Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 14.9.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Sia $p \in [1, +\infty]$. Sia $n \in \mathbb{N}$. Considera il funzionale lineare $\varphi_n \colon \ell^p \to \mathbb{C}$ definito da
$$\varphi_n(x) := \sum_{k=n+1}^{2n} x_k, \qquad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p.$$
   - Dimostra che φ_n è continuo.
   - Determina (o almeno stima) la norma operatoriale di φ_n.

2. (8 punti) Sia V il sottospazio di ℓ^2 formato dalle successioni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che
$$\sum_{k=n+1}^{2n} x_k = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   - Dimostra che V è chiuso.
   - Dimostra che V ha dimensione infinita.
   - Determina una base ortonormale di V.

3. (8 punti) Considera lo spazio normato $(X, \|\cdot\|_X)$ definito da
$$X := \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\text{misurabile} \colon x f(x) \in L^3(\mathbb{R}),\ \frac{1}{x} f(x) \in L^6(\mathbb{R}) \right\}$$
$$\|f\|_X := \|x f(x)\|_{L^3(\mathbb{R})} + \left\|\frac{1}{x} f(x)\right\|_{L^6(\mathbb{R})}.$$
   - Verifica che $X \subseteq L^4$.
   - L'immersione $J \colon (X, \|\cdot\|_X) \to (L^4(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^4(\mathbb{R})})$, $J(f) := f$, è continua?
   - Fornisci un esempio esplicito di una funzione di $L^4(\mathbb{R})$ che non appartiene a X.

4. (8 punti) Siano $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ e siano $(\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $(\widehat{g}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ le successioni dei coefficienti delle loro serie di Fourier,
$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikt}, \quad g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}_k e^{ikt}.$$
Determina la successione dei coefficienti della serie di Fourier della convoluzione (periodica) $f * g$. Si ricorda che $f * g(t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(s) g(t-s)\, ds$, con la convenzione di considerare le funzioni 2π-periodiche.