ANALISI 3 - L19: TRASFORMATA DI FOURIER IN L^2

1. Prolungamenti continui di operatori lineari

Lemma 1.1. *Sia $T\colon X \to Y$ un operatore continuo tra due spazi normati X e Y, sia V un sottospazio denso in X. Se T si annulla in ogni punto di V allora T è identicamente nullo su tutto X.*

Dimostrazione. Siccome T è continuo, la controimmagine del valore zero $T^{-1}(\{0\})$ è un chiuso di X. Se T si annulla su V tale controimmagine deve contenere la chiusura di V, che per densità coincide con tutto X. □

Proposizione 1.2. *Sia $T\colon V \to Y$ un operatore lineare e continuo, dove V è un sottospazio vettoriale denso nello spazio normato X e Y è uno spazio di Banach. Allora esiste ed è unico un operatore lineare e continuo $\widetilde{T}\colon X \to Y$ che prolunga T da V a X, ovvero tale che $\widetilde{T}(x) = T(x)$ per ogni $x \in V$. Inoltre abbiamo che*

$$\|\widetilde{T}\|_{X\to Y} = \|T\|_{V\to Y}.$$

Dimostrazione. Dato $x \in X$, per la densità di V esiste una successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di V che converge ad x in X. Essendo T un operatore limitato ne segue che la successione $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in Y, in quanto

$$\|Tv_n - Tv_m\|_Y \leqslant \|T\|_{V\to Y} \|v_n - v_m\|_X.$$

Siccome Y è completo allora esisterà in Y il limite $y = \lim_{n\to\infty} Tv_n$. Sia $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un'altra successione in V che converge a x in X; e sia $z = \lim_{n\to\infty} Tw_n$ il corrispondente limite in Y. Per continuità dell'operatore T abbiamo

$$z - y = \lim_{n\to\infty}(Tw_n - Tv_n) = T\big(\lim_n (w_n - v_n)\big) = T(x - x) = 0.$$

Dunque $z = y$, ovvero il punto limite y non dipende dalla successione scelta per approssimare x. Possiamo definire allora in modo univoco una funzione $\widetilde{T}\colon X \to Y$ che ad ogni $x \in X$ associa il punto $y \in Y$ ottenuto come limite $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n$, dove x_n è una qualsiasi successione in V che approssima x. Chiaramente si tratta di un prolungamento di T, poiché se $x \in V$ possiamo scegliere la successione costante $v_n = x$ e concludere che $\widetilde{T}x = Tx$.

Dalla linearità e continuità di T seguono anche la linearità e la continuità di $\widetilde{T}$. Infatti, per ogni $a, b \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in V che approssima a e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in V che approssima b, allora $(v_n + \lambda w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in V che approssima $a + \lambda b$ e abbiamo

$$\widetilde{T}(a + \lambda b) = \lim_n T(v_n + \lambda w_n) = \lim_n Tv_n + \lambda \lim_n Tw_n = \widetilde{T}a + \lambda \widetilde{T}b.$$

Inoltre,

$$\|\widetilde{T}a\|_Y = \|\lim_n Tv_n\|_Y = \lim_n \|Tv_n\|_Y \leqslant \|T\|_{V\to Y} \lim_n \|v_n\|_X = \|T\|_{V\to Y} \|a\|_X,$$

e dunque $\widetilde{T}$ è continuo con $\|\widetilde{T}\|_{X\to Y} \leqslant \|T\|_{V\to Y}$. Essendo un prolungamento abbiamo anche

$$\|\widetilde{T}\|_{X\to Y} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|\widetilde{T}x\|_Y}{\|x\|_X} \geqslant \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Tv\|_Y}{\|v\|_X} = \|T\|_{V\to Y}.$$

Date: ultimo aggiornamento, 12 gennaio 2022.

Le norme operatoriali di $\widetilde{T}$ e T dunque coincidono.

L'unicità segue dal lemma 1.1: se $T_1, T_2\colon X \to Y$ sono due operatori lineari e continui che prolungano T, allora l'operatore $T_2 - T_1$ è un operatore lineare e continuo su X che si annulla su V, dunque $T_2 - T_1$ è identicamente nullo e quindi T_2 coincide con T_1. □

2. Trasformata di Fourier di funzioni L^p

Nella scorsa lezione abbiamo visto che la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ agisce come una biezione sullo spazio $\mathcal{V}$ formato dalle funzioni L^1 con trasformata in L^1. Lo spazio $\mathcal{V}$ è contenuto in L^p per ogni $p \in [1, +\infty]$. Indichiamo con $\mathcal{V}_p = (\mathcal{V}, \|\cdot\|_{L^p})$ lo spazio normato formato dallo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dotato della norma di L^p. Sappiamo che $\mathcal{V}_p$ è un sottospazio denso di L^p, in quando $\mathcal{V}$ contiene le funzioni lisce a supporto compatto. Per ogni coppia di esponenti $p, q \in [1, +\infty]$ possiamo considerare la trasformata di Fourier come un operatore lineare da $\mathcal{V}_p$ a $\mathcal{V}_q$. Ci chiediamo se sfruttando la densità sia possibile estendere l'operatore di trasformata a tutto lo spazio L^p per qualche $p > 1$. Grazie alla proposizione 1.2 possiamo estendere l'operatore di trasformata di Fourier a tutte le funzioni in L^p quando esso risulta continuo su $\mathcal{V}_p$ a valori in $\mathcal{V}_q$ per qualche q, ovvero quando vale una stima del tipo

$$\|\widehat{f}\|_{L^q} \leqslant C_{p,q} \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in \mathcal{V}, \tag{1}$$

per qualche costante $C_{p,q}$ positiva e finita. Noi sappiamo già che stime della forma (1) valgono quando:

