ANALISI 3 - L18:
FORMULA DI INVERSIONE.

1. Funzioni integrabili con trasformate poco integrabili

Quando abbiamo introdotto la trasformata di Fourier partendo dalle formule della serie di Fourier abbiamo "formalmente" ricavato una formula che ricostruiva una funzione integrabile e a supporto compatto a partire dalla sua trasformata; la formula era

$$f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\widehat{f}](-\xi). \tag{1}$$

In generale, per una funzione $f \in L^1$ non è detto che la sua trasformata sia ancora una funzione di L^1.

Ad esempio: se $f(x) = \mathrm{rect}(x)$ abbiamo calcolato che

$$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{sinc}(\xi/2);$$

mentre $\mathrm{rect} \in L^1$, abbiamo che $\mathrm{sinc} \notin L^1$, anche se non sta in L^1 per un pelo, in quanto $\mathrm{sinc} \in L^p$ per ogni $p > 1$.

Altro esempio più deciso: se $f(x) = \frac{1}{2} |x|^{-1/2} \mathrm{e}^{-|x|}$ allora $f \in L^p$ per ogni $p \in [1, 2[$, dunque in particolare $f \in L^1$, mentre si può calcolare che la sua trasformata è la funzione

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + 1} + 1}{\xi^2 + 1}}, \tag{2}$$

e abbiamo $\widehat{f} \in L^p$ se e solo se $p > 2$, quindi siamo ben lontani da avere la trasformata in L^1.

Un altro aspetto che complica le cose quando si vuole approssimare l'integrale di una trasformata è che se f ha supporto compatto allora la sua trasformata non avrà mai supporto compatto, anzi non si può annullare identicamente su nessun intervallo.

Proposizione 1.1. *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che:*

- *il supporto (essenziale) di f è compatto (ovvero è contenuto in un intervallo limitato);*
- *la trasformata $\widehat{f}$ si annulla in tutti i punti di un intorno di un punto $\xi_\star$.*

Allora f è la funzione nulla.

Dimostrazione. Supponiamo che il supporto essenziale di f sia contenuto nell'intervallo $[a, b]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ il monomio x^n è una funzione limitata su $[a, b]$ e dunque $x^n f(x)$ è una funzione di $L^2(\mathbb{R})$ con supporto in $[a, b]$; siccome $L^2([a, b])$ è contenuto in $L^1([a, b])$, abbiamo anche che $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Sappiamo che $x f(x) \in L^1$ implica che la trasformata $\widehat{f}(\xi)$ è derivabile e che

$$\mathcal{F}[x f(x)] = \mathrm{i}\partial_\xi \widehat{f};$$

Date: ultimo aggiornamento, 9 dicembre 2021.

iterando questa proprietà abbiamo anche che $x^n f(x) \in L^1$ implica che $\widehat{f}(\xi)$ è derivabile n volte e che

$$\mathcal{F}[x^n f(x)] = \mathrm{i}^n \partial_\xi^n \widehat{f}.$$

Se la trasformata $\widehat{f}$ si annulla in un intorno del punto $\xi_\star$ allora tutte le sue derivate nel punto saranno nulle, e dunque

$$0 = \mathrm{i}^n \partial_\xi^n \widehat{f}(\xi_\star) = \int_a^b x^n f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_\star x} \, \mathrm{d}x = \langle f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_\star x}, x^n \rangle_{L^2([a,b])}.$$

Questo significa che la funzione $g(x) := f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_\star x}$ è ortogonale a tutti i monomi x^n in $L^2([a,b])$, dunque g è ortogonale a tutti i polinomi, ma abbiamo visto (vedi l'ultima proposizione della lezione 12) che l'insieme dei polinomi è denso in $L^2([a,b])$ e dunque in tale spazio l'unica funzione ortogonale a tutti i polinomi è solo la funzione nulla $g = 0$, da cui segue che $f = 0$ su $[a,b]$ e dunque su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

Non è chiaro dunque quale possa essere la validità generale della formula (1). Quello che tale formula ci suggerisce per ricostruire f dalla sua trasformata è di provare a calcolare la trasformata della trasformata, quando ciò è possibile.

2. Convoluzioni e prodotti

Prima di provare a calcolare la doppia trasformata di Fourier vediamo alcune ulteriori proprietà della trasformata legata a prodotti di convoluzione (che tramite mollificatori ci permettono approssimazioni di funzioni poco regolari con funzioni molto regolari e molto integrabili).

