ANALISI 3 - L20: APPLICAZIONI DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

1. Teorema del campionamento di Shannon

Se consideriamo una funzione $f(t)$ come la descrizione di un segnale che si evolve nel tempo, la serie o la trasformata di Fourier di f sono strumenti di analisi che ci permettono di conoscere lo spettro delle frequenze che compongono il segnale. Supponiamo di "campionare" il segnale in una determinata successione di istanti $t_1, t_2, \ldots$, e dunque di conoscere i valori $f(t_1), f(t_2), \ldots$ del segnale. Quanta informazione su f riusciamo ad ottenere dai campioni? Ovviamente se f è una generica funzione, conoscere i suoi valori anche in un insieme numerabile di punti non ci permette di concludere niente sui valori che assume negli altri punti. Supponiamo ora che f possieda uno spettro limitato di frequenze (come per esempio avviene per segnali audio percepiti dall'orecchio umano), ovvero f sia un segnale a *banda (di frequenza) limitata*, ciò significa che la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ si annulla quando la frequenza ω sta fuori da un certo intervallo limitato $[-\Omega, \Omega]$. Supponendo che $\widehat{f}$ sia integrabile, la formula di inversione ci dice che

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}\omega.$$

Le oscillazioni dell'armonico elementare $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ sono trascurabili su intervalli temporali di ampiezza $\Delta t \ll |\omega|^{-1}$,

$$\left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t+\Delta t)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \right| = \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \Delta t} - 1 \right| \leqslant |\omega \Delta t| \ll 1.$$

Ci aspettiamo allora che il valore di $f(t + \Delta t)$ non differisca molto dal valore di $f(t)$ quando $\Delta t \ll \Omega^{-1}$; dunque conoscere i valori $f(t_k)$ per una successione di istanti con $t_{k+1} - t_k \approx \Omega^{-1}$ dovrebbe permetterci di avere un'idea abbastanza accurata dell'andamento generale della funzione. Quest'idea è confermata nel teorema di Shannon sul campionamento di segnali a banda limitata, che si ottiene combinando quello che abbiamo appreso sulle serie di Fourier con le proprietà della trasformata di Fourier.

Teorema 1.1 (Shannon). *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ una funzione la cui trasformata di Fourier ha supporto contenuto nell'intervallo $[-\Omega, \Omega]$. Allora f è completamente determinata dai suoi valori nei punti $k\frac{\pi}{\Omega}$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$ e abbiamo*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(k \frac{\pi}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}(\Omega t - k\pi). \tag{1}$$

Ricordiamo che $\operatorname{sinc}(t) := \frac{\sin t}{t}$.

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che $\widehat{f} \in L^2(-\Omega, \Omega)$ e si annulla fuori da $[-\Omega, \Omega]$ quindi abbiamo anche che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, e dunque per la formula di inversione f è una funzione continua. Espandiamo $\widehat{f}$ in serie di Fourier sull'intervallo $[-\Omega, \Omega]$,

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \frac{\pi}{\Omega} \omega},$$

Date: ultimo aggiornamento, 2 febbraio 2022.

con i coefficienti $\widetilde{f}_k$ che sono dati da

$$\widetilde{f}_k := \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{\Omega}\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\Omega}\widehat{\widehat{f}}\Big(k\frac{\pi}{\Omega}\Big) = \frac{\pi}{\Omega}f\Big(-k\frac{\pi}{\Omega}\Big).$$

Ricaviamo così (scambiando k con $-k$) che campionando f ad intervalli di ampiezza $\frac{\pi}{\Omega}$ possiamo ricostruire $\widehat{f}$,

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{\Omega}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\Big(k\frac{\pi}{\Omega}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{\Omega}\omega}. \tag{2}$$

Utilizzando ancora la formula di inversione otteniamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\Omega}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\Big(k\frac{\pi}{\Omega}\Big)\int_{-\Omega}^{\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-k\frac{\pi}{\Omega}\right)\omega}\,\mathrm{d}\omega. \tag{3}$$

Il fatto che la serie (2) possa essere integrata termine a termine è giustificato dal fatto che la serie converge in $L^2(-\Omega,\Omega)$ e quello che facciamo in (3) non è altro che prendere il prodotto scalare della serie con l'armonico $\omega \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, ed il prodotto scalare è una applicazione continua rispetto ai suoi argomenti. Per concludere basta ora osservare che

$$\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\Omega}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega}}{\mathrm{i}\tau}\right]_{\omega=-\Omega}^{\omega=\Omega} = \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega\tau} = \mathrm{sinc}(\Omega\tau).$$