- $p = 1$, $q = \infty$ con $C_{1,\infty} = 1$, come segue immediatamente dalla definizione di trasformata
$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1};$$
- $p = 2$, $q = 2$ con $C_{2,2} = \sqrt{2\pi}$, come si deduce dall'identità di Plancherel
$$\|\widehat{f}\|_{L^2} \leqslant \sqrt{2\pi}\, \|f\|_{L^2}.$$

La stima (1) non è disponibile per tutte le possibili coppie di esponenti. Vediamo alcune condizioni necessarie.

Proposizione 2.1. *Se vale la stima* (1) *allora necessariamente: gli esponenti p e q formano una coppia di esponenti coniugati,*
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{V}$ una funzione non nulla. Consideriamo la famiglia $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ delle riscalate di f,
$$f_\lambda(x) := f(\lambda x).$$
La norma L^p di f_λ è data da
$$\|f_\lambda\|_{L^p} = \Big(\int |f(\lambda x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p} = \Big(\int |f(y)|^p \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p} = \lambda^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}.$$
La trasformata di f_λ si ottiene con la regola per la trasformata di funzioni riscalate,
$$\widehat{f_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big).$$
La norma L^q di $\widehat{f_\lambda}$ è data da
$$\|\widehat{f_\lambda}\|_{L^q} = \frac{1}{\lambda}\Big(\int \Big|\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\Big|^p \mathrm{d}\xi\Big)^{1/q} = \frac{1}{\lambda}\Big(\int \big|\widehat{f}(\eta)\big|^q \lambda\,\mathrm{d}\eta\Big)^{1/q} = \lambda^{\frac{1}{q}-1}\|\widehat{f}\|_{L^q}.$$

Se vale la stima (1) allora dovrà essere
$$C_{p,q} \geqslant \frac{\|\widehat{f_\lambda}\|_{L^q}}{\|f_\lambda\|_{L^p}} = \lambda^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} \frac{\|\widehat{f}\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}},$$
per ogni $\lambda > 0$. Questo implica che la funzione potenza $\lambda \mapsto \lambda^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}$ deve essere una funzione limitata su $]0, +\infty[$, e ciò è possibile se e solo se l'esponente è nullo, dunque deve essere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Proposizione 2.2. *Se vale la stima* (1) *allora necessariamente* $q \geqslant 2$.

Per la dimostrazione ci serviamo delle proprietà dei cosidetti *polinomi di Shapiro* descritti nel seguente lemma.

Lemma 2.3. *Sia* $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *e* $(Q_n(z))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *due famiglie di polinomi definiti in modo ricorsivo dalle seguenti formule,*
$$\begin{aligned} P_0(z) &:= 1, \quad Q_0(z) := 1, \\ P_{n+1}(z) &:= P_n(z) + z^{2^n} Q_n(z), \\ Q_{n+1}(z) &:= P_n(z) - z^{2^n} Q_n(z), \end{aligned}$$
per ogni $z \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{N}_0$*. Allora:*

- *i polinomi* P_n *e* Q_n *hanno grado* $2^n - 1$*;*
- *i coefficienti di* P_n *e di* Q_n *sono tutti uguali a* 1 *o a* -1*;*
- *sulla circonferenza unitaria, dove* $|z| = 1$*, vale l'identità*

$$|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2^{n+1}. \tag{2}$$

Le prime coppie della sequenza dei polinoni di Shapiro sono:
$$\begin{aligned} P_1(z) &= 1 + z, & Q_1(z) &= 1 - z, \\ P_2(z) &= 1 + z + z^2 - z^3, & Q_2(z) &= 1 + z - z^2 + z^3, \\ P_3(z) &= 1+z+z^2-z^3+z^4+z^5-z^6+z^7, & Q_3(z) &= 1+z+z^2-z^3-z^4-z^5+z^6-z^7. \end{aligned}$$

Osserviamo che dall'identità (2) si ricava un utile stima per il polinomio trigonometrico associato a P_n,
$$\left|P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\right| \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Dimostrazione del lemma 2.3. Procediamo per induzione su n. Quando $n = 0$ la verifica delle tre proprietà è immediata. Supponiamo come ipotesi induttiva che le tre proprietà valgano per la coppia di polinomi P_n e Q_n. Dalle formule ricorsive ricaviamo che:

- Il grado di P_n è $2^n - 1$ e il grado di $z^{2^n} Q_n$ è $2^n + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$, dunque il grado di P_{n+1} e di Q_{n+1} coincide con il più grande dei due, ovvero $2^{n+1} - 1$.
- I coefficienti di P_{n+1} e di Q_{n+1} corrispondenti ai monomi con grado minore di 2^n coincidono con quelli di P_n, mentre i coefficienti corrispondenti ai monomi con grado maggiore o uguale a 2^n sono uguali o opposti a quelli di Q_n (con indice traslato di 2^n) e quindi sono tutti uguali a ± 1.
- Siccome $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2\big(|a|^2 + |b|^2\big)$ per ogni coppia $a, b \in \mathbb{C}$, quando $|z| = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} |P_{n+1}(z)|^2 + |Q_{n+1}(z)|^2 &= \left|P_n(z) + z^{2^n} Q_n(z)\right|^2 + \left|P_n(z) - z^{2^n} Q_n(z)\right|^2 = \\ &= 2\left(|P_n(z)|^2 + |z|^{2^{n+1}} |Q_n(z)|^2\right) = 2\left(|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2\right) = \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Dunque le tre proprietà valgono anche per i polinomi P_{n+1} e Q_{n+1}. $\square$

Dimostrazione della proposizione 2.2. Sia ϕ una funzione non nulla di $\mathcal{V}$ tale che la sua trasformata $\widehat{\phi}$ abbia supporto contenuto nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la funzione $f_n \in \mathcal{V}$ definita da

$$f_n(x) := P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\phi(x), \tag{4}$$

dove $P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ è il polinomio trigonometrico corrispondente al polinomio di Shapiro P_n. Grazie alla stima (3) otteniamo

$$\|f_n\|_{L^p} \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}} \left|P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\right| \|\phi\|_{L^p} \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}} \|\phi\|_{L^p}.$$

Il polinomio P_n può essere scritto come

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k z^k,$$

con coefficienti $c_k \in \{-1, 1\}$. Per linearità la trasformata di f_n diventa

$$\widehat{f}_n(\xi) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\phi(x)](\xi) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \widehat{\phi}(\xi - k). \tag{5}$$

Per come abbiamo scelto ϕ il supporto di $\widehat{\phi}(\xi - k)$ è contenuto nell'intervallo

$$\Big[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\Big],$$

dunque $\widehat{f}_n$ è decomposta nella somma di 2^n componenti con supporti disgiunti; risulta allora che nella somma in (5) in ogni punto ξ solo al più un termine risulta non nullo e abbiamo

$$\left|\widehat{f}_n(\xi)\right|^q = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|\widehat{\phi}(\xi - k)\right|^q.$$

Siccome la norma L^q è invariante per traslazioni, integrando in ξ ricaviamo che

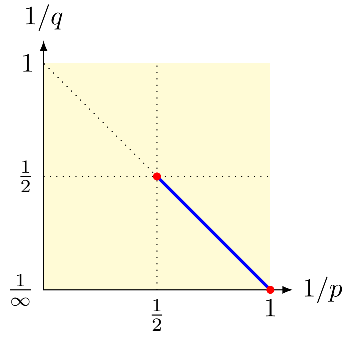
$$\|\widehat{f}_n\|_{L^q} = 2^{\frac{n}{q}} \|\widehat{\phi}\|_{L^q}.$$

Se vale la stima (1) allora dovrà essere

$$C_{p,q} \geqslant \frac{\|\widehat{f}_n\|_{L^q}}{\|f_n\|_{L^p}} \geqslant \frac{2^{\frac{n}{q}}\|\widehat{\phi}\|_{L^q}}{2^{\frac{n+1}{2}}\|\phi\|_{L^p}} = 2^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \frac{\|\widehat{\phi}\|_{L^q}}{\sqrt{2}\,\|\phi\|_{L^p}},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$; questo implica che la progressione geometrica $2^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}$ è limitata per $n \to \infty$, e dunque dovrà essere $\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \leqslant 0$, ovvero $q \geqslant 2$. $\square$

Combinando insieme le proposizioni 2.1 e 2.2 otteniamo che una stima del tipo (1) è possibile solo quando $q = p'$ è l'esponente coniugato di p e $p \in [1, 2]$. I casi estremi con $(p, q) = (1, \infty)$ e $(p, q) = (2, 2)$ li abbiamo dimostrati. Nei casi intermedi corrispondenti a $1 < p < 2$ la stima (1) è effettivamente valida e va sotto il nome di disuguaglianza di Hausdorff-Young per la trasformata di Fourier.



Teorema 2.4 (Hausdorff - Young)**.** *Sia $p \in [1,2]$ e sia $p' = p/(p-1)$ l'esponente coniugato. Allora esiste una costante $C_p > 0$ tale che*

$$\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^{p'}} \leqslant C_p \,\|f\|_{L^p}\,, \quad \forall f \in \mathcal{V}. \tag{6}$$

La dimostrazione del teorema si può ottenere dai due casi estremi con tecniche di interpolazione un tantino sofisticate e che esulano dagli scopi del nostro corso, pertanto non la forniamo in dettaglio in tutta la sua completezza. Ci sono alcuni casi speciali che comunque possiamo dimostrare facilmente utilizzando le proprietà della trasformata a nostra disposizione.

