ANALISI 3 (A.A. 2022-2023) - LEZIONE 01: SPAZI VETTORIALI NORMATI

DAMIANO FOSCHI

Prerequisiti

Per poter comprendere il contenuto di questa lezione è necessario che allo studente siano ben noti i seguenti concetti, che sono stati introdotti negli insegnamenti dei primi due anni del corso di laurea:

- definizione di *spazio vettoriale* e sue principali proprietà algebriche [Geometria 1];
- definizione di *norma euclidea* per vettori in $\mathbb{R}^n$ e sue proprietà principali [Geometria 1];
- definizione di *spazio metrico* e di *spazio topologico* [Geometria 2];
- definizione di *limite di successioni* e di *successione di Cauchy* [Analisi 1];
- *teorema di Weierstrass* per funzioni continue su domini compatti [Analisi 1, 2];
- definizione e proprietà principali della *convergenza uniforme* per successioni di funzioni [Analisi 2];
- *Teorema della convergenza dominata di Lebesgue* [Analisi 2].

Nel seguito indicheremo con $\mathbb{K}$ il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ oppure il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, e lo chiameremo *campo degli scalari*; per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ indichiamo con $|\lambda|$ il valore assoluto del numero reale λ quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, oppure il modulo del numero complesso λ quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Norma

Una norma su uno spazio vettoriale ci fornisce uno strumento per misurare la lunghezza dei vettori, in una maniera che sia compatibile con la struttura lineare. Tramite essa potremo quindi misurare distanze e dotare lo spazio di una struttura metrica e topologica.

Ispirandoci a quello che già conosciamo per vettori in spazi euclidei ci aspettiamo che una buona nozione di lunghezza per vettori possieda almeno le seguenti proprietà:

- **proprietà di omogeneità**: quando moltiplichiamo un vettore per uno scalare la lunghezza viene moltiplicata per il modulo dello scalare;
- **disuguaglianza triangolare**: la lunghezza di una somma di vettori non supera mai la somma delle lunghezze dei singoli vettori.

Queste due proprietà caratterizzano il concetto di seminorma.

Definizione 1.1. Una *seminorma* su V è una applicazione $p\colon V \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:

(a) per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ e ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si ha $p(\lambda \boldsymbol{v}) = |\lambda|\, p(\boldsymbol{v})$;
(b) per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vale la *disuguaglianza triangolare*

$$p(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \leqslant p(\boldsymbol{u}) + p(\boldsymbol{v}).$$

Date: ultimo aggiornamento, 4 ottobre 2022.

La proprietà (a) implica immediatamente che la seminorma del vettore nullo è sempre nulla,

$$p(\mathbf{0}) = p(0\,\mathbf{0}) = |0|\,p(\mathbf{0}) = 0\,p(\mathbf{0}) = 0;$$

ed inoltre che le seminorme di due vettori opposti sono uguali,

$$p(-\boldsymbol{v}) = p((-1)\boldsymbol{v}) = |-1|\,p(\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{v}).$$

Da queste proprietà segue anche che una seminorma ha necessariamente valori non negativi, infatti

$$0 = p(\mathbf{0}) = p(\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})) \leqslant p(\boldsymbol{v}) + p(-\boldsymbol{v}) = 2p(\boldsymbol{v}) \implies p(\boldsymbol{v}) \geqslant 0.$$

Utilizzando la proprietà (b) otteniamo

$$p(\boldsymbol{u}) = p(\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})) \leqslant p(\boldsymbol{v}) + p(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}),$$

da cui segue che $p(\boldsymbol{u}) - p(\boldsymbol{v}) \leqslant p(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$; scambiando il ruolo dei due vettori abbiamo anche $p(\boldsymbol{v}) - p(\boldsymbol{u}) \leqslant p(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$; quindi per una seminorma vale anche la *disuguaglianza triangolare rovesciata*

$$|p(\boldsymbol{u}) - p(\boldsymbol{v})| \leqslant p(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}).$$

