Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 27.7.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Sia X lo spazio delle successioni a valori scalari $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 0, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\,|x_{n+1}-x_n|^2 < +\infty.$$
Data una successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ poniamo
$$\|x\|_X := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\,|x_{n+1}-x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Sia inoltre $T\colon X \to \ell^2$ l'operatore lineare che alla successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ associa la successione $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ definita da $y_n := \sqrt{n}(x_{n+1}-x_n)$.
   - Dimostra che $\|\cdot\|_X$ è una norma su X.
   - Verifica che T è una isometria tra X e ℓ^2.
   - Verifica che T non è suriettiva da X in ℓ^2.
   - Lo spazio X è di Banach?

2. (8 punti) Sia $f_1(t) := 0$ per $t < 0$ e $f_1(t) := t\mathrm{e}^{-t}$ per $t \geqslant 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione di funzioni $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ponendo $f_{k+1} := f_k * f_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
   - Calcola esplicitamente f_2 e f_3.
   - Tramite un procedimento ricorsivo determina esplicitamente f_k per ogni $k \in \mathbb{N}$.
   - Per quali $p > 0$ si ha che $f_k \in L^p(\mathbb{R})$?

3. (8 punti) Sia V il sottoinsieme di $L^2([0,+\infty[)$ formato dalle funzioni della forma
$$t \mapsto (a+bt+ct^2)\mathrm{e}^{-t}, \forall t \geqslant 0, \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}.$$
   - Determina tra tutte le funzioni in V quella che meglio approssima nella norma di $L^2([0,+\infty[)$ la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$.
   - È vero o falso che l'insieme delle funzioni della forma $t \mapsto p(t)\mathrm{e}^{-t}$, con p polinomio, è denso in $L^2([0,+\infty[)$?

4. (8 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ considera la funzione $f_n \in L^2([-\pi,\pi])$ definita da:
$$f_n(t) := \frac{n}{2}\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(t), \quad \forall t \in [-\pi,\pi].$$
   - Determina esplicitamente la serie di Fourier di f_n.
   - Valuta la somma della serie di Fourier di f_n nel pnto di discontinuità $t = \dfrac{1}{n}$.
   - Manipolando la serie trovata nel punto precedente, tramite approssimazioni passando al limite per $n \to \infty$, ricava il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.