Il prodotto di convoluzione di due funzioni di L^1 è ancor una funzione di L^1 e la trasformata di Fourier della convoluzione è data dal prodotto puntuale delle trasformate.

Proposizione 2.1. *Date $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\mathcal{F}[f * g] = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Dimostrazione. Quando f e g sono funzioni di $L^1(\mathbb{R})$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\Psi(x,y) := f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} = f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(x-y)}$$

è una funzione di $L^1(\mathbb{R}^2)$, in quanto

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\Psi(x,y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(y)| \cdot |g(x-y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\ = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(z)| \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Fubini che ci permette di scambiare l'ordine di integrazione,

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}x = \\ = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} \int_{\mathbb{R}} g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(x-y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\ = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} \int_{\mathbb{R}} g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi z} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

$\square$

Il prodotto puntuale di due funzioni di L^1 non è detto che sia ancora una funzione di L^1 e dunque al momento, senza ulteriori ipotesi sulle funzioni, non siamo in grado di calcolarne la trasformata. Saremo in grado di farlo dopo aver discusso la formula di inversione per la trasformata di Fourier.

Se f e g sono due funzioni di L^1, essendo la trasformata $\widehat{g}$ una funzione di L^∞ abbiamo che il prodotto puntuale $f \cdot \widehat{g}$ è una funzione di L^1 e dunque ammette trasformata di Fourier.

Proposizione 2.2. *Date $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\mathcal{F}[f \cdot \widehat{g}] = (\widehat{f} * g_R) \tag{3}$$

(Ricordiamo che con $f_R(x) = f(-x)$ indichiamo la funzione "rovesciata").

Dimostrazione. Quando f e g sono funzioni di $L^1(\mathbb{R})$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\Phi(x, \eta) := f(x)g(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta+\xi)x}$$

è una funzione di $L^1(\mathbb{R}^2)$, in quanto

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\Phi(x, \eta)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)| \cdot |g(\eta)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\eta = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} .$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Fubini che ci permette di scambiare l'ordine di integrazione,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\eta}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta+\xi)x}\,\mathrm{d}x\,g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta+\xi)g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi-\zeta)g(-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = (\widehat{f} * g_R)(\xi).\end{aligned}$$

□

Corollario 2.3 (Scambio del cappello)**.** *Date $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)g(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

Dimostrazione. Basta valutare la formula (3) nell'origine $\xi = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}[f\widehat{g}](0) = (\widehat{f} * g_R)(0) = \int \widehat{f}(\eta)g(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

□

3. Trasformata della trasformata

Veniamo ora al calcolo della doppia trasformata di una funzione. Siccome (per il momento) sappiamo trasformare solo funzioni di L^1 consideriamo il sottospazio $\mathcal{V}$ di $L^1(\mathbb{R})$ formato dalle funzioni la cui trasformata appartiene ancora a L^1, e dunque ulteriormente trasformabile,

$$\mathcal{V} := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R})\colon \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Per ogni $f \in \mathcal{V}$ è ben definita la doppia trasformata

$$\widehat{\widehat{f}}(y) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\,\mathrm{d}\xi.$$

Purtroppo, per ogni y fissato, la funzione

$$\Phi(x, \xi) := f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} = f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(x+y)}$$

non è in $L^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi non ci è consentito di poter scambiare l'ordine di integrazione, ed inoltre anche se potessimo farlo non sapremmo che senso dare all'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(x+y)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Per ovviare alla mancanza di integrabilità di Φ procediamo con un metodo di approssimazione che ci permetta di recuperare l'integrabilità rispetto alla variabile ξ. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $y \in \mathbb{R}$ definiamo

$$F_\varepsilon(y) := \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g_\varepsilon(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\,\mathrm{d}\xi, \tag{4}$$

dove g_ε è la gaussiana

$$g_\varepsilon(\xi) = \mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2}.$$

Osserviamo che si tratta di gaussiane riscalate $g_\varepsilon(\xi) = g_1(\varepsilon\xi)$ che nel limite per $\varepsilon \to 0^+$ convergono puntualmente alla costante 1,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(\xi) = g_1(0) = 1.$$