Esempio 1.2. La funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := |x + 2y|$ è una seminorma sullo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$. Infatti,

$$f\big(\lambda(x,y)\big) = f(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x + 2\lambda y| = \big|\lambda(x + 2y)\big| = |\lambda|\ |x + 2y| = |\lambda|\, f(x,y),$$

e in virtù della disuguaglianza triangolare per il valore assoluto

$$\begin{aligned} f\big((x_1,y_1) + (x_2,y_2)\big) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2)| = \\ &= |(x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2)| \leqslant |x_1 + 2y_1| + |x_2 + 2y_2| = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2). \end{aligned}$$

Osserviamo che in questo caso il vettore nullo non è l'unico vettore ad avere seminorma nulla, abbiamo infatti che $f(2t, -t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per una buona nozione di lunghezza per vettori ci aspettiamo che l'unico vettore di lunghezza nulla sia il vettore nullo.

Definizione 1.3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una *norma* su V è una applicazione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:

(a) per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ e ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si ha $\|\lambda\boldsymbol{v}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$;

(b) per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vale la *disuguaglianza triangolare*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|;$$

(c) $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ se e solo se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

ovvero una norma è una seminorma non degenere, per la quale l'unico vettore di lunghezza nulla è il vettore nullo. Uno spazio vettoriale V dotato di norma $\|\cdot\|$ si dice *spazio normato* e lo indichiamo con la coppia $(V, \|\cdot\|)$.

In particolare anche per le norme valgono le proprietà che abbiamo gia visto per le seminorme: simmetria e non negatività, $\|-\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\| \geqslant 0$, e disuguaglianza triangolare rovesciata

$$\big|\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{v}\|\big| \leqslant \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|. \tag{1}$$

Esempio 1.4. La funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := |x| + 2\,|y|$ è una norma sullo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$. Infatti,

$$f\big(\lambda(x,y)\big) = f(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x| + 2\,|\lambda y| = |\lambda|\,\big(|x| + 2\,|y|\big) = |\lambda|\, f(x,y),$$

e in virtù della disuguaglianza triangolare per il valore assoluto

$$f\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |x_1 + x_2| + 2\,|y_1 + y_2| \leqslant \\ \leqslant |x_1| + |x_1| + 2\,|y_1| + 2\,|y_2| = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2).$$

Ed inoltre,

$$f(x, y) = 0 \implies |x| + 2\,|y| = 0 \implies |x| = |y| = 0 \implies (x, y) = (0, 0).$$

Se indeboliamo le richieste della condizione (b) mantenendo le condizioni (a) e (c) otteniamo una quasi-norma.

Definizione 1.5. Una *quasi-norma* su V è una applicazione $q\colon V \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:

(a) per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ e ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si ha $q(\lambda\boldsymbol{v}) = |\lambda| \cdot q(\boldsymbol{v})$;

(b') esiste una costante $K > 1$ tale che per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vale la *disuguaglianza quasi-triangolare*

$$q(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \leqslant K\,(q(\boldsymbol{u}) + q(\boldsymbol{v}))\,;$$

(c) $q(\boldsymbol{v}) = 0$ se e solo se $\boldsymbol{v} = 0$.

Esempio 1.6. La funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := |x| + |y| + 2\sqrt{|xy|}$ è una quasi-norma sullo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$. Infatti,

$$f\big(\lambda(x, y)\big) = f(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x| + |\lambda y| + 2\sqrt{|\lambda^2 xy|} = |\lambda|\,\big(|x| + |y| + 2\sqrt{|xy|}\big) = |\lambda|\,f(x, y);$$

dalla disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica, $\sqrt{|xy|} \leqslant \frac{1}{2}(|x| + |y|)$, segue che

$$|x| + |y| \leqslant f(x, y) \leqslant 2\big(|x| + |y|\big),$$

e in virtù della disuguaglianza triangolare per il valore assoluto otteniamo

$$f\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqslant 2\big(|x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|\big) \leqslant \\ \leqslant 2\big(|x_1| + |x_1| + |y_1| + |y_2|\big) \leqslant 2\big(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)\big).$$

Osserviamo che f non soddisfa la disuguaglianza triangolare, in quanto $f(1, 1) = 4$ è maggiore di $f(1, 0) + f(0, 1) = 2$.

