ANALISI 3 - L03:
ESEMPI DI SPAZI NORMATI

Consideriamo ora alcuni esempi di spazi normati di dimensione infinita che si possono costruire utilizzando successioni numeriche o funzioni numeriche dotate di un certo grado di regolarità.

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione, è necessario che lo studente abbia compreso i contenuti delle lezioni precedenti, e che siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- proprietà principali di *successioni* e *serie* numeriche, in particolare le proprietà di convergenza [Analisi 1, Geometria 2];
- il *teorema fondamentale del calcolo* [Analisi 1];
- *uniforme continuità* e *teorema di Heine-Cantor* [Analisi 1, Geometria 2].

1. Spazi di successioni

Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori nel campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ non è altro che una funzione $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ che ad ogni indice naturale $n \in \mathbb{N}$ associa un valore scalare $x_n \in \mathbb{K}$. Possiamo immaginarla anche come una sequenza infinita, ma numerabile, di valori:

$$\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\,.$$

L'insieme di tutte le successioni a valori in $\mathbb{K}$ non è altro che l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{K}$ e lo denotiamo con $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si tratta di uno spazio vettoriale, dove la somma di due successioni e il prodotto per scalare sono definiti in modo naturale da

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \qquad \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e ogni $\lambda \in \mathbb{K}$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con $\boldsymbol{e}_k$ la successione che ha tutte le componenti nulle tranne la k-esima che poniamo uguale a 1,

$$\boldsymbol{e}_k = (e_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} := \big(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } k}}{1}, 0, \dots\big), \qquad e_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k, \\ 1, & \text{se } n = k. \end{cases} \tag{1}$$

Osservazione 1.1. Attenzione l'insieme $E := \{\boldsymbol{e}_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ di tutte le successioni $\boldsymbol{e}_k$ definite in (1) è un insieme di vettori linearmente indipendenti, ma non forma una base algebrica (base di Hamel) per lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ di tutte le possibili successioni.

Definizione 1.2. Lo spazio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ è uno spazio enorme sul quale è difficile definire norme adatte ad applicazioni interessanti. Spesso risulta più interessante considerare dei suoi sottospazi più piccoli, ma sempre di dimensione infinita, formati da successioni che verificano qualche condizione di regolarità (come ad esempio l'essere limitate, o avere limite, o essere sommabili). Vediamone alcuni:

- spazio delle successioni definitivamente nulle:

$$c_{00} := \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \exists n_\star \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_\star, x_n = 0\big\}\,;$$

Date: ultimo aggiornamento, 15 gennaio 2023.

- spazio delle successioni a decadimento rapido:

$$s := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \forall p > 0,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \bigl(n^p \, |x_n|\bigr) < +\infty \right\};$$

- spazio delle successioni infinitesime:

$$c_0 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\};$$

- spazio delle successioni convergenti:

$$c := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{K} \right\};$$

- spazio delle successioni limitate:

$$\ell^\infty := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\};$$

- spazio delle successioni assolutamente sommabili:

$$\ell^1 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\};$$

- spazio delle successioni di quadrato sommabile:

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Proposizione 1.3. *Tra gli spazi vettoriali di successioni definiti sopra valgono le seguenti inclusioni strette :*

$$c_{00} \subset s \subset \ell^1 \subset \ell^2 \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Dimostriamo l'inclusione

$$\ell^1 \subset \ell^2, \tag{2}$$

e lasciamo la verifica delle rimanenti come esercizio. Se $x \in \ell^1$ significa che la serie $S := \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$ è convergente, quindi la successione $|x_n|$ risulta essere infinitesima e dunque è limitata. Sia $M := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$, abbiamo allora che

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^\infty M \, |x_n| = MS < \infty,$$

e dunque $x \in \ell^2$.

La successione armonica

$$a = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

appartiene a ℓ^2 ma non a ℓ^1, in quanto $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ converge, mentre $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverge. Ciò prova che l'inclusione (2) è un'inclusione stretta.