Siccome abbiamo il controllo dominato della funzione integranda in (4),

$$\big|\widehat{f}(\xi) g_\varepsilon(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\big| \leqslant \big|\widehat{f}(\xi)\big| \mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2} \leqslant \big|\widehat{f}(\xi)\big|$$

e per ipotesi $\widehat{f} \in L^1$, possiamo applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e concludere che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\,\mathrm{d}\xi = \widehat{\widehat{f}}(y).$$

Quindi F_ε converge puntualmente alla doppia trasformata di f. La definizione (4) può anche essere scritta come una trasformata del prodotto $\widehat{f} \cdot g_\varepsilon$, e applicando la formula (3) otteniamo

$$F_\varepsilon(y) = \mathcal{F}\big[\widehat{f} \cdot g_\varepsilon\big](y) = (f_R * \widehat{g}_\varepsilon)(y). \tag{5}$$

Tramite le regole di calcolo di funzioni riscalate applicate alla trasformata della funzione gaussiana standard si calcola facilmente che la trasformata della gaussiana g_ε è data da

$$\widehat{g}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\widehat{g}_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\varepsilon^{-2}x^2}.$$

Si tratta di una famiglia di funzioni riscalate con massa costante,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_1(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

Possiamo considerare allora $(\frac{1}{2\pi}\widehat{g}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ come una famiglia di mollificatori di massa unitaria e dunque, per il teorema di approssimazione dell'identità (vedi l'ultimo teorema della lezione 8), abbiamo che le convoluzioni $f * \frac{1}{2\pi}\widehat{g}_\varepsilon$ convergono a f in norma L^1 per $\varepsilon \to 0^+$. Tornando alla formula (5) otteniamo che F_ε converge in norma L^1 alla funzione $2\pi f_R$. Ma se F_ε converge in norma L^1 ad una funzione e converge puntualmente ad un'altra funzione allora le due funzioni limite devono coincidere quasi ovunque, e quindi identificano la stessa funzione di L^1. Ricaviamo così che per ogni $f \in \mathcal{V}$ deve essere $\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f_R$, ovvero

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi f(-x), \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

Abbiamo così provato la validità per ogni funzione $f \in \mathcal{V}$ della formula di ricostruzione di f a partire dalla sua trasformata di Fourier.

Vediamo un'applicazione di questa formula al calcolo di trasformate che non sono semplici da ottenere tramite il calcolo diretto degli integrali che definiscono la trasformata.

Esempio 3.1. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ricordiamo di avere calcolato la trasformata della funzione $g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ e di aver ottenuto

$$\widehat{g}(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2f(x).$$

Abbiamo che sia g che $\widehat{g}$ sono funzioni di L^1 e dunque $g \in \mathcal{V}$. Questo significa che possiamo applicare la doppia trasformata alla funzione g,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{\widehat{g}}(\xi) = \pi g(-\xi) = \pi \mathrm{e}^{-|\xi|}.$$

Un calcolo diretto tramite la ricerca di primitive per gli integrali

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

risulta essere alquanto arduo; eventualmente un'altro modo per ottenere questa trasformata può essere quello di applicare la teoria del calcolo dei residui ad un opportuna famiglia di integrali su cammini chiusi nel piano complesso.

La formula (6) ci permette di dimostrare che $\mathcal{F}$ è iniettivo su L^1.

Proposizione 3.2. *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$*. Se* $\widehat{f} = \widehat{g}$ *allora* $f = g$ *in* L^1 *(ovvero coincidono quasi ovunque).*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $h = f - g \in L^1$. Per l'ipotesi su f e g e la linearità della trasformata abbiamo $\widehat{h} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0 \in L^1$. Dunque $h \in \mathcal{V}$ e applicando la formula (6) otteniamo le seguenti uguaglianze di funzioni L^1,

$$h = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{h}}_R = \frac{1}{2\pi}\widehat{0} = 0.$$

Dunque $f = g$ in L^1. □

Osserviamo che se $f \in \mathcal{V}$ abbiamo $\widehat{f} \in L^1$ e dalla formula (6) segue che

$$\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f_R \in L^1,$$

dunque $\mathcal{F}[f] = \widehat{f} \in \mathcal{V}$. Ne segue che l'operatore di trasformata $\mathcal{F}$ mappa $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$. Se riscriviamo la formula (6) nella forma

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\xi)\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{2\pi}\widehat{f}_R\Big](x),$$

ne deduciamo che $\mathcal{F}$ come operatore da $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}$ è anche suriettivo, in quanto $\frac{1}{2\pi}\widehat{f}_R \in \mathcal{V}$ per ogni $f \in \mathcal{V}$. Dunque la trasformata di Fourier è una biezione su $\mathcal{V}$ e dunque è invertibile. Sempre tramite la formula (6), detta anche formula di inversione, possiamo ricavare l'operatore inverso di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{V}$, che è dato da

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi, \qquad \mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[g]_R.$$

Data $g \in \mathcal{V}$ chiamiamo $\mathcal{F}^{-1}[g]$ la trasformata di Fourier *inversa* di g.

