Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 13.1.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Sia $c_{00} = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \colon \exists n \in \mathbb{N}, \forall k > n, x_k = 0\}$ lo spazio delle successioni definitivamente nulle. Considera l'operatore lineare $T\colon c_{00} \to c_{00}$ che alla successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associa la sottosuccessione dei termini di indice pari $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}, \dots).$$

Per $p \geqslant 1$, denotiamo con X_p lo spazio normato formato dall'insieme c_{00} dotato della norma $\|(x_k)\|_p := \Big(\sum_k |x_k|^p\Big)^{1/p}$.

- Per quali esponenti $p, q \geqslant 1$ si ha che T è un operatore continuo da X_p in X_q?
- Nei casi in cui si ha continuità, ricava delle stime (sia dal basso che dall'alto) per la norma operatoriale $\|T\|_{X_p \to X_q}$.

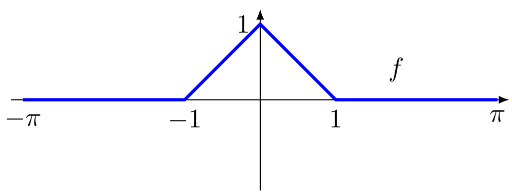
2. (8 punti) Al variare di $k \in \mathbb{N}$, considera gli intervalli $I_k := [4k-1, 4k+1]$. Considera la funzione $Q(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{I_k}(x)$ ottenuta sommando le funzioni caratteristiche degli I_k.

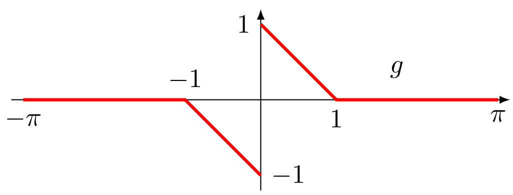
- Spiega perché è ben definito il prodotto di convoluzione $P(x) := Q * Q(x)$.
- Calcola esplicitamente, oppure disegna graficamente, la funzione $P(x)$.
- Cosa puoi dire del prodotto di convoluzione di $Q(x)$ con la sua rovesciata $Q(-x)$?

3. (8 punti) Sia $(p_n)_{n\geqslant 0}$ una famiglia di polinomi a coefficienti reali tali che: p_n ha grado n, e quando $m \neq n$ si ha che p_n è ortogonale a p_m in $L^2([0,1])$ (con prodotto scalare standard). Per $0 \leqslant m \leqslant n$ sia $V_{m,n}$ il sottospazio di $L^2([0,1])$ generato dai polinomi p_k con $m \leqslant k \leqslant n$.

- Spiega perché il prodotto puntuale $p_m p_n$ appartiene a $V_{0,m+n}$ e dunque può essere scritto nella forma
$$p_m p_n = \sum_{k=0}^{m+n} c_{k,m,n} p_k,$$
per opportuni coefficienti scalari $c_{k,m,n}$.
- Determina delle formule per calcolare i coefficienti $c_{k,m,n}$ in funzione di p_k, p_m, p_n.
- Verifica che quando $m < n$ e $0 \leqslant k < n-m$ si ha $c_{k,m,n} = 0$, e che dunque si ha $p_m p_n \in V_{n-m,n+m}$.

4. (8 punti) Considera le due funzioni 2π-periodiche f e g descritte dai seguenti grafici:





- Determina le serie di Fourier di f e di g e discuti le loro proprietà di convergenza.
- Quali somme di serie numeriche riesci a ricavare applicando l'identità di Plancherel a tali serie di Fourier?