Dimostrazione del teorema 2.4 in un caso speciale. Consideriamo il caso in cui $p = \frac{4}{3}$ e $p' = 4$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^4}^4 &= \big\|\widehat{f}^{\,2}\big\|_{L^2}^2 && (\widehat{f}^{\,4} = (\widehat{f}^{\,2})^2)\\
&= \big\|\mathcal{F}[f * f]\big\|_{L^2}^2 && \text{(trasformata della convoluzione)}\\
&= 2\pi \,\|f * f\|_{L^2}^2 && \text{(identità di Plancherel)}\\
&\leqslant 2\pi \left(\|f\|_{L^{4/3}}\,\|f\|_{L^{4/3}}\right)^2 && \text{(disug. di Young per conv.: } 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\text{)}.
\end{aligned}$$

Dunque $\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^4} \leqslant (2\pi)^{1/4}\,\|f\|_{L^{4/3}}$. □

La stima di Hausdorff-Young (6) ci dice che la trasformata di Fourier è un operatore lineare e continuo da $\mathcal{V}_p$ a $\mathcal{V}_{p'}$ quando $1 \leqslant p \leqslant 2$. Siccome $\mathcal{V}_p$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$ la proposizione 1.2 ci assicura che è possibile estendere per continuità l'operatore di trasformata, in modo unico, a tutto lo spazio L^p, e quindi possiamo definire la trasformata di Fourier per ogni funzione $f \in L^p$ per ogni $p \in [1,2]$,

$$\mathcal{F}\colon L^p(\mathbb{R}) \to L^{p'}(\mathbb{R}).$$

Rileggendo la dimostrazione della proposizione 1.2 abbiamo che, data $f \in L^p$, la trasformata $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ si ottiene come limite in $L^{p'}$ della successione di trasformate $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni in $\mathcal{V}$ che approssima f in norma L^p.

Tra tutti i casi possibili quello che ci interessa di più è il caso $p = 2$ per almeno due motivi:

- abbiamo $p = p'$ se e solo se $p = 2$, e dunque $\mathcal{F}$ agisce come una trasformazione sullo spazio L^2, rimanendo in L^2;
- lo spazio L^p è uno spazio di Hilbert se e solo se $p = 2$, e dunque in tal caso possiamo utilizzare le strutture della geometra euclidea (prodotto scalare, proiezioni ortogonali, basi ortonormali).

3. Proprietà della trasformata su L^2

Consideriamo la trasformata di Fourier definita su L^2,

$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),$$

ottenuta come prolungamento continuo, nella norma L^2, della trasformata su $\mathcal{V}$. Le identità di Parseval e Plancherel che abbiamo dimostrato valere per funzioni di $\mathcal{V}$ si estendono a tutto L^2.

Proposizione 3.1. *Per ogni coppia di funzioni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= 2\pi \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \\ \big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \sqrt{2\pi}\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di funzioni di $\mathcal{V}$ che convergono, rispettivamente, ad f e a g in norma L^2. Allora le successioni delle trasformate $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\widehat{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono, rispettivamente, a $\widehat{f}$ e a $\widehat{g}$ sempre in norma L^2. Su $\mathcal{V}$ valgono le identità,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}_n, \widehat{g}_n\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= 2\pi \langle f_n, g_n\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \\ \big\|\widehat{f}_n\big\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \sqrt{2\pi}\, \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ per la continuità del prodotto scalare e della norma otteniamo le identità per f e g. □

Anche la formula di inversione per la doppia trasformata si estende per continuità a tutto L^2.

Proposizione 3.2. *Per ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f_R.$$

Dimostrazione. La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un operatore continuo su L^2, e quindi anche la doppia trasformata $f \mapsto \mathcal{F}\mathcal{F}[f] = \widehat{\widehat{f}}$ è continua su L^2. L'operatore lineare che ad ogni funzione f associa la sua rovesciata $f_R(x) = f(-x)$ è anch'esso continuo su L^2, in quanto $\|f_R\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Ne segue che l'operatore $T\colon L^2 \to L^2$, definito da

$$Tf := \widehat{\widehat{f}} - 2\pi f_R,$$

è un operatore continuo su L^2. Siccome la formula di inversione è valida su $\mathcal{V}$ abbiamo che T si annulla su $\mathcal{V}$, che è denso in L^2, quindi, per il lemma 1.1, l'operatore T si annulla su tutto L^2, e dunque la formula di inversione vale su tutto L^2. □

Sempre per continuità si estendono facilmente molte altre proprietà della trasformata di Fourier che abbiamo visto valere per funzioni L^1.