□

Osservazione 1.2. La successione di funzioni

$$s_k(t) := \mathrm{sinc}(\Omega t - k\pi), \qquad k\in\mathbb{Z}$$

forma una base ortonormale per lo spazio delle funzioni L^2 la cui trasformata di Fourier si annulla fuori dall'intervallo $[-\Omega,\Omega]$. La formula di campionamento (1) non è altro che l'espansione di f rispetto a tale base.

Nella pratica, la formula di campionamento (1) ha una convergenza puntuale in genere molto lenta in quanto la funzione $\mathrm{sinc}(\tau)$ decade a zero lentamente quando $\tau\to\infty$ (va come τ^{-1}). Una formula con una convergenza più rapida si può ottenere campionando con sequenze di istanti più fitte. Se si campiona ad intervalli di ampiezza $\frac{\pi}{\lambda\Omega}$, con $\lambda > 1$, la funzione $\mathrm{sinc}(\tau)$ può essere rimpiazzata da una funzione con un decadimento all'infinito dell'ordine di τ^{-2}.

2. Principio di indeterminazione di Heisenberg

Data una funzione $f\in L^2(\mathbb{R})$ e un parametro $\lambda > 0$, il riscalamento definito come

$$f_\lambda(x) = \lambda^{1/2}f(\lambda x),$$

preserva la norma, $\|f_\lambda\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Per la trasformata abbiamo il riscalamento inverso

$$\widehat{f_\lambda}(\xi) = \lambda^{-1/2}\widehat{f}(\lambda^{-1}\xi),$$

e anch'esso preserva la norma, $\|\widehat{f_\lambda}\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$. Quando $\lambda\to+\infty$ la funzione f tende a concentrarsi verso l'origine, mentre $\widehat{f}$ tende ad allargarsi. Quando $\lambda\to 0^+$ è la trasformata $\widehat{f}$ che si concentra mentre la funzione f si disperde.

Abbiamo anche dimostrato nelle scorse lezioni che se una funzione ha supporto compatto, e dunque si concentra in un intervallo limitato, la sua trasformata non può avere supporto limitato e dunque in qualche modo si deve spalmare lungo tutto l'asse reale.

Questo fenomeno mette in evidenza una caratteristica tipica della relazione tra una funzione e la sua trasformata: più una funzione si "concentra" e più la sua trasformata sarà "dispersa".

Nella meccanica quantistica lo stato di una particella è descritto da una *funzione d'onda* $\phi(x)$ con norma L^2 unitaria: la funzione $|\phi(x)|^2$ descrive la densità di probabilità di trovare la particella nel punto x, mentre la funzione $\frac{1}{2\pi}\left|\widehat{\phi}(\xi)\right|^2$ descrive la densità di probabilità che la particella abbia quantità di moto uguale a ξ. Possiamo conoscere la posizione di una particella quando ϕ è fortemente concentrata intorno a un punto, e questo corrisponde ad una trasformata $\widehat{\phi}$ che non potrà concentrarsi troppo intorno ad un valore, e dunque non sarà possibile determinare con precisione la sua quantità di moto e la sua velocità. Viceversa, conoscere con precisione la quantità di moto non permette di localizzare la posizione della particella. Questa impossibilità di conoscere tutti i dettagli dello stato di un sistema è noto come *principio di indeterminazione di Heisenberg*. In realtà non è un fenomeno puramente legato alla meccanica quantistica, ma è una proprietà generale della relazione tra una funzione e la sua trasformata di Fourier. Per dare una descrizione quantitativa di questo principio introduciamo una misura della *dispersione* di una funzione f rispetto al punto p tramite la quantità

$$\Delta_p(f) := \frac{\int_{\mathbb{R}} (x-p)^2 \left|f(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x} = \frac{\|(x-p)f\|_{L^2}^2}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

Quando f si concentra in un intorno molto piccolo di p, nel quale $(x-p)^2 \ll 1$, allora l'integrale al numeratore risulterà molto piccolo rispetto all'integrale al denominatore; viceversa quando f si concentra in zone molto lontane da p, in cui $(x-p)^2 \gg 1$, allora l'integrale al numeratore risulterà molto grande rispetto all'integrale al denominatore. Più $\Delta_p f$ è piccolo e più f si concentra intorno a p; più $\Delta_p f$ è grande e più f si disperde lontano da p. Il seguente teorema ci dice che una funzione e la sua trasformata non possono simultanemente concentrarsi troppo intorno a singoli punti.

