ANALISI 3 - L06:
DUALI DI SPAZI NORMATI

DAMIANO FOSCHI

Molte proprietà degli elementi di uno spazio normato V possono essere studiate attraverso l'azione dei suoi funzionali lineari su V. Lo spazio $V' := \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$, dei funzionali lineari continui definiti su uno spazio normato V, ha il pregio di essere sempre uno spazio di Banach. Molte delle proprietà degli elementi di V posso essere lette attraverso l'azione dei funzionali in V'.

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- Definizione e proprietà di convergenza per *serie numeriche* [Analisi 1].

1. Duale di uno spazio normato

Definizione 1.1. Dato uno spazio normato V sul campo $\mathbb{K}$ definiamo lo *spazio duale (topologico)* di V come lo spazio V' delle applicazioni da V a $\mathbb{K}$ (dette anche *funzionali*) che sono lineari e continue,

$$V' := \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \{\varphi\colon V \to \mathbb{K}\colon \varphi \text{ lineare e continuo}\}.$$

La norma naturale sullo spazio duale è quella operatoriale che in questo caso diventa

$$\|\varphi\|_{V'} = \|\varphi\|_{V\to\mathbb{K}} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in V\\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{|\varphi(\boldsymbol{v})|}{\|\boldsymbol{v}\|_V}.$$

Siccome $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ è un campo completo, per quanto visto nella scorsa lezione sappiamo che $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ è uno spazio completo. Dunque il duale di qualsiasi spazio normato è sempre uno spazio di Banach.

L'applicazione $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V' \to \mathbb{K}$ definita da

$$(\boldsymbol{v}, \varphi) \mapsto \langle \boldsymbol{v}, \varphi\rangle := \varphi(\boldsymbol{v})$$

viene detta (forma bilineare di) *dualità*.

Il seguente lemma ci assicura che lo spazio duale è uno spazio abbastanza ricco di elementi.

Lemma 1.2. *Dato un vettore non nullo $\boldsymbol{v}_\star$ di uno spazio normato V esiste (almeno) un funzionale $\varphi_\star \in V'$ tale che $\|\varphi_\star\|_{V'} = 1$ e $\varphi_\star(\boldsymbol{v}_\star) = \|\boldsymbol{v}_\star\|_V$.*

Questo lemma si ottiene come diretta applicazione di un importante risultato generale di analisi funzionale, il *teorema di Hahn-Banach*, che riguarda la possibilità di prolungare in modo controllato funzionali lineari definiti su sottospazi. Richiamiamo qui una formulazione del suo enunciato, senza fornire il dettaglio della sua dimostrazione (basata sul *lemma di Zorn*, e dunque sull'assioma della scelta), che meriterebbe uno spazio più ampio di quello a nostra disposizione. Tale teorema

Date: ultimo aggiornamento, 21 novembre 2022.

viene comunque trattato nell'insegnamento di *Analisi Funzionale* al primo anno del corso di laurea magistrale.

Teorema 1.3 (Hahn-Banach)**.** *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sia $p\colon V \to [0, +\infty[$ una funzione* sublineare*, ovvero tale che:*

- $p(t\boldsymbol{v}) = tp(\boldsymbol{v})$ *per ogni* $t > 0$ *e* $\boldsymbol{v} \in V$*;*
- $p(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \leqslant p(\boldsymbol{u}) + p(\boldsymbol{v})$ *per ogni* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$*.*

Sia S un sottospazio vettoriale di V. Sia $f\colon S \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare definita su S e dominata da p, nel senso che $|f(\boldsymbol{v})| \leqslant p(\boldsymbol{v})$ per ogni $\boldsymbol{v} \in S$. Allora esiste una applicazione lineare $F\colon V \to \mathbb{K}$ che prolunga f su tutto V rimanendo dominata da p, ovvero

- $F(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v})$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in S$*;*
- $|F(\boldsymbol{v})| \leqslant p(\boldsymbol{v})$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V$*.*

Dimostrazione del lemma 1.2. La norma $\|\cdot\|_V$ di uno spazio normato V è sempre una funzione sublineare. Dato $\boldsymbol{v}_\star \neq 0$, consideriamo il sottospazio S di dimensione 1 generato da $\boldsymbol{v}_\star$,

$$S = \operatorname{span} \boldsymbol{v}_\star = \{\lambda \boldsymbol{v}_\star \colon \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Definiamo su S il funzionale lineare $f\colon S \to \mathbb{K}$ ponendo

$$f(\lambda \boldsymbol{v}_\star) := \lambda \|\boldsymbol{v}_\star\|_V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Abbiamo

$$|f(\lambda \boldsymbol{v}_\star)| = |\lambda| \|\boldsymbol{v}_\star\|_V = \|\lambda \boldsymbol{v}_\star\|_V, \quad \forall \lambda \boldsymbol{v}_\star \in S.$$

Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare $\varphi_\star\colon V \to \mathbb{K}$ che prolunga f, e quindi in particolare $\varphi_\star(\boldsymbol{v}_\star) = f(\boldsymbol{v}_\star) = \|\boldsymbol{v}_\star\|_V$, e tale che $|\varphi_\star(\boldsymbol{v})| \leqslant \|\boldsymbol{v}\|_V$ per ogni $\boldsymbol{v} \in V$. Ciò significa che $\varphi_\star$ è continuo con $\|\varphi_\star\|_{V'} \leqslant 1$, ed inoltre

$$\|\varphi_\star\|_{V'} \geqslant \frac{|\varphi_\star(\boldsymbol{v}_\star)|}{\|\boldsymbol{v}_\star\|_V} = 1.$$

Dunque $\|\varphi_\star\|_{V'} = 1$. □

Come applicazione del lemma 1.2 possiamo ottenere una caratterizzazione della norma di V, tramite dualità, in termini della norma su V'.

Proposizione 1.4. *Sia V uno spazio normato. Per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ abbiamo*

$$\|\boldsymbol{v}\|_V = \sup_{\substack{\varphi \in V' \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\varphi(\boldsymbol{v})|}{\|\varphi\|_{V'}}.$$

Dimostrazione. Per ogni funzionale $\varphi \in V'$ abbiamo $|\varphi(\boldsymbol{v})| \leqslant \|\varphi\|_{V'} \|\boldsymbol{v}\|_V$ e dunque

$$\|\boldsymbol{v}\|_V \geqslant \sup_{\varphi} \frac{|\varphi(\boldsymbol{v})|}{\|\varphi\|_{V'}}.$$

Quando $\boldsymbol{v} \neq 0$, per il lemma 1.2 esiste un funzionale $\varphi_\star \in V'$ con $\|\varphi_\star\|_{V'} = 1$ e $\varphi_\star(v) = \|\boldsymbol{v}\|_V$, e dunque

$$\|\boldsymbol{v}\|_V = \frac{|\varphi_\star(\boldsymbol{v})|}{\|\varphi_\star\|_{V'}} \leqslant \sup_{\varphi} \frac{|\varphi(\boldsymbol{v})|}{\|\varphi\|_{V'}}.$$

□

Nel caso di uno spazio V con dimensione finita d, abbiamo $V \simeq \mathbb{K}^d$, e i funzionali lineari su V (che sono sempre tutti continui) possono essere rappresentati da matrici di tipo $1 \times d$, ovvero da vettori di $\mathbb{K}^d$ e quindi abbiamo anche $V' \simeq \mathbb{K}^d$. Quindi uno spazio normato di dimensione finita è sempre isomorfo al suo duale.

In dimensione infinita uno spazio normato può avere invece una struttura differente dal suo duale. Vediamo un esempio.

Esempio 1.5 (Duale di ℓ^1)**.** Consideriamo lo spazio ℓ^1, lo spazio delle successioni le cui corrispondenti serie sono assolutamente convergenti, dotato della norma della massa,

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\boldsymbol{e}_n$ la successione formata da tutti zeri, tranne un 1 in corrispondenza della coordinata n-esima; è evidente che $\boldsymbol{e}_n \in \ell^1$ e che $\|\boldsymbol{e}_k\|_1 = 1$.

Sia $\varphi \in (\ell^1)'$ un funzionale lineare continuo su ℓ^1. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, poniamo $a_k = \varphi(\boldsymbol{e}_k)$. In questo modo definiamo una successione $\boldsymbol{a} := (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Siccome φ è continuo abbiamo,

$$|a_k| = |\varphi(\boldsymbol{e}_k)| \leqslant \|\varphi\|_{(\ell^1)'} \cdot \|\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|\varphi\|_{(\ell^1)'}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dunque otteniamo che $\boldsymbol{a} \in \ell^\infty$ e che

$$\|\boldsymbol{a}\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \leqslant \|\varphi\|_{(\ell^1)'}. \tag{1}$$