Esaminiamo meglio la struttura dello spazio $\mathcal{V}$. Quando $f \in \mathcal{V}$ abbiamo $\widehat{f} \in L^1$ e dunque $\widehat{\widehat{f}} \in L^\infty$, e per la formula (6) ricaviamo anche che $f \in L^\infty$. Ma sappiamo che $L^1 \cap L^\infty \subset L^p$ per ogni $p \in [1, +\infty]$. Dunque $\mathcal{V}$ è contenuto in ogni spazio L^p; in particolare abbiamo anche che $\mathcal{V} \subset L^2(\mathbb{R})$.

Osservazione 3.3. Visto come sottospazio di L^2 lo spazio $\mathcal{V}$ può essere dotato di una struttura euclidea indotta dal prodotto scalare di L^2. Date due funzioni $f, g \in \mathcal{V}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x && \text{(prodotto interno di } L^2\text{)},\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\widehat{\widehat{g}}}(-x)\,\mathrm{d}x && \text{(formula di inversione (6))},\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\overline{\widehat{g}}}(x)\,\mathrm{d}x && \text{(proprietà } \overline{\widehat{f}_R} = \widehat{\overline{f}}\text{)},\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi && \text{(scambio del cappello)},\\
&= \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle.
\end{aligned}$$

Dunque su $\mathcal{V}$ vale l'identità di Parseval

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = 2\pi\langle f, g\rangle;$$

scegliendo $g = f$ otteniamo anche l'identità di Plancherel:

$$\left\|\widehat{f}\,\right\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_{L^2}\,. \tag{7}$$

Quest'ultima identità ci dice anche che la trasformata di Fourier risulta essere un operatore continuo su $\mathcal{V}$ nella topologia di L^2.

Proposizione 3.4. *Lo spazio $\mathcal{V}$ contiene tutte le funzioni lisce a supporto compatto,*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{V}.$$

Dimostrazione. Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ chiaramente avremo che $f \in L^1$, ma anche le derivate f' e f'' sono lisce e a supporto compatto e dunque $f', f'' \in L^1$. Ne segue che le trasformate di f, f' e f'' sono funzioni limitate, e siccome $\mathcal{F}[f'] = \mathrm{i}\xi\widehat{f}$ e $\mathcal{F}[f''] = -\xi^2\widehat{f}$ abbiamo che

$$\left\|\widehat{f}\,\right\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}\,, \quad \left\|\xi\widehat{f}\,\right\|_{L^\infty} \leqslant \|f'\|_{L^1}\,, \quad \left\|\xi^2\widehat{f}\,\right\|_{L^\infty} \leqslant \|f''\|_{L^1}\,.$$

Dobbiamo far vedere che anche $\widehat{f} \in L^1$. Separando il contributo delle basse frequenze da quello delle alte frequenze abbiamo che

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}\,\right\|_{L^1} &= \int_{|\xi|\leqslant 1}\left|\widehat{f}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|>1}\frac{1}{\xi^2}\left|\xi^2\widehat{f}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi \leqslant\\
&\leqslant \left\|\widehat{f}\,\right\|_{L^\infty}\int_{|\xi|\leqslant 1}\mathrm{d}\xi + \left\|\xi^2\widehat{f}\,\right\|_{L^\infty}\int_{|\xi|>1}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2} \leqslant 2\,\|f\|_{L^1} + 2\,\|f''\|_{L^1} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Risulta quindi che

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{V} \subset L^2.$$

Siccome sappiamo che le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in L^2 a maggior ragione avremo che $\mathcal{V}$ è un sottospazio denso di L^2. Il fatto che la trasformata di Fourier, per l'identità di Plancherel (7), definisce, a meno di un fattore costante, una isometria su un sottospazio denso in L^2 ci permetterà (come vedremo nella prossima lezione) di estendere la definizione di trasformata a tutto lo spazio L^2 (anche per funzioni che non stanno in L^1).