Teorema 2.1 (Disuguaglianza di Heisenberg)**.** *Per ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ e per ogni $p, q \in \mathbb{R}$ abbiamo*

$$\Delta_p(f) \cdot \Delta_q(\widehat{f}) \geqslant \frac{1}{4}. \tag{4}$$

La disuguaglianza (4) è equivalente alla stima

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \|(x-p)f(x)\|_{L^2} \left\|(\xi-q)\widehat{f}(\xi)\right\|_{L^2}.$$

Per dimostrarla possiamo ricondurci sempre al caso in cui $p = q = 0$. Basta considerare la funzione

$$g(x) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} f(x+p),$$

che ha come trasformata

$$\widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\xi}\widehat{f}(\xi+q),$$

Abbiamo $\Delta_p(f) = \Delta_0(g)$ e $\Delta_q(\widehat{f}) = \Delta_0(\widehat{g})$, in quanto

$$\|g\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\|\widehat{f}\,\right\|_{L^2}, \quad \|xg\|_{L^2} = \|(x-p)f\|_{L^2}, \quad \|\xi\widehat{g}\,\|_{L^2} = \left\|(\xi-q)\widehat{f}\,\right\|_{L^2}.$$

Dunque per dimostrare il teorema 2.1 è sufficiente dimostrare che per ogni $g \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$\|g\|_{L^2}^2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \|xg(x)\|_{L^2} \, \|\xi\widehat{g}(\xi)\|_{L^2}. \tag{5}$$

È chiaro che possiamo assumere che $xg(x)$ e $\xi\widehat{g}(\xi)$ siano funzioni in L^2, in caso contrario la disuguaglianza (5) è verificata avendo il lato destro infinito.

Consideriamo prima il caso in cui g sia anche una funzione di classe C^1. Abbiamo che la funzione

$$h(x) := x\,|g(x)|^2 = (xg(x))\cdot\overline{g(x)}$$

è una funzione di L^1, in quanto prodotto di due funzioni L^2. Siccome $\xi\widehat{g}(x)$ sta in L^2 ne segue che anche g' è una funzione di L^2; dunque, anche la derivata

$$h'(x) = |g(x)|^2 + 2\mathrm{Re}\left(xg(x)\cdot\overline{g'(x)}\right) \tag{6}$$

risulta essere una funzione di L^1. Inoltre sappiamo che $h, h' \in L^1$ implica che h è infinitesima all'infinito, dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h'(x)\,\mathrm{d}x = h(+\infty) - h(-\infty) = 0 - 0 = 0.$$

Integrando (6), e applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in L^2, ricaviamo infine che

$$\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} xg(x)\cdot\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\|xg\|_{L^2}\,\|g'\|_{L^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|xg\|_{L^2}\,\|\xi\widehat{g}\|_{L^2}.$$

Per ottenere la stima nel caso generale $g \in L^2$, procediamo per approssimazione con funzioni liscie. Sia $\gamma(x)$ una qualsiasi funzione liscia in L^1 con $\int_{\mathbb{R}}\gamma(x)\,\mathrm{d}x = 1$, e tale che $x\gamma(x) \in L^1$, ad esempio $\gamma(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\gamma_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ la riscalata di γ. Sappiamo che le convoluzioni $g_\varepsilon := g * \gamma_\varepsilon$ sono funzioni lisce che convergono a g in norma L^2 per $\varepsilon \to 0^+$. Essendo dunque g_ε di classe C^1, per quanto visto prima sappiamo che vale

$$\|g_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|xg_\varepsilon\|_{L^2}\,\|\xi\widehat{g_\varepsilon}\|_{L^2}.$$

Otteniamo la stessa stima per g passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ se facciamo vedere che:

(a) xg_ε converge a xg in norma L^2;
(b) $\xi\widehat{g_\varepsilon}$ converge a $\xi\widehat{g}$ in norma L^2.