Esempio 1.7. Sia $d \in \mathbb{N}$. Sullo spazio vettoriale di dimensione finita $\mathbb{K}^d$ (ovvero $\mathbb{R}^d$ oppure $\mathbb{C}^d$) si possono definire diverse norme, tra le più comuni abbiamo:

- norma della massa:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j|\,; \tag{2}$$

- norma euclidea:

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2}; \tag{3}$$

- norma del massimo:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{j=1,\dots d} |x_j|\,; \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$. Verificare che queste quantità possiedono effettivamente le proprietà che definiscono una norma è un esercizio semplice che lasciamo al lettore, l'unico punto che richiede qualche attenzione è la disuguaglianza triangolare per la norma euclidea, ma la cui verifica è gia stata vista nei precedenti corsi di analisi e sarà riproposta più avanti quando tratteremo le proprietà dei prodotti scalari.

Esempio 1.8. Possiamo dare un esempio di spazio normato di dimensione infinita considerando lo spazio vettoriale $C[0,1]$ delle funzioni continue definite sull'intervallo $[0,1]$. Che sia di dimensione infinita lo si verifica facilmente, ad esempio osservando che le funzioni $f_n(x) := x^n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$, formano una famiglia infinita di elementi linearmente indipendenti in $C[0,1]$. Anche su $C[0,1]$ si possono definire diverse norme analoghe a quello dell'esempio precedente:

- norma della massa:

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t; \tag{5}$$

- norma quadratica:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}; \tag{6}$$

- norma del massimo:

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \, ; \tag{7}$$

con $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ funzione continua. Verificare che queste quantità possiedono effettivamente le proprietà che definiscono una norma è un esercizio semplice che lasciamo al lettore, l'unico punto che richiede qualche attenzione è la disuguaglianza triangolare per la norma quadratica, ma la cui verifica sarà oggetto delle prossime lezioni.

2. Struttura metrica e topologica

Ogni norma definisce in modo canonico una struttura metrica. Per definire la *distanza* tra due vettori indotta dalla norma basta porre

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \, ,$$

per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$. Questa funzione rende V uno *spazio metrico*, infatti si verifica facilmente che:

- $\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$;
- $\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$;
- $\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ se e solo se $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$;
- $\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \leqslant \mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \mathrm{dist}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$;

per ogni scelta di vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$.

Ogni spazio normato, essendo uno spazio metrico, è anche uno *spazio topologico*. Usando la distanza data dalla norma possiamo definire le palle metriche. La *palla aperta* $B(\boldsymbol{v}, r)$ di centro $\boldsymbol{v} \in V$ e raggio $r > 0$ è data dal sottoinsieme

$$B(\boldsymbol{v}, r) := \{\boldsymbol{u} \in V\colon \ \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| < r\} \, .$$

La palla $B(\boldsymbol{0}, 1)$ con centro nell'origine $\boldsymbol{0}$ di V e raggio 1 è detta *palla unitaria* di V.

Un punto $\boldsymbol{v}$ si dice *interno* all'insieme A quando esiste un raggio $r > 0$ tale che la palla $B(\boldsymbol{v}, r)$ è tutta contenuta in A. Un sottoinsieme A dello spazio normato V si dice *aperto* quando ogni suo punto è interno. Un sottoinsieme C dello spazio normato V si dice *chiuso* quando il suo complementare è aperto. La famiglia degli aperti di V determina la topologia su V.