Ogni successione $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ può essere approssimata da una successione di successioni $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\boldsymbol{\xi}_n = (\xi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \in c_{00}$, ponendo $\xi_{n,k} = x_k$ quando $k \leqslant n$, e $\xi_{n,k} = 0$ quando $k > n$.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\xi}_1 = (x_1, 0, 0, 0, \dots),\\
&\boldsymbol{\xi}_2 = (x_1, x_2, 0, 0, \dots),\\
&\boldsymbol{\xi}_3 = (x_1, x_2, x_3, 0, \dots),\\
&\dots\dots\\
&\boldsymbol{\xi}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots),\\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

Abbiamo infatti che la distanza tra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{\xi}_n$ in ℓ^1

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_n\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|$$

non è altro che la serie resto che otteniamo quando alla serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ sottraiamo la somma parziale dei suoi primi n termini. Sappiamo che quando una serie converge la successione delle serie dei resti è infinitesima. Dunque $\boldsymbol{\xi}_n \to \boldsymbol{x}$ in ℓ^1. Per continuità avremo che $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\boldsymbol{\xi}_n)$. Siccome $\boldsymbol{\xi}_n$ ha solo un numero finito di coordinate non nulle, possiamo scriverlo come combinazione lineare di un numero finito dei vettori $\boldsymbol{e}_k$; più precisamente abbiamo $\boldsymbol{\xi}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k$ e dunque per linearità otteniamo

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}_n) = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k. \tag{2}$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k$ è assolutamente convergente, in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \, \|a\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^1} \|\varphi\|_{(\ell^1)'}.$$

Passando al limite in (2) otteniamo allora una rappresentazione concreta della dualità,

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\boldsymbol{\xi}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k, \tag{3}$$

ed inoltre

$$|\varphi(\boldsymbol{x})| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\,|a_k| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1 ,$$

da cui segue che

$$\|\varphi\|_{(\ell^1)'} \leqslant \|\boldsymbol{a}\|_\infty . \tag{4}$$

Combinando (1) con (4) otteniamo che $\|\varphi\|_{(\ell^1)'} = \|\boldsymbol{a}\|_\infty$.

Si verifica facilmente che l'applicazione che al funzionale $\varphi \in (\ell^1)'$ associa la successione $\boldsymbol{a} \in \ell^\infty$

- è una applicazione lineare da $(\ell^1)'$ in ℓ^∞;
- è suriettiva, in quanto ogni successione $\boldsymbol{a} \in \ell^\infty$ risulta essere associata al funzionale $\varphi(\boldsymbol{x}) := \sum_k x_k a_k$ (vedi (3));
- è iniettiva in quanto se $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ sempre dalla relazione di dualità (3) ricaviamo che $\varphi = 0$.

Si tratta dunque di un isomorfismo lineare che preserva la norma; ciò ci permette di identificare il duale di $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ con lo spazio $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Con procedimenti simili è possibile identificare il duale dello spazio $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ con lo spazio $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ (ricordiamo che c_0 è lo spazio delle successioni infinitesime); mentre invece lo spazio $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è identificabile con il suo stesso duale. Lasciamo i dettagli come esercizio.

1.1. **Biduali e riflessività.** È sempre possibile immergere in modo canonico uno spazio normato V nello spazio *biduale* $V'' = (V')'$, il duale del suo duale. Vediamo come.

Per ogni vettore $\boldsymbol{a} \in V$, consideriamo l'applicazione $J_{\boldsymbol{a}} \colon V' \to \mathbb{K}$ che ad ogni funzionale $\varphi \in V'$ fa corrispondere il valore $\varphi(\boldsymbol{a})$, ovvero $J_{\boldsymbol{a}}(\varphi) := \varphi(\boldsymbol{a})$. Verifichiamo che $J_{\boldsymbol{a}}$ è continuo. Siccome φ è lineare e continuo abbiamo

$$|J_{\boldsymbol{a}}(\varphi)| = |\varphi(\boldsymbol{a})| \leqslant \|\varphi\|_{V'} \|\boldsymbol{a}\|_V , \qquad \forall \varphi \in V',$$

da cui segue la continuità di $J_{\boldsymbol{a}}$ e la stima per la sua norma in V'',

$$\|J_{\boldsymbol{a}}\|_{V''} = \sup_{\substack{\varphi \in V' \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\varphi(\boldsymbol{a})|}{\|\varphi\|_{V'}} \leqslant \|\boldsymbol{a}\|_V .$$

Per il lemma 1.2, dato un vettore $\boldsymbol{a} \in V$ non nullo esiste un funzionale lineare $\varphi_\star \in V'$ tale che $\varphi_\star(\boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|_V$ e $\|\varphi_\star\|_{V'} = 1$; otteniamo così

$$\|J_{\boldsymbol{a}}\|_{V''} \geqslant \frac{|\varphi_\star(\boldsymbol{a})|}{\|\varphi_\star\|_{V'}} = \|\boldsymbol{a}\|_V .$$