Poniamo $g_1(x) := xg(x)$. Siccome $g_1 \in L^2$ abbiamo che $g_1 * \gamma_\epsilon$ converge a g_1 in norma L^2, per dimostrare (a) è sufficiente far vedere che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|x(g*\gamma_\varepsilon) - (g_1*\gamma_\varepsilon)\|_{L^2} = 0. \tag{7}$$

Abbiamo

$$x(g*\gamma_\varepsilon)(x) - (g_1*\gamma_\varepsilon)(x) = \int \big(xg(x-y) - g_1(x-y)\big)\gamma_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int g(x-y)y\gamma_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x-y)\frac{y}{\varepsilon}\gamma\big(\frac{y}{\varepsilon}\big)\,\mathrm{d}y = \varepsilon\int g(x-\varepsilon z)z\gamma(z)\,\mathrm{d}z.$$

Applicando la disuguaglianza integrale di Minkowski otteniamo

$$\|x(g*\gamma_\varepsilon) - (g_1*\gamma_\varepsilon)\|_{L^2} \leqslant \varepsilon\int\|g(x-\varepsilon z)\|_{L^2}\,|z\gamma(z)|\,\mathrm{d}z = \varepsilon\,\|g\|_{L^2}\,\|x\gamma(x)\|_{L^1},$$

da cui si ottiene il limite (7).

Per dimostrare (b) osserviamo che

$$\xi\widehat{g_\varepsilon}(\xi) - \xi\widehat{g}(\xi) = \xi\widehat{g}(\xi)\left(\widehat{\gamma_\varepsilon}(\xi) - 1\right).$$

Inoltre, siccome $\int \gamma_\varepsilon = 1$, abbiamo

$$\widehat{\gamma_\varepsilon}(\xi) - 1 = \int \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - 1\right)\gamma_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\xi x} - 1\right)\gamma(x)\,\mathrm{d}x,$$

e per la convergenza dominata di Lebesgue l'ultimo integrale tende a zero per $\varepsilon \to 0^+$. Dunque, siccome $\xi\widehat{g}(\xi) \in L^2$, applicando ancora la convergenza dominata di Lebesgue otteniamo che anche

$$\|\xi\widehat{g_\varepsilon} - \xi\widehat{g}\|_{L^2}^2 = \int |\xi\widehat{g}(\xi)|^2\,|\widehat{\gamma_\varepsilon}(\xi) - 1|^2\,\mathrm{d}\xi$$

tende a zero per $\varepsilon \to 0^+$.

3. Equazioni alle derivate parziali

La trasformata di Fourier è un operatore lineare che trasforma l'operazione di derivazione in un'operazione di moltiplicazione algebrica,

$$\mathcal{F}[f'] = \mathrm{i}\xi\widehat{f}, \quad \mathcal{F}[f''] = -\xi^2\widehat{f}, \quad \ldots \quad \mathcal{F}[f^{(k)}] = (\mathrm{i}\xi)^k\widehat{f}, \quad \ldots$$

Per questo motivo la trasformata di Fourier trova importanti applicazioni nella risoluzione di equazioni differenziali, in particolar modo per equazioni lineari a coefficienti costanti: equazioni differenziali ordinarie vengono trasformate in equazioni algebriche, ed equazioni alle derivate parziali vengono trasformate in equazioni differenziali ordinarie. Vediamo alcuni esempi.

3.1. **Equazione del calore.** Consideriamo l'equazione che descrive il flusso di calore lungo una barra filiforme infinita

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u, \tag{8}$$

dove $u(t,x)$ è la temperatura, $t > 0$ è il tempo e $x \in \mathbb{R}$ è la posizione lungo la barra. Supponiamo di conoscere all'istante iniziale la distribuzione di temperatura lungo la barra,

$$u(0,x) = f(x). \tag{9}$$

Supponiamo inoltre che f sia una funzione integrabile. Applichiamo la trasformata di Fourier rispetto alla sola variabile spaziale x,