Anche la nozione di convergenza per successioni può essere scritta utilizzando la norma: una successione di vettori $(\boldsymbol{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al vettore limite $\boldsymbol{v}_\star$ quando ogni palla di centro $\boldsymbol{v}_\star$ contiene definitivamente i punti della successione, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_\varepsilon, \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_\star\| < \varepsilon,$$

ciò equivale anche al limite $\lim_{n \to \infty} \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_\star\| = 0$, in tal caso scriveremo anche che $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_\star$ in V, oppure che $\boldsymbol{v}_n \to \boldsymbol{v}_\star$ in norma per $n \to \infty$.

Una successione di vettori $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *successione di Cauchy* quando

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant n_\varepsilon, \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_m\| < \varepsilon.$$

Ogni successione convergente è sempre una successione di Cauchy. Quando in uno spazio metrico ogni successione di Cauchy è convergente lo spazio di dice *completo.*

L'insieme dei valori di una successione di Cauchy è sempre un insieme limitato; le successioni convergenti in particolare sono sempre successioni limitate.

Come in ogni spazio metrico, anche negli spazi normati abbiamo che:

Lemma 2.1. *Un sottoinsieme C di uno spazio normato V è chiuso se e solo se C contiene ogni suo punto limite, ovvero per ogni successione $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di C convergente ad un punto $\boldsymbol{v}_\star \in V$ si ha che $\boldsymbol{v}_\star \in C$.*

Lasciamo la dimostrazione del lemma come esercizio.

Osservazione 2.2. La norma di uno spazio normato è sempre una funzione continua, anzi è una funzione Lipschitziana, come si può facilmente dedurre dalla disuguaglianza triangolare rovesciata (1).

Definizione 2.3. Un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice *convesso* quando per ogni coppia di punti di C il segmento che li congiunge è tutto contenuto in C, ovvero quando per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C$ e per ogni $\theta \in [0, 1]$ si ha che

$$\boldsymbol{u} + \theta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = (1 - \theta)\boldsymbol{u} + \theta\boldsymbol{v} \in C.$$

Un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale topologico si dice *strettamente convesso* quando per ogni coppia di punti di C tutti i punti del segmento che li congiunge che non siano gli estremi sono punti interni a C, ovvero quando per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C$ e per ogni $\theta \in]0, 1[$ si ha che $(1 - \theta)\boldsymbol{u} + \theta\boldsymbol{v}$ è interno a C.

Proposizione 2.4. *Le palle di uno spazio normato sono convesse.*

Dimostrazione. Sia V uno spazio normato. Sia $B := B(\boldsymbol{p}, r)$ la palla di centro $\boldsymbol{p} \in V$ e raggio $r > 0$. Dati $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in B$ e $\theta \in [0, 1]$ poniamo $\boldsymbol{q} := (1 - \theta)\boldsymbol{u} + \theta\boldsymbol{v}$. Abbiamo

$$\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} = (1 - \theta)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}) + \theta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}),$$

e applicando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\| \leqslant (1 - \theta) \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}\| + \theta \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}\| < (1 - \theta)r + \theta r = r,$$

dunque $\boldsymbol{q} \in B$. □

3. Spazi di Banach

Definizione 3.1. Uno spazio normato si dice *spazio di Banach* quando è uno spazio metrico completo, ovvero quando ogni sua successione di Cauchy è convergente.

Gli spazi vettoriali di dimensione finita $\mathbb{R}^d$, o $\mathbb{C}^d$, dotati della norma euclidea, sono spazi di Banach per ogni $d \in \mathbb{N}$.

Esempio 3.2. Lo spazio $C[0, 1]$ dotato della norma del massimo (7) è uno spazio di Banach, e la convergenza in tale spazio normato non è altro che la convergenza uniforme delle funzioni continue definite su $[0, 1]$.

