Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 30.6.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Sia $\mathcal{C} = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ lo spazio normato delle funzioni scalari continue definite sull'intervallo $[0,1]$ dotato della norma uniforme. Considera gli operatori lineari $T_+, T_- \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiti da
$$T_\pm f(x) := f\left(\frac{x}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\int_0^x f(x-y)y\,\mathrm{d}y, \qquad \forall x \in [0,1].$$
Ricava delle stime per eccesso e per difetto per le norme operatoriali di T_+ e T_-. *[Per T_+ dovrebbe essere sufficiente testare l'operatore su funzioni costanti; per T_- prova a testare l'operatore su funzioni della forma $f_\varepsilon(x) = \min\left\{1, \frac{|2x-1|}{\varepsilon} - 1\right\}$, nel limite per $\varepsilon \to 0^+$.]*

2. (8 punti) Sia X il sottospazio vettoriale di $L^4(\mathbb{R})$ definito da
$$X := \left\{ f \in L^4(\mathbb{R}) \colon x \mapsto xf(x) \in L^4(\mathbb{R}) \right\}.$$
   - X è completo (rispetto alla topologia indotta dalla norma di L^4)?
   - X è contenuto in $L^2(\mathbb{R})$?
   - X è contenuto in $L^6(\mathbb{R})$?

   [Può essere conveniente, nella stima dei vari integrali, separare il comportamento intorno a zero dal comportamento all'infinito, ad esempio spezzando la retta reale in due parti: $\mathbb{R} = A \cup B$ con $A = [-1,1]$ e $B =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.]

3. (8 punti) Considera lo spazio di Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ definito da
$$H := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \colon x \mapsto xf(x) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad \langle f, g\rangle_H := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$$
Sia $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Sia V il sottospazio (chiuso) di H formato dalle funzioni con supporto (essenziale) contenuto nell'intervallo $[-1,1]$. Verifica che $h \in H$ e calcola la distanza in H di h da V.

4. (8 punti) Determina la soluzione del seguente problema:
$$\begin{cases} \partial_t u + u = \partial_x^2 u, & t > 0,\ x \in]-\pi,\pi[, \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi), & t > 0, \\ \partial_t u(t,-\pi) = \partial_t u(t,\pi), & t > 0, \\ u(0,x) = \pi - |x|, & x \in]-\pi,\pi[. \end{cases}$$
[Prova con il metodo della separazione delle variabili: cerca soluzioni della forma $u(t,x) = A(t)B(x)$ che soddisfino tutte le condizioni tranne l'ultima, poi combinandole insieme puoi ottenere anche quella che verifica l'ultima condizione.]