Dunque, per ogni $\boldsymbol{a} \in V$ abbiamo che $J_{\boldsymbol{a}} \in V''$ con

$$\|J_{\boldsymbol{a}}\|_{V''} = \|\boldsymbol{a}\|_V . \tag{5}$$

Possiamo quindi definire l'applicazione $J \colon V \to V''$, ponendo $J(\boldsymbol{a}) = J_{\boldsymbol{a}}$. Si verifica facilmente che anche questa applicazione è lineare e continua e dall'identità (5) segue che $\|J\|_{V \to V''} = 1$. Questa applicazione J è iniettiva, infatti se $J_{\boldsymbol{a}} = 0$, ciò significa che $\|\boldsymbol{a}\|_V = \|J_{\boldsymbol{a}}\|_{V''} = 0$ e dunque $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, per cui il nucleo di J contiene solo il vettore nullo. La linearità di J con (5) implica che

$$\|J_{\boldsymbol{a}} - J_{\boldsymbol{b}}\|_{V''} = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|_V , \qquad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V,$$

ovvero J preserva le distanze e questo significa che l'immagine dell'applicazione J è una copia isometrica dello spazio V in V''.

L'applicazione $J \colon V \to V''$ che abbiamo appena descritto è detta *immersione canonica* di V in V''. Quando tale mappa J è anche suriettiva, da cui segue in particolare che V risulta essere isometrico a V'', si dice che lo spazio normato V è *riflessivo*.

Ad esempio, $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio riflessivo, mentre $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ non lo è.

2. Operatore aggiunto

Definiamo ora un'operazione che agisce sugli operatori lineari e continui in modo analogo all'operazione di trasposizione per le matrici.

Definizione 2.1. Siano V e W due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathcal{L}(V, W)$ un operatore lineare e continuo da V in W. Definiamo l'operatore *aggiunto* (o trasposto) di T come l'operatore $T^*\colon W' \to V'$ che ad ogni funzionale lineare e continuo $\psi \in W'$ associa il funzionale $T^*\psi \in V'$ definito da

$$T^*\psi(\boldsymbol{v}) = \psi(T\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

La linearità e la continuità degli operatori così definiti segue dal fatto che si tratta di composizioni di operatori lineari e continui.

Dalla stima operatoriale segue che

$$|T^*\psi(\boldsymbol{v})| = |\psi(T\boldsymbol{v})| \leqslant \|\psi\|_{W'} \|T\|_{V\to W} \|\boldsymbol{v}\|_V, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Dunque

$$\|T^*\psi\|_{V'} \leqslant \|\psi\|_{W'} \|T\|_{V\to W}, \forall \psi \in W'.$$

Da quest'ultima stima ricaviamo che T^* è continuo e che

$$\|T^*\|_{W'\to V'} \leqslant \|T\|_{V\to W}. \tag{6}$$

Proposizione 2.2. *La norma operatoriale dell'operatore aggiunto T^* coincide con la norma operatoriale di T,*

$$\|T^*\|_{W'\to V'} = \|T\|_{V\to W}.$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che vale anche la disuguaglianza in verso opposto rispetto a (6). Per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ per cui si ha $T\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, grazie al lemma 1.2, sappiamo che esiste un funzionale $\psi \in W'$ tale che $\|\psi\|_{W'} = 1$ e $\psi(T\boldsymbol{v}) = \|T\boldsymbol{v}\|_W$. E dunque

$$\|T\boldsymbol{v}\|_W = |\psi(T\boldsymbol{v})| = |T^*\psi(\boldsymbol{v})| \leqslant \|T^*\|_{W'\to V'} \|\psi\|_{W'} \|\boldsymbol{v}\|_V = \|T^*\|_{W'\to V'} \|\boldsymbol{v}\|_V.$$

Tale stima vale, trivialmente, anche quando $T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Ne segue che

$$\|T\|_{V\to W} \leqslant \|T^*\|_{W'\to V'}.$$

□

Quest'uguaglianza tra la norma operatoriale dell'operatore T e del suo aggiunto T^* ci dice che lo studio dell'aggiunto T^* può fornirci molte informazioni sull'operatore T. Inoltre osserviamo che, anche quando V e W non sono spazi di Banach, lo spazio $\mathcal{L}(W', V')$ in cui vive T^* è sempre uno spazio di Banach, essendo V' sempre uno spazio di Banach.

Vediamo un esempio di calcolo di un operatore aggiunto in un caso concreto.