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x,$$

Supponendo che u sia derivabile due volte con derivate integrabili, abbiamo

$$\mathcal{F}[\partial_{xx}^2 u] = -\xi^2\widehat{u}, \tag{10}$$

e supponendo di poter passare la derivata rispetto a t sotto al segno di integrale formalmente abbiamo

$$\mathcal{F}[\partial_t u] = \partial_t\widehat{u}. \tag{11}$$

L'equazione alle derivate parziali (8) per u si trasforma allora in un'equazione differenziale ordinaria per $\widehat{u}$,

$$\partial_t\widehat{u} = -\xi^2\widehat{u}, \qquad \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

che si risolve facilmente e si ottiene

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2 t}.$$

Applicando la trasformata inversa troviamo la formula

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Sia $g_{t,x}(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\mathrm{e}^{-\xi^2 t}$; la sua trasformata è la funzione

$$\widehat{g_{t,x}}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}.$$

Per la formula dello scambio del cappello otteniamo

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{f}(\xi)g_{t,x}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int f(y)\widehat{g_{t,x}}(y)\;dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int f(y)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y,$$

che possiamo anche scrivere in forma di convoluzione,

$$u(t,x) = (K_t * f)(x), \tag{12}$$

dove il nucleo di convoluzione è dato da

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Una volta ottenuta questa formula per u possiamo verificare che essa produce effettivamente una soluzione del problema (8), (9).

3.2. **Problema di Dirichlet nel semipiano.** Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano: data una funzione $f(x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$, determinare una funzione $u(x,y)$, definita per $x \in \mathbb{R}$ e $y \geqslant 0$, che risolve l'equazione

$$\partial^2_{xx}u + \partial^2_{yy}u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, y > 0, \tag{13}$$

con dati al bordo

$$u(x,0) = f(x).$$

Osserviamo che se $u(x,y)$ è una soluzione allora anche $u(x,y) + ky$ è soluzione. Per avere unicità della soluzione richiediamo che u sia limitata per $y \to \infty$.

Supponiamo che f sia integrabile. Come prima, procediamo trasformando tutto rispetto alla variabile x, formalmente il problema si trasforma nel problema di Cauchy

$$-\xi^2\widehat{u} + \partial^2_{yy}\widehat{u} = 0, \qquad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)$$

Le soluzioni di questa equazione differenziale ordinaria del secondo ordine omogenea e a coefficienti costanti (rispetto ad y) si possono scrivere nella forma

$$\widehat{u}(\xi,y) = A(\xi)\mathrm{e}^{|\xi|y} + B(\xi)\mathrm{e}^{-|\xi|y}, \qquad A(\xi) + B(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

Siccome cerchiamo una soluzione che si mantenga limitata per $y \to +\infty$ dobbiamo scartare la componente relativa a $\mathrm{e}^{|\xi|y}$ e dunque richiedere che $A = 0$ e di conseguenza $B = \widehat{f}$. Otteniamo così

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-|\xi|y},$$

che, invertendo la trasformata, corrisponde alla soluzione

$$u(x,y) = (P_y * f)(x),$$

dove i nuclei di convoluzione $P_y(x)$, detti in questo caso *nuclei di Poisson*, sono funzioni la cui trasformata è $\widehat{P_y}(\xi) = \mathrm{e}^{-|\xi|y}$, ovvero si tratta delle funzioni

$$P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.$$

Quindi la soluzione cercata è data da

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{yf(x-t)}{t^2+y^2}\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

4. Esercizi

4.1. Teorema del campionamento di Shannon.

Esercizio 4.1. Considera un segnale $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dimostra che la funzione g definita da

$$g(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

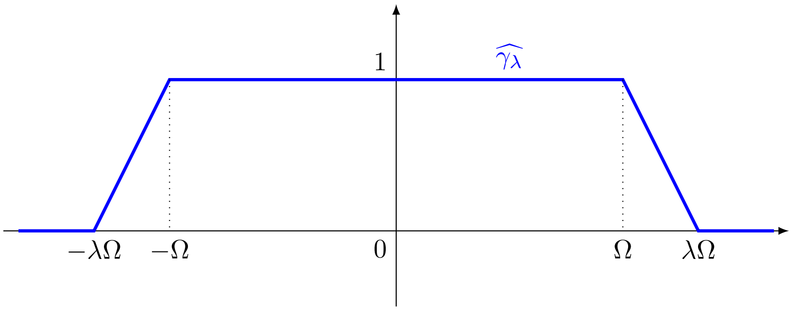
è la migliore approssimazione, in norma L^2, del segnale f con un segnale a banda limitata nello spettro di frequenze $[-\Omega, \Omega]$.

