\infty)} = (\alpha p - 1)^{-1/p}.$$

Esempio 1.13. Raffiniamo leggermente l'esempio precedente introducendo anche dei fattori di tipo logaritmico. Siano $p, \alpha, \beta > 0$. Consideriamo la funzione

$$f(x) := x^{-\alpha} \left|\log x\right|^{-\beta},$$

definita per $x \in]0, 1/2]$. Dobbiamo studiare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha p}(-\log x)^{\beta p}}.$$

Quando $\alpha p < 1$, usiamo il fatto che sul dominio di integrazione $-\log x \geqslant -\log \frac{1}{2}$ e dunque

$$\frac{1}{x^{\alpha p}(-\log x)^{\beta p}} \leqslant \frac{(\log 2)^{-\beta p}}{x^{\alpha p}}, \quad \forall x \in]0, 1/2];$$

siccome l'integrale della potenza a destra è convergente quando $\alpha p < 1$, per il criterio del confronto anche l'integrale della funzione a sinistra sarà convergente.

Quando $\alpha p > 1$, il termine logaritmico pur contribuendo con un infinito al denominatore non aiuta l'integrale a convergere, infatti possiamo scegliere un $\delta > 0$ in modo che si abbia $\alpha p - \delta > 1$, e utilizzare il fatto che $-\log x = o\left(x^{-\frac{\delta}{\beta p}}\right)$ per $x \to 0^+$. Per x che varia in un intorno destro di 0 avremo che

$$\frac{1}{x^{\alpha p}(-\log x)^{\beta p}} \geqslant \frac{C}{x^{\alpha p - \delta}};$$

siccome l'integrale della funzione a destra diverge (in quanto $\alpha p - \delta > 1$) avremo per confronto che anche l'integrale della funzione a sinistra diverge.

Rimane da studiare il caso $\alpha p = 1$. In questo caso, effettuiamo un cambio di variabile, $t = -\log x$, e otteniamo

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} (-\log x)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \, \mathrm{d}t,$$

che sappiamo essere convergente se e solo se $\frac{\beta}{\alpha} > 1$.

Riassumendo, abbiamo trovato che $f \in \mathcal{L}^p(]0, 1/2])$ se e solo se $p < \frac{1}{\alpha}$ quando $\beta \leqslant \alpha$, oppure $p \leqslant \frac{1}{\alpha}$ quando $\beta > \alpha$. Avendo applicato dei confronti non possiamo quantificare in modo preciso il valore delle norme nei casi convergenti.

Combinando le funzioni studiate negli esempi precedenti possiamo costruire esempi di funzioni che appartengono a spazi $\mathcal{L}^p$ esattamente per ogni p contenuto in un intervallo prefissato.

Esempio 1.14. Per costruire una funzione che appartiene a $\mathcal{L}^p(]0, +\infty[)$ se e solo se $p \in]3, 7]$, possiamo considerare una potenza del tipo $x^{-\alpha_1}$ che stia negli $\mathcal{L}^p$ di un intorno di infinito per ogni $p > 3$, dunque con $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, e cucirla con una potenza del tipo $x^{-\alpha_2} |\log(x)|^\beta$ che stia negli $\mathcal{L}^p$ di un intorno di zero per ogni $p \leqslant 7$, dunque con $\alpha_2 = \frac{1}{7} < \beta$. Ecco ad esempio che una funzione come

$$f(x) := \begin{cases} x^{-\frac{1}{3}}, & \text{se } x \in]1/2, +\infty[, \\ x^{-\frac{1}{7}} (-\log x)^{-1}, & \text{se } x \in]0, \frac{1}{2}], \end{cases}$$

soddisfa le condizioni richieste.

Esempio 1.15. Determiniamo per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p(0, +\infty)$ dove f è definita come

$$f(x) = \frac{\log(x + \mathrm{e}^x) \arctan(x) - \log(1 + x^2)}{x(1 + x) \arctan(\sqrt{x}) \log(1 + x)}, \quad x > 0. \tag{8}$$

Si tratta di una funzione continua, gli unici problemi per la convergenza dell'integrale di f^p si possono avere quando $x \to 0^+$, in quanto si annulla il denominatore, oppure quando $x \to +\infty$, in quanto si tratta di un dominio illimitato. Studiamo il comportamento asintotico di f nei due casi.

Quando $x \to 0^+$ abbiamo

$$\begin{aligned} \log(1 + x) &= x + o(x), & \log(1 + x^2) &= x^2 + o(x^2), \\ x + \mathrm{e}^x &= 1 + 2x + o(x), & \log(x + \mathrm{e}^x) &= 2x + o(x), \\ \arctan(x) &= x + o(x), & \arctan(\sqrt{x}) &= x^{1/2} + o(x^{1/2}). \end{aligned}$$

Conbinando queste approssimazioni otteniamo che

$$\begin{aligned} \log(x + \mathrm{e}^x) \arctan(x) - \log(1 + x^2) &= x^2 + o(x^2), \\ x(1 + x) \arctan(\sqrt{x}) \log(1 + x) &= x^{5/2} + o(x^{5/2}), \end{aligned}$$

e dunque $f(x)^p \approx x^{-p/2}$ per $x \to 0^+$. Per il criterio del confronto asintotico f^p risulta essere integrabile intorno a 0^+ se e solo se $p/2 < 1$.