Era rimasto in sospeso il discorso sulla trasformata di prodotti puntuali. Lo possiamo riprendere ora grazie alle formule di inversione. Siccome prodotti di convoluzione vengono trasformati in prodotti puntuali e la trasformata inversa agisce come una trasformata (a meno di costanti moltiplicative e un rovesciamento dei segni) è naturale aspettarsi che prodotti puntuali vengano trasformati in prodotti di convoluzione.

Proposizione 3.5. *Date due funzioni $f, g \in \mathcal{V}$ abbiamo*

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Dimostrazione. Se $f, g \in \mathcal{V}$ allora $f, g \in L^2$ e dunque $fg \in L^1$. Utilizzando la formula di inversione e la formula (3) per la trasformata del prodotto tra una funzione e una trasformata otteniamo

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\Big[f\, \widehat{\widehat{g}}_R\Big] = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f} * \widehat{g}).$$

□

Esempio 3.6. Per ogni $\lambda > 0$ definiamo

$$f_\lambda(x) := \mathrm{e}^{-\lambda |x|}.$$

Proviamo ad applicare le proprietà della trasformata per calcolare le convoluzioni

$$(f_\lambda * f_\mu)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda|y|} \mathrm{e}^{-\mu|x-y|} \, \mathrm{d}y.$$

Siccome $f_\lambda(x) = f_1(\lambda x)$ e $\widehat{f}_1(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$, per le proprietà della trasformata della funzione riscalata abbiamo

$$\widehat{f}_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}_1\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \xi^2}.$$

Calcoliamo prima la trasformata della convoluzione

$$\mathcal{F}\left[f_\lambda * f_\mu\right](\xi) = \widehat{f}_\lambda(\xi) \cdot \widehat{f}_\mu(\xi) = \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 + \xi^2)(\mu^2 + \xi^2)}.$$

Quando $\mu \neq \lambda$, procediamo con la decomposizione in frazioni semplici della funzione razionale in ξ, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f_\lambda * f_\mu\right](\xi) &= \frac{2\mu}{\mu^2 - \lambda^2} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} - \frac{2\lambda}{\mu^2 - \lambda^2} \cdot \frac{2\mu}{\mu^2 + \xi^2} = \\
&= \frac{2\mu}{\mu^2 - \lambda^2} \cdot \widehat{f}_\lambda(\xi) - \frac{2\lambda}{\mu^2 - \lambda^2} \cdot \widehat{f}_\mu(\xi) = \mathcal{F}\left[\frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} \left(\mu f_\lambda - \lambda f_\mu\right)\right](\xi).
\end{aligned}$$

A destra e a sinistra di questa catena di uguaglianze abbiamo le trasformate di due funzioni di L^1, per l'iniettività della trasformata segue che

$$(f_\lambda * f_\mu)(x) = \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} \left(\mu f_\lambda(x) - \lambda f_\mu(x)\right) = \frac{2\left(\mu \mathrm{e}^{-\lambda|x|} - \lambda \mathrm{e}^{-\mu|x|}\right)}{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Nel caso in cui $\mu = \lambda$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f_\lambda * f_\lambda\right](\xi) = \big(\widehat{f}_\lambda(\xi)\big)^2 &= \frac{4\lambda^2}{(\lambda^2 + \xi^2)^2} = \\
&= \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} - \frac{\xi}{\lambda} \cdot \frac{4\lambda\xi}{(\lambda^2 + \xi^2)^2} = \frac{1}{\lambda}\left(2\widehat{f}_\lambda(\xi) + \xi \partial_\xi \widehat{f}_\lambda(\xi)\right),
\end{aligned}$$

in quanto $\partial_\xi \widehat{f}_\lambda = -\frac{4\lambda\xi}{(\lambda^2+\xi^2)^2}$. Per le regole di calcolo della trasformata abbiamo

$$\xi \partial_\xi \widehat{f}(\xi) = -\mathrm{i}\xi \mathcal{F}\big[x f_\lambda(x)\big](\xi) = -\mathcal{F}\big[\partial_x(x f_\lambda(x))\big](\xi).$$

Otteniamo allora che

$$\mathcal{F}\left[f_\lambda * f_\lambda\right] = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\lambda}\left(2\widehat{f}_\lambda - \partial_x(x f_\lambda(x))\right)\Big].$$