Più in generale abbiamo:

Teorema 3.3. *Sia Ω uno spazio topologico. Lo spazio vettoriale $BC(\Omega; \mathbb{K})$ delle funzioni continue e limitate su Ω a valori nel campo scalare $\mathbb{K}$, dotato della* norma uniforme *definita da*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, \quad \forall f \in BC(\Omega; \mathbb{K}), \tag{8}$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione. Che (8) definisca una norma si dimostra nello stesso modo in cui si dimostra che la norma del massimo è una norma e lo lasciamo come esercizio.

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $BC(\Omega;\mathbb{K})$. Per ogni $x \in \Omega$ la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, in quanto

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty ,$$

per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Siccome $\mathbb{K}$ è completo ne segue che esiste il limite puntuale

$$f_\star(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

per ogni $x \in \Omega$.

La convergenza puntuale in questo caso è anche uniforme. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, sappiamo che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (indipendente da x) tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

per ogni $n, m \geqslant n_\varepsilon$ e per ogni $x \in \Omega$. Passando al limite per $m \to \infty$ otteniamo che

$$|f_n(x) - f_\star(x)| \leqslant \varepsilon,$$

per ogni $n \geqslant n_\varepsilon$ e per ogni $x \in \Omega$; ovvero

$$\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f_\star(x)| \leqslant \varepsilon,$$

per ogni $n \geqslant n_\varepsilon$. Dunque,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f_\star(x)| = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\star\|_\infty .$$

Ne segue che $f_\star$ è limitata e continua in quanto limite uniforme di funzioni limitate e continue, e la successione (f_n) converge a $f_\star$ in $BC(\Omega)$. □

Osservazione 3.4. Consideriamo uno spazio topologico compatto K. Per il teorema di Weierstrass, ogni funzione continua su K è anche limitata e ammette massimo. Quindi in tal caso il teorema 3.3 ci assicura che $C(K) = BC(K)$ con la norma del massimo, che coincide con la norma uniforme, è uno spazio di Banach.

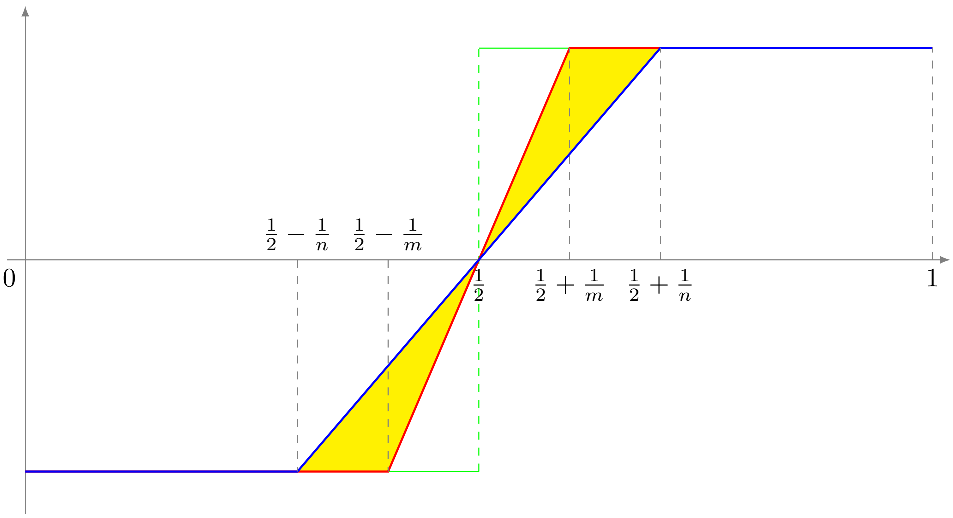
Esempio 3.5. Lo spazio $C[0,1]$ dotato della norma della massa (5) invece non è completo, infatti la successione di funzioni (f_n) definita da

$$f_n(x) := \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right], \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right], \\ +1, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

è di Cauchy, infatti

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| \, \mathrm{d}x = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|,$$

ma il suo limite puntuale $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1/2)$ non appartiene a $C[0,1]$.



