ANALISI 3 - L05: SPAZI DI OPERATORI LINEARI

DAMIANO FOSCHI

In questa lezione mostriamo come lo spazio degli operatori lineari e continui tra due spazi normati ha esso stesso una struttura naturale di spazio normato. Le proprietà di completezza di tale spazio dipendono dalle proprietà di completezza del codominio di tali operatori.

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea

- Operazioni algebriche (somma e prodotto) tra *matrici* [Geometria 1].

1. Lo spazio degli operatori lineari continui tra due spazi normati

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi normati sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Nella scorsa lezione abbiamo visto che un operatore lineare $T\colon V \to W$ è continuo se e solo se esiste una costante $C \geqslant 0$ per la quale vale la stima

$$\|T\boldsymbol{v}\|_W \leqslant C\,\|\boldsymbol{v}\|_V\,, \tag{1}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in V$. In tal caso risulta che

$$C \geqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|T\boldsymbol{v}\|_W}{\|\boldsymbol{v}\|_V}.$$

La quantità a destra risulta finita se e solo se l'operatore è continuo e rappresenta la più piccola costante per la quale vale la stima (1); essa si dice *norma operatoriale* di T, e la indichiamo con $\|T\|_{V\to W}$,

$$\|T\|_{V\to W} := \inf\{C \geqslant 0\colon \forall \boldsymbol{v}\in V,\ \|T\boldsymbol{v}\|_W \leqslant C\,\|\boldsymbol{v}\|_V\} = \sup_{\boldsymbol{v}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|T\boldsymbol{v}\|_W}{\|\boldsymbol{v}\|_V}. \tag{2}$$

In particolare, per un operatore lineare continuo vale sempre la *stima operatoriale*

$$\|T\boldsymbol{v}\|_W \leqslant \|T\|_{V\to W}\,\|\boldsymbol{v}\|_V\,, \quad \forall \boldsymbol{v}\in V.$$

L'insieme di tutti gli operatori lineari da V a W possiede una naturale struttura di spazio vettoriale. Possiamo infatti definire la somma di due operatori lineari $S, T\colon V \to W$ ponendo

$$(S+T)\boldsymbol{v} := S\boldsymbol{v} + T\boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v}\in V.$$

Possiamo definire inoltre il prodotto di un operatore lineare $T\colon V\to W$ per uno scalare $\lambda\in\mathbb{K}$ ponendo

$$(\lambda T)\boldsymbol{v} := \lambda(T\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v}\in V.$$

Dalla linearità di S e T segue immediatamente che gli operatori $S+T$ e λT così definiti sono ancora operatori lineari. L'operatore lineare nullo, che indichiamo sempre con 0, è l'operatore che ad ogni $\boldsymbol{v}\in V$ associa $\boldsymbol{0}\in W$.

Date: ultimo aggiornamento, 24 ottobre 2022.

Lemma 1.1. *Se $S, T\colon V \to W$ sono operatori lineari continui e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora anche gli operatori lineari $S+T$ e λT sono continui, ed inoltre abbiamo*

$$\|S+T\|_{V\to W} \leqslant \|S\|_{V\to W} + \|T\|_{V\to W}\,, \quad \|\lambda T\|_{V\to W} = |\lambda|\,\|T\|_{V\to W}\,.$$

Dimostrazione. Dato $\boldsymbol{v} \in V$, per la disuguaglianza triangolare per la norma di W, e per le stime operatoriali di S e T, abbiamo

$$\begin{aligned}\|(S+T)\boldsymbol{v}\|_W \leqslant \|S\boldsymbol{v}\|_W + \|T\boldsymbol{v}\|_W \leqslant \|S\|_{V\to W}\,\|\boldsymbol{v}\|_W + \|T\|_{V\to W}\,\|\boldsymbol{v}\|_W = \\ = \left(\|S\|_{V\to W} + \|T\|_{V\to W}\right)\|\boldsymbol{v}\|_W\,,\end{aligned}$$

da cui segue che $\|S+T\|_{V\to W} \leqslant \|S\|_{V\to W} + \|T\|_{V\to W}$.