Esercizio 4.2. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ un segnale a banda limitata con frequenze ristrette all'intervallo $[-\Omega, \Omega]$. Sia $\lambda > 1$.

(1) Dimostra che quando $|\omega| \leqslant \lambda\Omega$ si ha

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{\lambda\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\Big(k \frac{\pi}{\lambda\Omega}\Big) e^{-ik \frac{\pi}{\lambda\Omega} \omega}.$$

(2) Sia γ_λ la funzione la cui trasformata di Fourier è descritta dal seguente grafico:



Calcola una formula esplicita per γ_λ e verifica che $|\gamma_\lambda(t)| \leqslant C t^{-2}$ per $t \to \infty$.

(3) Osserva che $\widehat{f}(\omega) = \widehat{\gamma_\lambda}(\omega)\widehat{f}(\omega)$. Sostituendo nella formula ottenuta nel primo punto, e utilizzando la formula di inversione verifica che si ottiene la formula

$$f(t) = \frac{\pi}{\lambda\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\Big(k \frac{\pi}{\lambda\Omega}\Big) \gamma_\lambda\big(t - k \frac{\pi}{\lambda\Omega}\big).$$

Questo procedimento ci permette di ottenere una formula con una convergenza puntuale più rapida di quella offerta dal teorema di Shannon.

4.2. Principio di indeterminazione di Heinsenberg.

Esercizio 4.3. Dimostra che si ha uguaglianza nella disuguaglianza di Heinsenberg (4) nel caso $p = q = 0$,

$$\Delta_0(f)\Delta_0(\widehat{f}) = \frac{1}{4},$$

se e solo se $f'(x) + cxf(x) = 0$ per una costante $c > 0$, ovvero se e solo se f è una funzione gaussiana della forma

$$f(x) = C e^{-\frac{c}{2}x^2},$$

con $C \in \mathbb{C}$ e $c > 0$.

Identifica poi le funzioni che minimizzano il prodotto $\Delta_p(f)\Delta_q(\widehat{f})$ per generici p e q.

4.3. **Equazioni alle derivate parziali.**

Esercizio 4.4. Usa la trasformata di Fourier per ottenere una soluzione $u(x)$ dell'equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea

$$u'' - u = \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Esercizio 4.5. Calcola le derivate parziali della funzione u definita dalla formula (12) e verifica che si tratta effettivamente di una soluzione dell'equazione del calore.

Esercizio 4.6. Verifica che la funzione $u(t,\cdot)$ definita dalla formula (12) converge alla funzione f in norma L^1 per $t \to 0^+$.

Esercizio 4.7. Verifica che la funzione u definita dalla formula (12) soddisfa ipotesi sufficienti per la validità delle formule (10) e (11).

Esercizio 4.8. Determina esplicitamente la soluzione $u(t,x)$ dell'equazione del calore $\partial_t u = \partial^2_{xx} u$, con dato iniziale $u(0,x) = f(x)$, nel caso in cui $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ e nel caso in cui $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.

Per semplificare la notazione indichiamo le derivate parziali di una funzione ponendo dei pedici che indicano rispetto a quale variabile si deriva,

$$u_t := \partial_t u, \quad u_x := \partial_x u, \quad u_{xx} := \partial^2_{xx} u.$$

Esercizio 4.9. Determina mediante l'uso della trasformata di Fourier la soluzione $u(t,x)$ del problema

$$\begin{cases} u_t + 3u_x - u_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{-(x-1)^2}. \end{cases}$$

Esercizio 4.10. Verifica che la funzione u definita dalla formula (14) soddisfa l'equazione di Laplace (13) e per $y \to 0^+$ si ha che $u(\cdot, y)$ converge a f in norma L^p.

Esercizio 4.11. Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ determina la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - u = 0, & 0 < y < 1,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, \\ u(x,1) = f(x). \end{cases}$$

Verifica che $\|u(\cdot,y)\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$.

Esercizio 4.12. Utilizzando la trasformata di Fourier trova delle formule per rappresentare la soluzione $u(t,x)$ dell'equazione delle onde

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

soggetta alle condizioni iniziali

$$u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x).$$

Esercizio 4.13. Determina la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{txx} + u_{xxxx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 0, \\ u_t(0,x) = f(x). \end{cases}$$