Per qualsiasi funzione $f_\star \in C[0,1]$, siccome $|f_n - f_\star| \leqslant 1 + |f_\star|$, applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\star\|_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f_\star(x)| \, \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_\star(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 |\mathrm{sgn}(x - 1/2) - f_\star(x)| \, \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} |-1 - f_\star(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f_\star(x)| \, \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \big(|1 + f_\star(x)| + |1 - f_\star(1-x)|\big) \, \mathrm{d}x > 0,
\end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale è sicuramente strettamente positivo in quanto la funzione

$$g(x) := |1 + f_\star(x)| + |1 - f_\star(1-x)|,$$

è una funzione continua non negativa e strettamente positiva in un intorno di $\frac{1}{2}$, essendo

$$g(1/2) := |1 + f_\star(1/2)| + |1 - f_\star(1/2)| \geqslant 2.$$

Quindi non si può avere $f_n \to f_\star$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ per nessuna $f_\star \in C[0,1]$.

Osservazione 3.6. Il confronto tra gli esempi 3.2 e 3.5 ci fa capire come scelte diverse per la norma che si decide di usare su un certo spazio vettoriale possono portare a proprietà topologiche dello spazio completamente diverse.

4. Esercizi

4.1. **Norme e spazi normati.**

Esercizio 4.1. Dimostra che la funzione $N(x,y,z) := |x+y| + |x-z|$ definisce una semi-norma su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.2. Dimostra che la funzione $N(x,y,z) := |x| + |x+y| + |x+y+z|$ definisce una norma su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.3. Dimostra che la funzione $N(x,y,z) := (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{z})^2$ definisce una quasi-norma su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.4. Dimostra che le norme definite nell'esempio 1.7 godono effettivamente di tutte le proprietà di una norma.

Esercizio 4.5. Indichiamo con (x, y, z) un generico vettore di $\mathbb{R}^3$. Determina quali delle seguenti funzioni definiscono una norma, o una seminorma, o un quasi-norma, su $\mathbb{R}^3$.

$$N_1(x,y,z) := x + y + z; \qquad N_2(x,y,z) := |x+y| + |x-y| + |z|\,;$$
$$N_3(x,y,z) := |x-y| + |x-z| + |y-z|\,; \qquad N_4(x,y,z) := |x| + \sqrt{y^2+z^2};$$
$$N_5(x,y,z) := \min\{|x|, |y|, |z|\}\,; \qquad N_6(x,y,z) := \arctan(\max\{|x|, |y|, |z|\})\,;$$
$$N_7(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^4+z^6}; \qquad N_8(x,y,z) := \sqrt{x^2+2y^2+3z^2};$$
$$N_9(x,y,z) := \left(\sqrt{|x|} + 2\sqrt{|y|} + 3\sqrt{|z|}\right)^2; \quad N_{10}(x,y,z) := |x+y+z|\,.$$

Esercizio 4.6. Verifica che le funzioni $f_n(x) := x^n$, definite nell'esempio 1.8, sono tra loro linearmente indipendenti in $C[0,1]$. Dimostrando così che $C[0,1]$ è uno spazio di dimensione infinita.

Esercizio 4.7. Dimostra che le norme definite nell'esempio 1.8 godono effettivamente di tutte le proprietà di una norma.

Esercizio 4.8. Determina quali delle seguenti formule definiscono una norma, o una seminorma, o una quasi-norma, sullo spazio $C^1[0,1]$ delle funzioni derivabili su $[0,1]$ con derivata continua.

$$N_1(f) := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|\,; \qquad N_2(f) := \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|\,;$$
$$N_3(f) := \max_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|\,; \qquad N_4(f) := \max_{t\in[0,1]} (|f(t)| + |f'(t)|)\,;$$
$$N_5(f) := \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|\,; \qquad N_6(f) := \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t;$$
$$N_7(f) := \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t; \qquad N_8(f) := \left|\int_0^1 (f(t) + f'(t))\,\mathrm{d}t\right|;$$
$$N_9(f) := |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t; \qquad N_{10}(f) := |f(0)| + |f'(1/2)| + |f(1)|\,.$$

Esercizio 4.9 (Passaggio da struttura complessa a struttura reale). Siccome il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un sotto campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ può anche essere considerato come uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, basta restringere l'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare ai soli scalari reali.

