Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 27.1.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Considera l'operatore lineare T definito da
$$T[f](x) := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y, \qquad \forall x \in [0,1].$$
   - Verifica che $T\colon L^3([0,1]) \to L^3([0,1])$ è continuo.
   - Per ogni $\alpha > -1/3$, sia $f_\alpha(x) := x^\alpha$. Calcola esplicitamente $T[f_\alpha]$.
   - Stima al meglio che puoi il valore della norma operatoriale di T come operatore su $L^3([0,1])$.

2. (8 punti) Sia $p \in [1,\infty[$. Considera lo spazio normato
$$X_p := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}\colon \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \infty \right\}, \quad \|f\|_{X_p} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$
   - Fai un esempio di funzione che appartiene a X_p ma che non appartiene a $L^p(\mathbb{R})$.
   - Calcola la norma della gaussiana traslata $g_h(x) := \mathrm{e}^{-(x-h)^2}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e deduci che la norma $\|\cdot\|_{X_p}$ non è invariante per traslazioni.
   - Considera la funzione $f(x) := (1+x^2)^{-1}\mathrm{e}^{(x^2)/p}$. Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ si ha che la funzione traslata $f_h(x) := f(x-h)$ appartiene allo spazio X_p? Cosa puoi dedurre a proposito dell'azione dell'operatore di traslazione sullo spazio X_p?

3. (8 punti) Considera il sottospazio vettoriale V di ℓ^2 definito da
$$V := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon x_{2k} = x_{2k-1}, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$
   - Verifica che V è un sottospazio chiuso di ℓ^2.
   - Determina il complemento ortogonale di V.
   - Determina la proiezione ortogonale su V dell'elemento $x^\star$ di ℓ^2 definito da
$$x^\star := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right).$$

4. (8 punti) Siano f e g due funzioni regolari a tratti periodiche con periodo 2π. Sia $h := f * g$ la loro convoluzione periodica.
   - Determina che relazione c'è tra i coefficienti della serie di Fourier di h e i coefficienti della serie di Fourier di f e g.
   - Calcola esplicitamente h nel caso in cui sia f che g coincidano con il segnale di onda quadra, e determina la sua serie di Fourier.