1.1. **Norma uniforme.** Sugli spazi ℓ^∞, c e c_0 si usa solitamente considerare la norma uniforme:

$$\|(x_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|;$$

nel caso dello spazio c_0 questo "sup" è di fatto un "max". La verifica delle proprietà di norma per la norma uniforme è semplice; vediamo qui la disuguaglianza triangolare, che segue facilmente dalle proprietà dell'estremo superiore: date due successioni (x_n) e (y_n) abbiamo

$$|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

da cui segue che

$$\sup_k |x_k + y_k| \leqslant \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n| .$$

Teorema 1.4. *Gli spazi normati* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *e* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *sono spazi di Banach.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione solo per ℓ^∞ e lasciamo gli altri due come esercizio.

Dobbiamo provare che ogni successione di Cauchy (rispetto alla norma uniforme) di elementi in ℓ^∞ converge ad un elemento di ℓ^∞.

Attenzione: Stiamo parlando di una successione i cui termini sono essi stessi delle successioni; dunque una successione di successioni! Cerchiamo di non fare confusione con gli indici che usiamo.

Sia dunque $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in ℓ^∞ con la norma uniforme. Ciò significa che ogni termine $\boldsymbol{x}_k$ è una successione di valori scalari,

$$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}, \dots) ;$$

inoltre abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $j, k \geqslant k_\varepsilon$ si ha

$$\sup_n |x_{j,n} - x_{k,n}| = \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k\|_\infty < \varepsilon. \tag{3}$$

Ne deduciamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $(x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ delle n-esime coordinate è una successione di Cauchy in $\mathbb{K}$. Essendo $\mathbb{K}$ completo allora abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste il limite

$$x_{\star,n} := \lim_{k\to\infty} x_{k,n} \in \mathbb{K}. \tag{4}$$

Questo ci permette di definire una successione $\boldsymbol{x}_\star := (x_{\star,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Siccome la successione $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in ℓ^∞, essa è anche una successione limitata in ℓ^∞, e dunque esisterà una costante finita M tale che

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} |x_{k,n}| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{x}_k\|_\infty \leqslant M. \tag{5}$$

Da (4) e (5) ricaviamo che

$$|x_{\star,n}| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{k,n}| \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque $\boldsymbol{x}_\star \in \ell^\infty$ con $\|\boldsymbol{x}_\star\|_\infty \leqslant M$. Passando al limite per $k \to \infty$ nella disuguaglianza (3) otteniamo che quando $j \geqslant k_\varepsilon$ si ha $|x_{j,n} - x_{\star,n}| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque $\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_\star\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ciò implica che la successione $(\boldsymbol{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $\boldsymbol{x}_\star$ rispetto alla norma uniforme. □

1.2. **Norma ℓ^1.** Sullo spazio ℓ^1 la norma canonica è quella della massa, o dell'assoluta sommabilità:

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 := \sum_n |x_n| .$$

La disuguaglianza triangolare segue dal fatto che se due successioni hanno serie convergenti anche la successione somma ha serie convergente alla somma delle due serie:

$$\sum_n |x_n + y_n| \leqslant \sum_n (|x_n| + |y_n|) = \sum_n |x_n| + \sum_n |y_n| .$$

Lemma 1.5. *Su* ℓ^1 *la norma della massa domina la norma uniforme:*

$$\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1 .$$

Dimostrazione. La verifica è immediata, in quanto

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_n |x_n| \leqslant \sum_n |x_n| = \|\boldsymbol{x}\|_1$$

per ogni successione $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. □

Teorema 1.6. *Lo spazio normato $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy di successioni in ℓ^1 rispetto alla norma della massa: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $j, k \geqslant k_\varepsilon$ si ha $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j\|_1 < \varepsilon$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $(x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ delle n-esime coordinate è di Cauchy in $\mathbb{K}$, in quanto

$$|x_{k,n} - x_{j,n}| \leqslant \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j\|_1 ,$$

essendo $\mathbb{K}$ completo esiste allora il limite $x_{\star,n} := \lim_{k\to\infty} x_{k,n}$.

Verifichiamo che la successione $\boldsymbol{x}_\star = (x_{\star,n})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiene a ℓ^1. Procediamo approssimando ℓ^1 con spazi di dimensione finita. Sia $d \in \mathbb{N}$. Siccome $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy è anche limitata in ℓ^1 e dunque esiste una costante M tale che

$$\sum_{n=1}^{d} |x_{k,n}| \leqslant \|\boldsymbol{x}_k\|_1 \leqslant M, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $k \to \infty$ otteniamo che $\sum_{n=1}^{d} |x_{\star,n}| \leqslant M$, con M indipendente da d; passando al limite per $d \to \infty$ ricaviamo che $\|\boldsymbol{x}_\star\|_1 \leqslant M$ e quindi $\boldsymbol{x}_\star \in \ell^1$.