(1) Se un insieme di vettori B è una base di V come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ allora dimostra che l'insieme di vettori $\widetilde{B} := B \cup \mathrm{i}B$, dove $\mathrm{i}B$ è l'insieme formato dai vettori di B moltiplicati per l'unità immaginaria, forma una base di V come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
(2) Verifica che se V ha dimensione finita allora $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.
(3) Verifica che ogni norma su V considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ continua ad essere una norma su V considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.10 (Passaggio da struttura reale a struttura complessa). Sia $(V, \|\cdot\|_{\mathbb{R}})$ uno spazio vettoriale normato reale. Possiamo definire il *complessificato* di V come lo spazio vettoriale normato complesso $(V_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ formato da coppie di vettori di V, che indicheremo simbolicamente con $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) =: \boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}$,

$$V_{\mathbb{C}} := \{\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v} \colon \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\}\,,$$

dove la struttura lineare è definita dall'operazione di somma

$$(9)\quad (\boldsymbol{u}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2) := (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + \mathrm{i}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2), \quad \forall\, \boldsymbol{u}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2 \in V_{\mathbb{C}},$$

e di prodotto per scalare complesso

$$(10)\quad (\lambda + \mathrm{i}\mu)(\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}) := (\lambda\boldsymbol{u} - \mu\boldsymbol{v}) + \mathrm{i}(\mu\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}), \quad \forall\, \boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v} \in V_{\mathbb{C}},\ \lambda + \mathrm{i}\mu \in \mathbb{C},$$

e la norma è definita come

$$(11)\qquad \|\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{C}} := \sup_{t\in[-\pi,\pi]} \|\cos(t)\boldsymbol{u} - \sin(t)\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{R}}\,, \quad \forall\, \boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v} \in V_{\mathbb{C}}.$$

(1) Verifica che le operazioni (9) e (10) definiscono una struttura di spazio vettoriale complesso su $V_{\mathbb{C}}$.
(2) Verifica che (11) definisce effettivamente una norma su $V_{\mathbb{C}}$.
(3) Verifica che la norma su $V_{\mathbb{C}}$ gode anche delle seguenti proprietà:

$$\|\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{0}\|_{\mathbb{C}} = \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{R}}\,, \quad \|\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{C}} = \|\boldsymbol{u} - \mathrm{i}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{C}}\,, \quad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Esercizio 4.11. Dimostra che la norma definita in (8) nell'enunciato del teorema 3.3 è effettivamente una norma.

Esercizio 4.12. Dimostra che la quantità

$$\mathcal{N}[f] := \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x) - f(y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

definisce una norma sullo spazio vettoriale $\mathcal{X} := \{f \in C([0,1])\colon f(0) = 0\}$.

Esercizio 4.13. Dimostra che su ogni spazio vettoriale è sempre possibile definire una norma. Puoi seguire ad esempio la seguente traccia. Sia $B = (b_\alpha)_{\alpha\in I}$ una base algebrica (base di Hamel) dello spazio vettoriale V. Ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come combinazione lineare degli elementi di B,

$$v = \sum_{\alpha\in I} c_\alpha b_\alpha,$$

nella quale solo un *numero finito* dei coefficienti scalari c_α è diversa da zero. Poniamo allora $\|v\| := \max_{\alpha\in I} |c_\alpha|$. Verifica che si tratta di una buona definizione (ovvero che il massimo esiste finito) e che definisce effettivamente una norma su V.

Esercizio 4.14 (Norma sullo spazio prodotto). Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati sul campo $\mathbb{K}$. Definisci nel modo più naturale possibile una struttura di spazio normato per lo spazio prodotto $V \times W$.