Quando $x \to +\infty$ abbiamo

$$\begin{aligned} \log(1 + x) &= \log(x) + o(1), & \log(1 + x^2) &= 2\log(x) + o(1), \\ \log(x + \mathrm{e}^x) &= x + o(1), \\ \arctan(x) &= \frac{\pi}{2} + o(1), & \arctan(\sqrt{x}) &= \frac{\pi}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Conbinando queste approssimazioni otteniamo che

$$\log(x+\mathrm{e}^x)\arctan(x) - \log(1+x^2) = \frac{\pi}{2}x + o(x),$$
$$x(x+1)\arctan(\sqrt{x})\log(1+x) = \frac{\pi}{2}x^2\log(x) + o(x^2\log x),$$

e dunque $f(x)^p \approx x^{-p}(\log x)^{-p}$ per $x \to +\infty$. Per il criterio del confronto asintotico f^p risulta essere integrabile intorno a $+\infty$ se e solo se $p > 1$.

Mettendo insieme i due comportamenti, vicino a 0^+ e vicino a $+\infty$ otteniamo che la funzione (8) appartiene ad $\mathcal{L}^p(0,+\infty)$ se e solo se $p \in]1,2[$.

2. Esercizi

2.1. Norma L^p.

Esercizio 2.1. Se una funzione f appartiene ad $\mathcal{L}^p$ per ogni $p \in]0,p_0]$, cosa puoi dire del limite della norma $\|f\|_p$ per $p \to 0^+$? *[Considera prima il caso di una funzione caratteristica, poi di una combinazione lineare di funzioni caratteristiche, e infine prova a formulare un'ipotesi per il caso generale]*

Esercizio 2.2. Considera la funzione $f(x) := x^{-\alpha}|\log x|^{-\beta}$ definita per $x \in [2,+\infty[$. Determina per quali $p,\alpha,\beta > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p([2,+\infty[)$.

Esercizio 2.3. Sia $\alpha > 0$. Sia $g(x) = |f(x)|^\alpha$. Verifica che $f \in \mathcal{L}^p$ se e solo se $g \in \mathcal{L}^{p/\alpha}$ e determina il legame che intercorre tra $\|f\|_p$ e $\|g\|_{p/\alpha}$.

Esercizio 2.4. Per ogni $p > 0$, calcola il valore della norma L^p per la funzione gaussiana e^{-x^2} definita per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.5. Determina per quali valori reali di α e β si ha che la funzione

$$f(x) := \frac{\sin x}{|x^2-1|^\alpha |x|^\beta}$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2.6. Considera la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log(1+x)}}$.

- Determina per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p(]0,1])$.
- Determina per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p([1,+\infty[)$.

Esercizio 2.7. Determina per quali $p > 0$ si ha che la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+|\log x|)}$ appartiene a $\mathcal{L}^p(]0,+\infty[)$.

Esercizio 2.8. Lo spazio $\mathcal{L}^p$ non è un'algebra (rispetto al prodotto puntuale). Per ogni $p > 0$ fornisci esempi di funzioni f e g tali che $f,g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, ma con $fg \notin \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 2.9. Costruisci un esempio di una funzione $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ che non sia infinitesima per $x \to \infty$.

Esercizio 2.10. Sia $0 < p < \infty$. Dimostra che se $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ed esiste il limite $\ell := \lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora $\ell = 0$.

Esercizio 2.11. Data una funzione misurabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ indichiamo con $I(f)$ l'insieme degli esponenti $p \in]0,+\infty]$ tali che $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Fornisci esempi espliciti di funzioni f per cui si abbia che $I(f)$ coincida con i seguenti intervalli:

$$I(f) =]0,+\infty]; \quad I(f) =]0,+\infty[; \quad I(f) =]0,3[; \quad I(f) =]3,+\infty];$$
$$I(f) =]1/2,3[; \quad I(f) = [1/2,3[; \quad I(f) =]1/2,3]; \quad I(f) = [1/2,3];$$
$$I(f) = \{1/2\}; \quad I(f) = \{3\}; \quad I(f) = \{\infty\}.$$

Esercizio 2.12. Determina per quali esponenti $p \in]0, +\infty]$ si ha che le seguenti funzioni appartengono alla classe $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$:

$$f(x) := \frac{\sqrt{|1+x|}}{1+x^3}; \quad g(x) := \frac{\arctan(\mathrm{e}^x)\log|x|}{(1+\mathrm{e}^x)\sqrt{|x|}}; \quad h(x) := \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{\left|1-\sqrt{1-\sin x}\right|}}.$$