Ora verifichiamo che $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\boldsymbol{x}_\star$ rispetto alla norma della massa. Quando $j, k \geqslant k_\varepsilon$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{d} |x_{k,n} - x_{j,n}| \leqslant \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j\|_1 < \varepsilon.$$

Passando al limite per $j \to \infty$ ricaviamo che

$$\sum_{n=1}^{d} |x_{k,n} - x_{\star,n}| \leqslant \varepsilon,$$

per ogni d, e per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$; passando al limite per $d \to \infty$ ricaviamo che

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_\star\|_1 \leqslant \varepsilon,$$

per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Ciò significa che $\boldsymbol{x}_k$ converge a $\boldsymbol{x}_\star$ per $k \to \infty$ rispetto alla norma della massa. □

1.3. **Norma ℓ^2.** Sullo spazio ℓ^2 la norma canonica è quella euclidea (nella sua versione infinito dimensionale):

$$\|(x_n)\|_2 := \sqrt{\sum_n |x_n|^2}.$$

La disuguaglianza triangolare la si può ottenere dal caso di dimensione finita, passando al limite:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2} = \lim_{d\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{d} |x_n + y_n|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{d\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{d} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{d} |y_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}.$$

Teorema 1.7. *Lo spazio normato $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach.*

Lasciamo la dimostrazione come esercizio.

2. Spazi di funzioni regolari

Abbiamo già visto nella scorsa lezione che lo spazio $C[a,b]$ delle funzioni continue a valori scalari definite sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, dotato della norma uniforme $\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, risulta essere uno spazio di Banach. Non tutte le funzioni continue sono derivabili, ma tutte le funzioni derivabili sono continue. Possiamo allora considerare i sottospazi di $C[a,b]$ formati dalle funzioni di classe C^k, ovvero dalle funzioni che sono derivabili fino a k volte con tutte le derivate continue. Definiamo quindi

$$C^k[a,b] := \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{C} \colon f \text{ derivabile } k \text{ volte con } f^{(k)} \text{ continua} \right\},$$

per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ (convenendo che $C^0[a,b] = C[a,b]$).

Proposizione 2.1. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ il sottospazio $C^k[a,b]$ è denso in $C[a,b]$ rispetto alla topologia della norma uniforme.*

Osservazione 2.2. Essendo $C^k[a,b]$ un sottospazio proprio di $C[a,b]$ per ogni $k \geqslant 1$ (in quanto esistono funzioni continue che non sono derivabili, o la cui derivata non è continua), ne segue che $C^k[a,b]$ non è un sottospazio chiuso di $C[a,b]$ rispetto alla norma uniforme. Dunque, quando $k \geqslant 1$ lo spazio $C^k[a,b]$ non è uno spazio di Banach rispetto alla norma uniforme.

La dimostrazione della proposizione 2.1 nel caso $k = 1$ si puo ottenere come conseguenza immediata del seguente lemma. La dimostrazione della proposizione 2.1 nei casi $k \geqslant 2$ la lasciamo indicata con una traccia negli esercizi (verrà poi ripresa in un contesto con maggiore generalità quando parleremo di convoluzioni con mollificatori).

Lemma 2.3 (Approssimazione tramite medie mobili)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Per ogni $r > 0$ definiamo la funzione $f_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ponendo*

$$f_r(x) := \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ovvero $f_r(x)$ è il valore medio di f sull'intorno di centro x e raggio r. Allora per ogni $r > 0$ la funzione f_r è di classe C^1 e per $r \to 0^+$ abbiamo che f_r converge uniformemente ad f su ogni intervallo chiuso e limitato.