Esempio 2.3. Consideramo l'operatore $T\colon \ell^1 \to \ell^1$ che ad una successione assolutamente sommabile $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associa la successione ottenuta estraendo la sottosuccessione delle coordinate di ordine pari definita da $(T\boldsymbol{x})_k := x_{2k}$, ovvero la k-esima coordinata di $T\boldsymbol{x}$ è la $2k$-esima coordinata di $\boldsymbol{x}$,

$$T\boldsymbol{x} = (x_2, x_4, x_6, x_8, \dots, x_{2k}, \dots).$$

Abbiamo

$$\|T\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |(Tx)_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

e quindi T è continuo, con $\|T\|_{\ell^1\to\ell^1} \leqslant 1$.

L'aggiunto T^* di T opera sul duale di ℓ^1. Possiamo identificare il duale di ℓ^1 con lo spazio ℓ^∞ (vedi esempio 1.5) e dunque di fatto possiamo pensare a T^* come un operatore da ℓ^∞ a ℓ^∞. Data una successione $\boldsymbol{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, ad essa corrisponde il funzionale lineare continuo $\psi \in (\ell^1)'$ definito dalla relazione di dualità

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad \boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \tag{7}$$

Abbiamo allora, per $\boldsymbol{x} \in \ell^1$

$$T^*\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(T\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (T\boldsymbol{x})_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{2k} = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j,$$

dove $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è la successione definita da $b_j = 0$ quando j è dispari e $b_j = a_{j/2}$ quando j è pari. Siccome $\boldsymbol{b}$ è una sottosuccessione di $\boldsymbol{a}$ abbiamo che anche $\boldsymbol{b} \in \ell^\infty$ e $\|\boldsymbol{b}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{a}\|_\infty$. La successione $\boldsymbol{b}$ corrisponde al funzionale $T^*\psi$, tramite l'identificazione tra $(\ell^1)'$ e ℓ^∞ data dalla dualità (7). Possiamo allora identificate l'operatore aggiunto T^* con l'operatore da ℓ^∞ a ℓ^∞ che alla successione $\boldsymbol{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associa la successione $\boldsymbol{b} = T^*\boldsymbol{a}$ definita da

$$(T^*\boldsymbol{a})_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j \text{ è dispari,} \\ a_{j/2}, & \text{se } j \text{ è pari.} \end{cases}$$

3. Esercizi

3.1. **Duale di uno spazio normato.**

Esercizio 3.1. Sia S un sottospazio denso di uno spazio normato V. Spiega come possiamo identificare il duale S' con il duale V'.

Esercizio 3.2. Dimostra che lo spazio $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ può essere identificato con il suo duale, facendo vedere che la relazione di dualità espressa dalla formula

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad \boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2,$$

descrive un isomorfismo che fa corrispondere ad ogni successione $\boldsymbol{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ un funzionale $\psi \in (\ell^2)'$.

Esercizio 3.3. Dimostra che il duale dello spazio $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ può essere identificato con lo spazio $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, facendo vedere che la relazione di dualità espressa dalla formula

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad \boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0,$$

descrive un isomorfismo che fa corrispondere ad ogni successione $\boldsymbol{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ un funzionale $\psi \in (c_0)'$.

Esercizio 3.4. Identifica i duali degli spazi

$$(c_{00}, \|\cdot\|_1), \quad (c_{00}, \|\cdot\|_2), \quad (c_{00}, \|\cdot\|_\infty).$$

Esercizio 3.5. Dimostra che l'immersione canonica $J\colon \ell^2 \to (\ell^2)''$ è suriettiva, e che quindi ℓ^2 è riflessivo.

Esercizio 3.6. Spiega perché $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ non è riflessivo.

3.2. **Operatore aggiunto.**

Esercizio 3.7. Considera gli operatori lineari continui $R, L\colon \ell^2 \to \ell^2$ che agiscono su $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} R\boldsymbol{x} &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots), && \text{[Right shift]} \\ L\boldsymbol{x} &:= (x_2, x_3, x_4, x_5, \dots), && \text{[Left shift]}, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Determina i loro operatori aggiunti, identificando il duale di ℓ^2 con ℓ^2 stesso (usando la relazione di dualità indicata nell'esercizio 3.2).

Esercizio 3.8. Considera l'operatore lineare continuo $T\colon (\ell^1, \|\cdot\|_1) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ che ad una successione sommabile $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associa la successione delle serie dei resti $T\boldsymbol{x}$, definita da $(T\boldsymbol{x})_k := \sum_{j=k}^{\infty} x_j$. Determina una rappresentazione dell'operatore aggiunto di T.