Per la definizione di norma operatoriale, e per l'omogeneità della norma in W, abbiamo poi

$$\|\lambda T\|_{V\to W} = \sup_{\boldsymbol{v}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\lambda(T\boldsymbol{v})\|_W}{\|\boldsymbol{v}\|_V} = \sup_{\boldsymbol{v}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}} |\lambda|\,\frac{\|T\boldsymbol{v}\|_W}{\|\boldsymbol{v}\|_V} = |\lambda|\,\|T\|_{V\to W}\,.$$

□

Osserviamo inoltre che se $\|T\|_{V\to W} = 0$, allora necessariamente $\|T\boldsymbol{v}\| = 0$, e dunque $T\boldsymbol{v} = 0$, per ogni $\boldsymbol{v} \in V$, quindi T deve essere l'operatore nullo. Risulta così, dal lemma e da quest'ultima osservazione, che la norma operatoriale gode di tutte le proprietà di una norma che agisce sullo spazio degli operatori lineari continui.

Definizione 1.2. Dati due spazi normati V e W indichiamo con $\mathcal{L}(V,W)$ lo spazio degli operatori lineari e continui da V a W.

$$\mathcal{L}(V,W) := \{T\colon V \to W : T \text{ è lineare e continuo}\}\,.$$

Per quanto visto sopra abbiamo che $(\mathcal{L}(V,W), \|\cdot\|_{V\to W})$ dotato della norma operatoriale (2) è uno spazio normato.

Esempio 1.3. Se V e W sono due spazi normati di dimensione finita, con $\dim V = m$ e $\dim W = n$ allora, come abbiamo visto nella lezione precedente, una volta fissate delle basi per V e per W, esiste una corrispondenza biunivoca tra lo spazio $\mathcal{L}(V,W)$ degli operatori lineari e continui da V a W e lo spazio $M_{\mathbb{K}}(n,m)$ delle matrici n per m a coefficienti in $\mathbb{K}$. Ad esempio, possiamo identificare $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ con $M_{\mathbb{K}}(n,m)$ rappresentando ogni operatore lineare con applicazioni della forma $\boldsymbol{x} \mapsto M\boldsymbol{x}$ dove $M \in M_{\mathbb{K}}(n,m)$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m$ è inteso come vettore colonna. Se consideriamo $\mathbb{K}^m$ e $\mathbb{K}^n$ normati dalle rispettive norme euclidee, che indichiamo con $\|\cdot\|_2$, possiamo dunque definire su $M_{\mathbb{K}}(n,m)$ una norma $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ indotta dalla norma operatoriale ponendo

$$\|M\|_{\mathrm{op}} := \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^m\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|M\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^m\\ \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}}} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^m M_{jk}x_k\right|^2}{\sum_{k=1}^m |x_k|^2}}. \tag{3}$$

Lo spazio delle matrici ha dimensione finita, $\dim M_{\mathbb{K}}(n,m) = nm$, dunque si tratta di uno spazio completo e avremo che la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ sarà equivalente alla norma euclidea definita da

$$\|M\|_2 := \sqrt{\sum_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,m}} |M_{jk}|^2}. \tag{4}$$

In generale il fatto che $\mathcal{L}(V,W)$ sia uno spazio completo dipende dalle proprietà di completezza dello spazio di arrivo W.

