Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 10.2.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Sia $I := [0,1]$ e sia $t_\star \in]0,1[$. Considera sullo spazio $X := C^1(I)$ le applicazioni $N\colon X \to \mathbb{R}$ e $T\colon X \to \mathbb{C}$ definite da
$$N[f] := \int_0^1 \big|f(t) + tf'(t)\big|\,\mathrm{d}t, \qquad T[f] := f(t_\star), \qquad \forall f \in X.$$
   - Verifica che N definisce una norma su X.
   - Verifica che il funzionale lineare T è continuo su (X, N) e stima la sua norma.

   [Suggerimento: può essere di ispirazione calcolare la derivata di $g(t) := tf(t)$ e ricordare che il teorema fondamentale del calcolo ci dice che $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t$.]

2. (8 punti) Siano $p, q \in [1, \infty]$. Dati $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$ considera la funzione h definita da
$$h(x) := f(x)g(x)(f * g)(x).$$
   - Dimostra che se p e q sono esponenti coniugati allora $h \in L^1$ e fornisci una stima di $\|h\|_{L^1}$ in termini delle norme $\|f\|_{L^p}$ e $\|g\|_{L^q}$.
   - Nel caso in cui $p = 4/3$ e $q = 6$ determina per quali $r \in [1, \infty]$ si ha certamente che $h \in L^r(\mathbb{R})$.

   [Suggerimento: usa opportunamente le stime di Hölder e di Young.]

3. (8 punti) Nello spazio di Hilbert $L^2([0,1])$ considera il sottospazio V ortogonale a tutti i polinomi di primo grado. Determina la proiezione ortogonale su V della funzione x^3.

4. (8 punti) Sia $F(x)$ la funzione regolare a tratti e 2π periodica che coincide con la funzione $\sin(x/2)$ quando $|x| < \pi$. Determina la serie di Fourier di F e discuti le sue proprietà di convergenza. Valutando tale serie di Fourier nel punto $x = \pi/2$ di quale serie numerica puoi ottenere il valore esplicito della somma?