Esercizio 4.15 (Quoziente di uno spazio semi-normato). Sia V uno spazio vettoriale e sia $p\colon V \to \mathbb{R}$ una seminorma su V. Diciamo che due vettori sono *equivalenti* quando la seminorma della loro differenza è nulla,

$$\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{b} \iff p(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0.$$

Verifica che si tratta effettivamente di una relazione di equivalenza. Sullo spazio quoziente $\widetilde{V} := V/{\approx}$ formato dalle classi di equivalenza $[\boldsymbol{a}] := \{\boldsymbol{b} \in V : \boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{b}\}$ definiamo la funzione $\|\cdot\|_{\approx} : \widetilde{V} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\|[\boldsymbol{a}]\|_{\approx} := p(\boldsymbol{a}).$$

Verifica che si tratta di una buona definizione e che $\|\cdot\|_{\approx}$ è una norma su $\widetilde{V}$.

4.2. **Proprietà metriche e topologiche.**

Esercizio 4.16. Sia d una metrica sullo spazio vettoriale V tale che
$$d(\lambda \boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{v}) = |\lambda|\, d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \qquad d(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),$$
per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Dimostra che d è la distanza indotta da una norma su V.

Esercizio 4.17. Dimostra il lemma 2.1. *[Si tratta di una dimostrazione che dovresti aver già visto nell'insegnamento in cui hai studiato la topologia degli spazi metrici.]*

Esercizio 4.18. Disegna nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ le palle $B(\mathbf{0}, 1)$ relative alle norme descritte nell'esempio (1.7) (caso $d = 2$) e determina quali norme tra esse hanno palle con chiusura strettamente convessa.

Esercizio 4.19 (Funzionale di Minkowski). Sia C un sottoinsieme di uno spazio normato reale $(V, \|\cdot\|)$ con le seguenti proprietà:
(1) C è convesso;
(2) C è simmetrico rispetto all'origine, ovvero se $\boldsymbol{v} \in C$ allora $-\boldsymbol{v} \in C$;
(3) C contiene vettori in tutte le direzioni (rispetto all'origine), ma non contiene tutti i vettori di una certa direzione, ovvero per ogni $\boldsymbol{v} \in V$, con $\boldsymbol{v} \neq 0$, esistono $\lambda, \mu > 0$ tale che $\lambda \boldsymbol{v} \in C$ e $\mu \boldsymbol{v} \notin C$.

Definiamo la funzione $\mathcal{N}_C \colon V \to \mathbb{R}$ ponendo
$$\mathcal{N}_C(\boldsymbol{v}) := \inf \left\{ t > 0 \colon \frac{1}{t} \boldsymbol{v} \in C \right\}.$$
- Dimostra che $\mathcal{N}_C$ è una norma su V.
- Sia $B := \{\boldsymbol{v} \in V \colon \mathcal{N}_C(\boldsymbol{v}) < 1\}$ la palla unitaria costruita con la norma $\mathcal{N}_C$; verifica che $B \subseteq C \subseteq \overline{B}$.

Esercizio 4.20. Sia $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio normato tale che
$$\|\boldsymbol{v}_{n+1} - \boldsymbol{v}_n\| \leqslant 2^{-n}$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostra che si tratta di una successione di Cauchy.

Esercizio 4.21. Spiega perché le successioni di Cauchy sono limitate.

4.3. **Spazi di Banach.**

Esercizio 4.22 (Serie assolutamente convergenti in spazi di Banach). Sia $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio Banach tale che la serie delle norme è convergente,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\boldsymbol{v}_n\| < +\infty.$$
Dimostra che la successione $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali vettoriali,
$$\boldsymbol{s}_n := \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{v}_k,$$
è una successione convergente. Il valore del limite delle somme parziali definisce la somma della serie vettoriale
$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{v}_n := \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n.$$