Teorema 1.4. *Se W è uno spazio di Banach, allora anche $\mathcal{L}(V,W)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che se W è completo anche $\mathcal{L}(V,W)$ lo è. Sia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(V,W)$. Ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|T_n - T_m\|_{V\to W} < \varepsilon,$$

per ogni $n, m \geqslant n_\varepsilon$. Abbiamo inoltre che la successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, essendo di Cauchy, è limitata in $\mathcal{L}(V,W)$ e dunque esiste $C > 0$ tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{V\to W} \leqslant C.$$

Per ogni $\boldsymbol{v} \in V$, per la stima operatoriale, abbiamo che

$$\|T_n\boldsymbol{v} - T_m\boldsymbol{v}\|_W \leqslant \|T_n - T_m\|_{V\to W} \|\boldsymbol{v}\|_V \leqslant \varepsilon \|\boldsymbol{v}\|_V\,, \tag{5}$$

quando $n, m \geqslant n_\varepsilon$. Dunque la successione $(T_n\boldsymbol{v})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in W, e quindi è convergente ad un punto di W, essendo W uno spazio completo. Possiamo quindi definire l'applicazione $T\colon V \to W$ ponendo

$$T\boldsymbol{v} := \lim_{n\to+\infty} T_n\boldsymbol{v}.$$

Tale applicazione risulta essere lineare come conseguenza della linearità dei T_n e della linearità dell'operazione di limite. Abbiamo inoltre che T è continuo, in quanto per la continuità della norma e la limitatezza della successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abbiamo

$$\|T\boldsymbol{v}\|_W = \lim_{n\to+\infty} \|T_n\boldsymbol{v}\|_W \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\boldsymbol{v}\|_W \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{V\to W} \|\boldsymbol{v}\|_V \leqslant C \|\boldsymbol{v}\|_V\,.$$

Dunque $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Passando al limite per $m \to +\infty$ dalla stima (5) segue che

$$\|T_n - T\|_{V\to W} = \sup_{\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|T_n\boldsymbol{v} - T\boldsymbol{v}\|_W}{\|\boldsymbol{v}\|_V} \leqslant \varepsilon,$$

per ogni $n \geqslant n_\varepsilon$. Dunque la successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathcal{L}(V,W)$ e ha come limite l'operatore T. □

2. Composizione di operatori e algebra degli operatori

Quando V e W sono spazi di dimensione finita su $\mathbb{K}$, utilizzando coordinate rispetto a basi fissate, possiamo identificare lo spazio $\mathcal{L}(V,W)$ con lo spazio delle matrici $m \times n$ a valori in $\mathbb{K}$, dove $m = \dim V$ e $n = \dim W$. Con questa identificzione, al prodotto tra matrici corrisponde la composizione degli operatori.

Anche in spazi di dimensione infinita possiamo considerare composizioni di operatori. La composizione di operatori lineari è ancora un'operatore lineare. La composizione di due funzioni continue è ancora una funzione continua. Dunque, se U, V, W sono tre spazi normati, dati due operatori lineari continui $S \in \mathcal{L}(U,V)$ e $T \in \mathcal{L}(V,W)$, la loro composizione, che indichiamo con TS ed è definita da

$$TS\colon U \to W, \quad (TS)u = T(Su),\ \forall u \in U,$$

risulta essere ancora un operatore lineare e continuo, $TS \in \mathcal{L}(U,W)$. Inoltre, per le stime operatoriali di T e S abbiamo

$$\|(TS)u\|_W = \|T(Su)\|_W \leqslant \|T\|_{V\to W} \|Su\|_V \leqslant \|T\|_{V\to W} \|S\|_{U\to V} \|u\|_U\,,$$

e quindi vale la stima

$$\|TS\|_{U\to W} \leqslant \|T\|_{V\to W} \|S\|_{U\to V}\,.$$

Come caso particolare possiamo considerare lo spazio degli operatori lineari e continui che agiscono su uno spazio normato V,

$$\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,V) = \{T\colon V \to V : T \text{ è lineare e continuo}\}\,,$$

dotato della norma operatoriale. La composizione di operatori definisce un'operazione associativa di prodotto che rende $\mathcal{L}(V)$ un'algebra, detta *algebra degli operatori su* V; la proprietà

$$\|TS\|_{V\to V} \leqslant \|T\|_{V\to V}\,\|S\|_{V\to V}\,, \quad \forall S,T\in\mathcal{L}(V),$$

rende $\mathcal{L}(V)$ una cosidetta *algebra normata*. Quando V è uno spazio di Banach, per il teorema 1.4, anche $\mathcal{L}(V)$ è uno spazio di Banach.