Proposizione 3.3. *Per la trasformata di Fourier su L^2 valgono (ancora) le seguenti proprietà elementari: se $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora*

- *la traslata di una funzione si trasforma in un'armonica modulata dalla trasformata,*
$$g(x) = f(x+p) \implies \widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\xi}\widehat{f}(\xi);$$
- *un armonica modulata si trasforma nella traslata della trasformata,*
$$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} f(x) \implies \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - p);$$
- *la riscalata si trasforma in un multiplo della riscalata, con un fattore di scala reciproco, della trasformata,*
$$g(x) = f(\lambda x) \implies \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big);$$

- *la rovesciata di una funzione si trasforma nella rovesciata della trasformata,*
$$g(x) = f(-x) \implies \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi);$$
- *il coniugato di una funzione si trasforma nel coniugato della rovesciata della trasformata,*
$$g(x) = \overline{f(x)} \implies \widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}.$$

Dimostrazione. Tutte queste proprietà sappiamo già che valgono per le funzioni di $\mathcal{V}$. Per estenderle a tutto L^2, possiamo procedere in modo simile a come abbiamo fatto per la formula di inversione, e ci basta osservare che i seguenti operatori lineari (o antilineari nel caso del coniugio) sono continui su L^2:

- per ogni $p \in \mathbb{R}$, l'operatore di traslazione che alla funzione $f(x)$ associa la traslata $f(x+p)$;
- per ogni $p \in \mathbb{R}$, l'operatore di modulazione che alla funzione $f(x)$ associa l'armonica modulata $\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} f(x)$;
- per ogni $\lambda > 0$, l'operatore di traslazione che alla funzione $f(x)$ associa la riscalata $f(\lambda x)$;
- l'operatore di rovesciamento che alla funzione $f(x)$ associa la rovesciata $f(-x)$;
- l'operatore di coniugio che alla funzione $f(x)$ associa la coniugata $\overline{f(x)}$.

□

Osservazione 3.4. La proposizione 3.1 dice che la trasformata $\mathcal{F}$ è una isometria e dunque è iniettiva. La proposizione 3.2 dice che $f = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\widehat{f}_R\right]$ e dunque la trasformata è suriettiva. Quindi $\mathcal{F}$ è una biezione su L^2 e la sua inversa è data da
$$\mathcal{F}^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f_R],$$
che è anch'esso un operatore lineare e continuo. In particolare ogni funzione di L^2 è sempre la trasformata di una funzione di L^2; per questo motivo il lemma di Riemann-Lebesgue non è più valido per funzioni di L^2, in quanto non tutte le funzioni di L^2 sono continue o sono infinitesime all'infinito.

Combinando l'identità di Parseval con la formula di inversione si dimostra facilmente che anche per funzioni $f, g \in L^2$ vale la formula dello scambio dei cappelli,
$$\int \widehat{f} g = \langle \widehat{f}, \overline{g} \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{f}, \overline{\widehat{\widehat{g}}_R} \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{f}, \widehat{\overline{\widehat{g}}} \rangle = \langle f, \overline{\widehat{g}} \rangle = \int f \widehat{g}.$$

Proposizione 3.5. *Date due funzioni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo*
$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}.$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato nella scorsa lezione la validità della formula per funzioni in $\mathcal{V}$. Date $f, g \in L^2$ scegliamo due successioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni in $\mathcal{V}$ tali che (f_n) converge a f in norma L^2 e (g_n) converge a g in norma L^2.

Usando la disuguaglianza di Hölder ricaviamo che la successione dei prodotti $(f_n g_n)$ converge al prodotto fg in norma L^1, infatti
$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_{L^1} &\leqslant \|f_n(g_n - g)\|_{L^1} + \|(f_n - f)g\|_{L^1} \leqslant \\ &\leqslant \|f_n\|_{L^2}\|g_n - g\|_{L^2} + \|f_n - f\|_{L^2}\|g\|_{L^2},\end{aligned}$$
e $\|f_n\|_{L^2}$ converge a $\|f\|_{L^2}$ mentre $\|f_n - f\|_{L^2}$ e $\|g_n - g\|_{L^2}$ convergono a zero. Siccome la trasformata $\mathcal{F}$ è continua da L^1 a L^∞ otteniamo che la successione delle

trasformate dei prodotti $\mathcal{F}[f_n g_n]$ converge alla trasformata del prodotto $\mathcal{F}[fg]$ in norma L^∞ (ovvero uniformemente).