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f; dunque F è di classe C^1 con $F' = f$. Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo che

$$f_r(x) = \frac{1}{2r}\big(F(x+r) - F(x-r)\big)$$

e quindi anche f_r è di classe C^1 e la sua derivata è

$$f_r'(x) = \frac{1}{2r}\big(f(x+r) - f(x-r)\big).$$

Una funzione costante coincide sempre con il suo valore medio, e dunque, usando la linearità dell'integrale, otteniamo

$$f_r(x) - f(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \left(f(t) - f(x)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Consideriamo un intervallo limitato $[a,b]$. Per il teorema di Heine-Cantor, essendo continua f è anche uniformemente continua sull'intervallo più ampio $[a-1, b+1]$, ovvero

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall t, x \in [a-1, b+1], \quad |t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon,$$

con δ che può dipendere solo da ε e che possiamo supporre minore di 1. Dunque quando $0 < r < \delta$ e $x \in [a,b]$ abbiamo che

$$|f_r(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} \varepsilon \, \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ciò significa che

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{x\in[a,b]} |f_r(x) - f(x)| = 0,$$

ovvero che f_r converge uniformemente ad f su $[a,b]$. □

La semplice norma uniforme non coglie le peculiarità di regolarità delle funzioni differenziabili delle classi C^k. Le proprietà di limitatezza di una funzione non sono necessariamente correlate alle proprietà di limitatezza delle sue derivate. Ad esempio, semplicemente riscalando la variabile indipendente osserviamo che se poniamo $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$, per $\lambda > 0$, abbiamo che le norme uniformi delle derivate scalano con gradi di omogeneità diversi,

$$\sup |f_\lambda| = \sup |f|, \quad \sup |f_\lambda'| = \lambda \sup |f'|, \quad \dots, \quad \sup \left|f_\lambda^{(k)}\right| = \lambda^k \sup \left|f^{(k)}\right|.$$

Introduciamo allora delle norme tengano conto anche delle derivate della funzione e definiamo:

$$\|f\|_{C^k[a,b]} := \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(j)}(x)\right| = \sum_{j=0}^{k} \left\|f^{(j)}\right\|_\infty . \tag{6}$$

Con questa norma $C^k[a,b]$ risulta essere completo.

Proposizione 2.4. *Lo spazio $C^k[a,b]$ dotato della norma $\|\cdot\|_{C^k[a,b]}$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni di classe C^k che è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{C^k[a,b]}$. Siccome, per ogni $j = 0,1,2,\dots,k$ vale la stima

$$\left\|f_n^{(j)} - f_m^{(j)}\right\|_\infty \leqslant \|f_n - f_m\|_{C^k[a,b]},$$

ne segue che la successione delle derivate $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ che è Banach. Dunque per ogni $j = 0,1,2,\dots,k$ esisterà una funzione $g_j \in C[a,b]$ che è il limite uniforme delle derivate $f_n^{(j)}$,

$$g_j(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(x).$$

Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo

$$f_n^{(j)}(x) = f_n^{(j)}(a) + \int_a^x f_n^{(j+1)}(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \forall j = 0,1,\dots,k-1.$$

La convergenza uniforme implica convergenza puntuale e anche convergenza sotto al segno di integrale, quindi passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$g_j(x) = g_j(a) + \int_a^x g_{j+1}(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \forall j = 0,1,\dots,k-1.$$

In particolare, sempre per il teorema fondamentale del calcolo, segue che g_j è primitiva di g_{j+1}. Dunque se poniamo $f := g_0$ avremo che $f' = g_1$, $f'' = g_2$ e così via fino a $f^{(k)} = g_k$. Abbiamo così che $f_n^{(j)}$ converge uniformemente a $f^{(j)}$ quando $n \to \infty$ per ogni $j = 0,1,\dots,k$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f_n^{(j)} - f^{(j)}\right\|_\infty = 0.$$

Siccome la somma di un numero finito di infinitesimi è infinitesima, otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k[a,b]} = 0,$$

e dunque f_n converge ad f in $C^k[a,b]$. □

3. Esercizi

3.1. Spazi di successioni.

Esercizio 3.1. Dimostra l'affermazione riportata nell'osservazione 1.1 e identifica chi è lo spazio $\mathrm{span}(E)$ generato dall'insieme E.

Esercizio 3.2. È possibile definire una norma sullo spazio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ di tutte le successioni a valori in $\mathbb{K}$?