3. Esercizi

3.1. **Lo spazio degli operatori lineari continui tra due spazi normati.**

Esercizio 3.1. Dimostra che la norma operatoriale su $\mathcal{L}(V,W)$ si può anche scrivere come

$$\|T\|_{V\to W} = \sup\bigl\{\|Tv\|_W : \|v\|_V \leqslant 1\bigr\}.$$

Esercizio 3.2. Sia S un sottospazio *denso* di uno spazio normato V; S può essere esso stesso considerato uno spazio normato dalla norma di V. Sia W uno spazio di Banach. Sia $L\colon S\to W$ un operatore lineare e continuo. Dimostra che esiste un unico operatore lineare continuo $\tilde{L}\colon V\to W$ che prolunga L su V, ovvero tale che la restrizione di $\tilde{L}$ a S coincide con L. Dimostra inoltre che si ha

$$\bigl\|\tilde{L}\bigr\|_{V\to W} = \bigl\|L\bigr\|_{S\to W}.$$

Esercizio 3.3. Nell'esempio 1.3 si è osservato che le norme $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ e $\|\cdot\|_2$ definite in (3) e (4) sono due norme equivalenti sullo spazio delle matrici $\mathcal{M} := M_{\mathbb{K}}(n,m)$.

- Determina esplicitamente due costanti A e B per le quali si ha che
$$\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant A\,\|M\|_2\,, \quad \|M\|_2 \leqslant B\,\|M\|_{\mathrm{op}}\,, \quad \forall M\in\mathcal{M}.$$
- Determina le norme operatoriali dell'operatore identità $\mathrm{id}\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, definito da $\mathrm{id}(M)=M$, sia come operatore da $(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ in $(\mathcal{M},\|\cdot\|_2)$ e sia come operatore da $(\mathcal{M},\|\cdot\|_2)$ in $(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathrm{op}})$.

3.2. **Composizione di operatori e algebra degli operatori.**

Sia V uno spazio di Banach e sia $\mathcal{L}(V)$ la corrispondente algebra degli operatori su V e sia $I\colon V\to V$ l'operatore identità su V. Per ogni $T\in\mathcal{L}(V)$ possiamo definire per induzione le potenze dell'operatore T ponendo $T^0 := I$ e $T^{n+1} := T\circ T^n$ per ogni $n\in\mathbb{N}_0$,

$$T^0(x)=x, \qquad T^1(x)=T(x), \qquad T^{n+1}(x)=T(T^n(x)).$$

È possibile quindi definire anche funzioni polinomiali di operatori: dato un polinomio di grado d a coefficienti in $\mathbb{K}$

$$p(x)=\sum_{k=1}^{d} c_k x^k$$

possiamo definire l'applicazione $p\colon\mathcal{L}(V)\to\mathcal{L}(V)$ ponendo

$$p(T) := \sum_{k=1}^{d} c_k T^k.$$

Questo ci permette di definire anche serie di potenze di operatori come limite di polinomi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k T^k \tag{6}$$

quando tale limite è convergente. Le serie di potenze di operatori possiedono proprietà analoghe a quelle delle serie di potenze numeriche.

Esercizio 3.4 (Criterio della radice n-esima per serie di operatori). Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una successione in $\mathbb{K}$ e sia $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Dimostra che per ogni operatore $T \in \mathcal{L}(V)$ tale che $\|T\| < 1/L$ si ha che la serie di potenze (6) è convergente.

Esercizio 3.5. Utilizzando le serie di potenze di operatori spiega come si può dare senso a funzioni del tipo $\exp(T)$, $\cos(T)$, $\sin(T)$, $(I-T)^{-1}$ dove $T \in \mathcal{L}(V)$. [*Usa il fatto che le corrispondenti funzioni di variabile scalare sono sviluppabili in serie di potenze.*]