Siccome $\mathcal{F}$ è un'isometria su L^2, per le successioni delle trasformate abbiamo che $(\widehat{f}_n)$ converge a $\widehat{f}$ in norma L^2 e $(\widehat{g}_n)$ converge a $\widehat{g}$ in norma L^2. Usando la disuguaglianza di Young ricaviamo che la successione delle convoluzioni $(\widehat{f}_n * \widehat{g}_n)$ converge alla convoluzione $\widehat{f} * \widehat{g}$ in norma L^∞ (dunque uniformemente), infatti

$$\begin{aligned}\big\|\widehat{f}_n * \widehat{g}_n - \widehat{f} * \widehat{g}\big\|_{L^\infty} &\leqslant \big\|\widehat{f}_n * (\widehat{g}_n - \widehat{g})\big\|_{L^\infty} + \big\|(\widehat{f}_n - \widehat{f}) * \widehat{g}\big\|_{L^\infty} \leqslant \\ &\leqslant \big\|\widehat{f}_n\big\|_{L^2} \|\widehat{g}_n - \widehat{g}\|_{L^2} + \big\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\big\|_{L^2} \|\widehat{g}\|_{L^2},\end{aligned}$$

e $\big\|\widehat{f}_n\big\|_{L^2}$ converge a $\big\|\widehat{f}\big\|_{L^2}$ mentre $\big\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\big\|_{L^2}$ e $\|\widehat{g}_n - \widehat{g}\|_{L^2}$ convergono a zero.

Avendo scelto $f_n, g_n \in \mathcal{V}$ sappiamo che per esse vale la formula della trasformata del prodotto,

$$\mathcal{F}[f_n \cdot g_n] = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}_n * \widehat{g}_n.$$

Per unicità del limite (in L^∞), quando $n \to \infty$ otteniamo la formula per il prodotto di f e g. □

Osservazione 3.6. Per quanto riguarda la trasformata della convoluzione di due funzioni in L^2, sappiamo che se $f, g \in L^2$ la convoluzione $f * g$ è una funzione limitata, continua e infinitesima all'infinito, ma, come mostra l'esempio 3.7, potrebbe non essere in L^p per alcun $p \in [1, 2]$ e dunque, per il momento, non abbiamo modo di dare senso alla sua trasformata. Quello che possiamo fare è applicare la proposizione 3.5 al prodotto delle due trasformate $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ che sono funzioni L^2 e utilizzare la formula di inversione,

$$\mathcal{F}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}] = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}} * \widehat{\widehat{g}} = 2\pi (f * g)_R.$$

Siccome l'operatore inverso della trasformata, $\mathcal{F}^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f]_R$, agisce con le stesse proprietà della trasformata, quindi possiamo definirlo come operatore lineare continuo da L^1 a L^∞, otteniamo che

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}] = f * g,$$

che formalmente corrisponde alla proprietà $\mathcal{F}[f * g] = \widehat{f}\widehat{g}$ che già conosciamo per funzioni di L^1.

Esempio 3.7. Vediamo un esempio di una funzione f di L^2 tale che per ogni $p < \infty$ la convoluzione $f * f$ non sta in L^p. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + |x|}(1 + \log(1 + |x|))}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si tratta di una funzione pari, non negativa e descrescente per $x > 0$, con norma L^2 finita, infatti

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x)(1 + \log(1 + x))^2} = 2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t)^2} = 2.$$

Quando $0 < y < x$, abbiamo $0 < x-y < x$ e quindi per monotonia $f(x-y) > f(x)$, inoltre $f(y) \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+|y|}(1+\log(1+|x|))}$; dunque per $x \to +\infty$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
(f * f)(x) \geqslant \int_0^x f(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \geqslant f(x)\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+\log(1+x))^2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y}} = \\
= \frac{2}{(1+\log(1+x))^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \approx \frac{2}{(\log x)^2}.
\end{aligned}
$$

Quando $0 < p < \infty$ la funzione $(\log x)^{-2p}$ non è integrabile in un intorno di $+\infty$ e dunque per confronto $f * f \notin L^p$.

Per quanto riguarda la trasformata della derivata di funzioni L^2 abbiamo una proprietà analoga a quella vista per funzioni L^1.

Ricordiamo che, se f e g sono funzioni localmente integrabili su $\mathbb{R}$, allora g si dice derivata debole di f quando vale l'uguaglianza

$$
\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{7}
$$

per ogni funzione ϕ liscia e a supporto compatto. Nel caso in cui f ed g sono funzioni di L^2 possiamo scrivere la condizione (7) nella forma

$$
\langle f, \phi'\rangle = -\langle g, \phi\rangle, \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).
$$

Proposizione 3.8. *Sia $f \in L^2$ una funzione dotata di derivata debole $f' \in L^2(\mathbb{R})$. Allora*

$$
\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi).
$$

Dimostrazione. Sia ϕ una funzione liscia a supporto compatto in $\mathbb{R}$. Siccome ϕ e ϕ' sono funzioni di L^1 abbiamo $\widehat{\phi'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\widehat{\phi}$. Siccome f e la sua derivata debole sono in L^2 abbiamo

$$
\langle f', \phi\rangle = -\langle f, \phi'\rangle.
$$

Per l'identità di Parseval segue che

$$
\langle \widehat{f'}, \widehat{\phi}\rangle = -\langle \widehat{f}, \widehat{\phi'}\rangle = -\langle \widehat{f}, \mathrm{i}\xi\widehat{\phi}\rangle = \langle \mathrm{i}\xi\widehat{f}, \widehat{\phi}\rangle.
$$

Dunque

$$
\langle \widehat{f'} - \mathrm{i}\xi\widehat{f}, \widehat{\phi}\rangle = 0,
$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ovvero $\widehat{f'} - \mathrm{i}\xi\widehat{f}$ è ortogonale all'insieme $S := \mathcal{F}(C_c^\infty)$ delle trasformate delle funzioni lisce suppporto compatto. Essendo $\mathcal{F}$ una isometria su L^2 ed essendo C_c^∞ denso in L^2, ne segue che anche S è denso in L^2, e quindi l'unica funzione ortogonale a S in L^2 è la funzione nulla. Dunque $\widehat{f'} - \mathrm{i}\xi\widehat{f} = 0$.