Esercizio 3.3. Verifica che gli insiemi $c_{00}, s, \ell^1, \ell^2, c_0, c, \ell^\infty$ introdotti nella Definizione 1.2 sono effettivamente dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^N$.

Esercizio 3.4. Spiega perché quando $x \in c_0$ abbiamo che $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Esercizio 3.5. Completa la dimostrazione della Proposizione 1.3.

Esercizio 3.6. Verifica che la formula $\|(x_n)\|_\flat := \sum_n n^{-2} |x_n|$ definisce una norma su ℓ^∞ (e dunque anche su tutti i suoi sottospazi).

Esercizio 3.7. Verifica che la formula $\|(x_n)\|_\sharp := \sum_n n^2 |x_n|$ definisce una norma su c_{00} ma non su ℓ^1.

Esercizio 3.8. Dimostra che $(c, \|\cdot\|_\infty)$ e $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sono spazi di Banach. (Basta verificare che c e c_0 sono sottospazi chiusi di ℓ^∞ rispetto alla topologia della norma uniforme.)

Esercizio 3.9. Dimostra che ℓ^1 non è un sottospazio chiuso in ℓ^∞ rispetto alla topologia della norma uniforme. (Considera ad esempio la successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ formata dalle successioni $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ definite da $x_{k,n} = 1/n$ se $n \leqslant k$ e $x_{n,k} = 0$ se $n > k$; verifica che $x_k \in \ell^1$ per ogni k, che $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto alla norma uniforme, ma il suo limite uniforme non appartiene a ℓ^1.)

Esercizio 3.10. Dimostra che $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 3.11. Dimostra che $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ e $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ non sono completi, ma sono densi in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Esercizio 3.12. Dimostra che $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ non è completo, ma è denso in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

3.2. Spazi di funzioni regolari.

Esercizio 3.13. Fornisci esempi di funzioni continue sull'intervallo $[-1,1]$ tali che:

- la funzione non è derivabile;
- la funzione è derivabile ma la cui derivata non è continua;
- la funzione è di classe C^1 ma non è di classe C^2.

Esercizio 3.14. Per ogni $r > 0$, sia $\mathcal{M}_r$ l'operatore che ad una funzione continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ associa la funzione *media mobile* di f con raggio r,

$$\mathcal{M}_r[f](x) := \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathcal{M}_r^n$ l'operatore di media mobile iterato n volte, ovvero:

$$\mathcal{M}_r^1[f] := \mathcal{M}_r[f], \qquad \mathcal{M}_r^{n+1}[f] := \mathcal{M}_r\left[\mathcal{M}_r^n[f]\right].$$

Abbiamo visto nel Lemma 2.3 che quando f è continua allora $\mathcal{M}_r[f]$ è di classe C^1 e converge uniformemente ad f sugli intervalli limitati per $r \to 0^+$.

- Per ogni $k \in \mathbb{N}$, verifica che se f è di classe C^k allora $\mathcal{M}_r[f]$ è una funzione di classe C^{k+1}.
- Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, verifica che se f è di classe C^k allora $\mathcal{M}_r^n[f]$ è una funzione di classe C^{k+n}.
- Verifica che quando f è continua $\mathcal{M}_r^2[f]$ converge uniformemente ad f sugli intervalli limitati per $r \to 0^+$.
- Per ogni $n > 2$ verifica che quando f è continua $\mathcal{M}_r^n[f]$ converge uniformemente ad f sugli intervalli limitati per $r \to 0^+$.

Esercizio 3.15. Verifica che la formula (6) definisce effettivamente una norma su $C^k[a,b]$.

Esercizio 3.16. Sia $k \in \mathbb{N}$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Verifica che le seguenti quantità definiscono delle norme su $C^k[a,b]$ e che sono tutte equivalenti alla norma definita in (6):

$$\|f\|_{\heartsuit} := \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(j)}(x) \right|;$$

$$\|f\|_{\clubsuit} := \sqrt{\sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(j)}(x) \right|^2};$$

$$\|f\|_{\diamondsuit} := \|f\|_\infty + \left\| f^{(k)} \right\|_\infty;$$

$$\|f\|_{\spadesuit} := \sum_{j=0}^{k-1} \left| f\Big(a + \frac{j}{k}(b-a)\Big) \right| + \left\| f^{(k)} \right\|_\infty.$$