□

Anche per quanto riguarda la derivata della trasformata in L^2 abbiamo un risultato analogo a quello di L^1.

Proposizione 3.9. *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che anche $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Allora la trasformata $\widehat{f}$ possiede una derivata debole che coincide (quasi ovunque) con la trasformata della funzione $-\mathrm{i}xf(x)$,*

$$
\partial_\xi \widehat{f} = \mathcal{F}\left[x \mapsto -\mathrm{i}xf(x)\right].
$$

Dimostrazione. Sia ϕ una funzione liscia a supporto compatto. Abbiamo che ϕ e ϕ' sono funzioni di L^1 e dunque $\widehat{\phi'}(x) = \mathrm{i}x\widehat{\phi}(x)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \widehat{f}(\xi)\phi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int f(x)\widehat{\phi'}(x)\,\mathrm{d}x && \text{(scambio dei cappelli)}\\
&= \int f(x)\mathrm{i}x\widehat{\phi}(x)\,\mathrm{d}x && \text{(trasformata della derivata)}\\
&= -\int (-\mathrm{i}xf(x))\widehat{\phi}(x)\,\mathrm{d}x && \text{(segno in evidenza)}\\
&= -\int \mathcal{F}[-\mathrm{i}xf(x)](\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi && \text{(scambio dei cappelli).}
\end{aligned}$$

□

4. Esempi di calcolo di trasformate

Esempio 4.1. La funzione $\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin x}{x}$ appartiene a L^p se e solo se $p > 1$. Quindi non sta in L^1 ma sta in L^2. Abbiamo gia calcolato che la trasformata di $\operatorname{rect}(x) := \chi_{[-1/2,1/2]}(x)$ è data da $\mathcal{F}[\operatorname{rect}](\xi) = \operatorname{sinc}(\xi/2)$, dunque

$$\operatorname{sinc}(x) = \widehat{\operatorname{rect}}(2x).$$

Applicando la formula della trasformata della riscalata e la formula di inversione otteniamo

$$\widehat{\operatorname{sinc}}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{\widehat{\operatorname{rect}}}\Big(\frac{1}{2}\xi\Big) = \pi\operatorname{rect}\Big(-\frac{1}{2}\xi\Big) = \pi\chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Esempio 4.2. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{(\sin x)^2}{x^2} = (\operatorname{sinc} x)^2.$$

Si tratta di una funzione L^1, ma il calcolo della trasformata tramite la definizione non è semplice,

$$\widehat{f}(\xi) = \int \frac{(\sin x)^2}{x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Possiamo vedere invece f come prodotto di due funzioni di L^2 di cui già conosciamo la trasformata e usare le formule per la trasformata del prodotto,

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[\operatorname{sinc}\cdot\operatorname{sinc}](\xi) = \frac{1}{2\pi}\big(\widehat{\operatorname{sinc}} * \widehat{\operatorname{sinc}}\big)(\xi) = \frac{\pi}{2}\big(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\big)(\xi) = \frac{\pi}{2}(2-|x|)_+.$$

Esempio 4.3. La funzione $f(x) = \frac{1}{x+\mathrm{i}}$ appartiene a L^2, ma non a L^1, in quanto $|f(x)| = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > 0$ abbiamo che

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{z}\Big]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{z}.$$

Dunque se $z = 1 - \mathrm{i}x$, otteniamo

$$\frac{1}{1-\mathrm{i}x} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-x)t}\,\mathrm{d}t = \widehat{g}(-x),$$

dove $g(t) = \mathrm{e}^{-t}\chi_{[0,\infty[}(t)$. Dunque

$$f(x) = \frac{-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}x} = -\mathrm{i}\widehat{g}(-x),$$

Grazie alla formula di inversione ricaviamo che

$$\widehat{f}(\xi) = -\mathrm{i}\widehat{\widehat{g}}(-\xi) = -\mathrm{i}2\pi g(\xi) = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\xi}\chi_{[0,+\infty[}(\xi).$$

Esempio 4.4. Sia $f(x) = \frac{8}{x^4+4}$. Fattorizziamo il polinomio al denominatore come prodotto di fattori di secondo grado irriducibili (su $\mathbb{R}$),

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = \big((x+1)^2 + 1\big)\big((x-1)^2 + 1\big),$$

e decomponiamo la funzione razionale f come somma di frazioni semplici,

$$f(x) = \frac{8}{x^4+4} = \frac{x+2}{(x+1)^2+1} - \frac{x-2}{(x-1)^2+1} = g_+(x+1) - g_-(x-1),$$

dove abbiamo posto

$$g_\pm(x) = \frac{x \pm 1}{x^2+1} = \pm\frac{1}{x^2+1} + x \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

Sappiamo che $\frac{2}{x^2+1}$ è la trasformata di $h(t) := \mathrm{e}^{-|t|}$. La derivata debole di h è la funzione $h'(t) = -\operatorname{sgn}(t)\mathrm{e}^{-|t|}$, e la sua trasformata sarà data dalla funzione $\frac{2\mathrm{i}x}{x^2+1}$. Dunque

$$g_\pm(x) = \pm\frac{1}{2}\widehat{h}(x) + \frac{1}{2}x\widehat{h}(x) = \pm\frac{1}{2}\widehat{h}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{i}\widehat{h'}(x).$$

Per la formula di inversione

$$\widehat{g}_\pm(\xi) = \pm\frac{1}{2}\widehat{\widehat{h}}(\xi) - \frac{1}{2}\mathrm{i}\widehat{\widehat{h'}}(\xi) = \pm\pi h(-\xi) - \pi\mathrm{i}h'(-\xi) = \pi\left(\pm 1 - \mathrm{i}\operatorname{sgn}(\xi)\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}$$

Tornando alla funzione f, la trasformata sarà

$$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\widehat{g_+}(\xi) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\widehat{g_-}(\xi) = 2\pi\big(\cos(\xi) + \operatorname{sgn}(\xi)\sin(\xi)\big)\mathrm{e}^{-|\xi|} =$$
$$= 2\pi\big(\cos(\xi) + \sin|\xi|\big)\mathrm{e}^{-|\xi|}.$$

5. Esercizi

5.1. Trasformata di Fourier di funzioni L^p.

Esercizio 5.1. Fornisci un esempio esplicito di una funzione $\phi \in \mathcal{V}$ tale che $\widehat{\phi}$ abbia supporto contenuto in $[-1/2, 1/2]$.

Esercizio 5.2. Spiega perché le funzioni definite in (4) sono funzioni che stanno in $\mathcal{V}$.

Esercizio 5.3. Dimostra la stima (6) di Hausdorff-Young nel caso in cui $p' = 6$.

Esercizio 5.4. La trasformata $\mathcal{F}$ è una biezione continua da $\mathcal{V}_p$ a $\mathcal{V}_{p'}$ per $p \in [1, 2]$. Spiega perché la sua inversa $\mathcal{F}^{-1}$ non è continua da $\mathcal{V}_{p'}$ a $\mathcal{V}_p$ quando $p < 2$.

5.2. Proprietà della trasformata su L^2.

Esercizio 5.5. Completa i dettagli della dimostrazione della proposizione 3.3.

Esercizio 5.6. Costruisci un esempio esplicito di una funzione $L^2(\mathbb{R})$ continua ma che non è infinitesima all'infinito.

Esercizio 5.7. Cosa ottieni se applichi 4 volte la trasformata di Fourier? Ricava una formula per calcolare $\mathcal{F}^4[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}[f]$.

Esercizio 5.8. La funzione $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ è una autofunzione dell'operatore $\mathcal{F}$ in L^2 corrispondente all'autovalore $\sqrt{2\pi}$, infatti $\mathcal{F}[g] = \sqrt{2\pi}g$.

- Determina tutti i polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale a 3 per i quali si ha che $p(x)g(x)$ è una autofunzione di $\mathcal{F}$, ovvero per i quali esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che
$$\mathcal{F}[pg] = \lambda pg.$$
- Determina tutti gli autovalori di $\mathcal{F}$.

5.3. **Esempi di calcolo di trasformate.**

Esercizio 5.9. Calcola le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\frac{\cos x}{1+x^2}, \qquad \frac{1}{2x-3\mathrm{i}}, \qquad \frac{x}{(x^2+1)^2},$$

$$\frac{1}{(5x+\mathrm{i})(3x-\mathrm{i})}, \qquad \sin(3x)\,\mathrm{sinc}(2x), \qquad x(\mathrm{sinc}(x-1))^2.$$

Esercizio 5.10. Calcola la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \int_0^2 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$

Esercizio 5.11. Calcola gli integrali:

$$\int_0^\infty \cos(2\pi x)\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{(\sin x)^4}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 5.12. Per ogni $a > 0$ definiamo i *nuclei di Poisson* $F_a(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2+x^2}$. Calcola la convoluzione $F_a * F_b$.

Esercizio 5.13. Per ogni $a, b > 0$ calcola l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 5.14. Calcola la norma L^2 della funzione $f(x)$ la cui trasformata di Fourier è la funzione

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1-\mathrm{i}\xi}{1+\mathrm{i}\xi} \cdot \frac{\sin\xi}{\xi}.$$

Esercizio 5.15. Considera le funzioni

$$\psi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sinc}(x/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

per $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

- Verifica che $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.
- Determina se si tratta di una base ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$.