Per l'iniettività della trasformata ricaviamo che

$$(f_\lambda * f_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda}\big(2f_\lambda(x) - \partial_x(xf_\lambda(x))\big).$$

Facendo i calcoli troviamo che

$$\partial_x\big(xf_\lambda(x)\big) = \partial_x\left(x\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\right) = (1-\lambda\,|x|)\mathrm{e}^{-\lambda|x|}.$$

Dunque

$$(f_\lambda * f_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda|x|} - (1-\lambda\,|x|)\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\right) = \Big(\frac{1}{\lambda} + |x|\Big)\mathrm{e}^{-\lambda|x|}.$$

4. Esercizi

4.1. **Funzioni integrabili con trasformate poco integrabili.**

Esercizio 4.1. Verifica che la funzione sinc non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e dimostra che appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p > 1$.

Esercizio 4.2. Dimostra la validità della trasformata (2) per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}\,|x|^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-|x|},$$

seguendo questa traccia:

- utilizzando il cambio di variabile $x^2 = t$ abbiamo che
$$I(\xi) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\xi)x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\xi)t^2}\,\mathrm{d}t;$$
- verifica che $I(\xi)$ è soluzione di un'equazione differenziale lineare del tipo
$$I'(\xi) = \phi(\xi)I(\xi),$$
e calcola la funzione (a valori complessi) $\phi(\xi)$;
- determina una primitiva $\Phi(\xi)$ della funzione $\phi(\xi)$ e calcola (cercando di semplificare meglio che puoi) l'esponenziale $\mathrm{e}^{\Phi(\xi)}$;
- verifica che la derivata di $\mathrm{e}^{-\Phi(\xi)}I(\xi)$ è identicamente nulla, e da ciò ricava un'espressione esplicita per $I(\xi)$;
- osserva che $\widehat{f}(\xi)$ si può scrivere come una combinazione lineare di $I(\xi)$ e del suo coniugato $\overline{I(\xi)}$, e da ciò ricava un'espressione esplicita per $\widehat{f}(\xi)$.

Esercizio 4.3. Dimostra che la trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R})$ a supporto compatto è una funzione analitica.

4.2. **Convoluzioni e prodotti.**

Esercizio 4.4. Calcola le trasformate di Fourier delle funzioni

$$f(x) := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|x-y|}\,\mathrm{d}y, \quad g(x) := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2\mathrm{e}^{-|x-y|}\,\mathrm{d}y.$$

Esercizio 4.5. Dimostra che se f e g sono funzioni in $\mathcal{V}$ allora anche il prodotto puntuale fg e il prodotto di convoluzione $f * g$ sono funzioni in $\mathcal{V}$.

4.3. **Trasformata della trasformata.**

Esercizio 4.6. Per ogni $a > 0$ definiamo la funzione

$$F_a(x) := \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2 + x^2}.$$

- Calcola la trasformata di Fourier di F_a.
- Calcola la convoluzione $F_a * F_b$.

Esercizio 4.7. Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$f_n := \underbrace{f * f * \cdots * f}_{n \text{ volte}}.$$

Determina l'insieme di convergenza e la somma della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n(\xi).$$

Esercizio 4.8. Sia $f \in L^1 \cap L^\infty$ tale che $\widehat{f}(\xi) \geqslant 0$.

- Dimostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}|\xi|} \, \mathrm{d}\xi \leqslant 2\pi \|f\|_{L^\infty}.$$
- Deduci, utilizzando il punto precedente, che $f \in \mathcal{V}$.

Esercizio 4.9. Determina una funzione f tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \mathrm{e}^{-|y|} \, \mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^{-|x|} - \mathrm{e}^{-2|x|}.$$

Esercizio 4.10. Calcola la trasformata di Fourier inversa per la funzione

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

Esercizio 4.11. Sia $a > 0$. Utilizzando proprietà della trasformata di Fourier trova il modo più rapido per calcolare l'integrale

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}.$$

Esercizio 4.12. Calcola la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) := \frac{1}{1+x^4}.$$

[Un modo è quello di scomporre il polinomio al denominatore come prodotto di due polinomi irriducibili (in $\mathbb{R}$) di secondo grado e decomporre f come somma di frazioni semplici (stesso procedimento di quando si calcolano primitive di funzioni razionali)]

Esercizio 4.13. Sia $\lambda > 0$. Dopo aver calcolato la trasformata della funzione

$$f_\lambda(x) := x\mathrm{e}^{-\lambda x} \chi_{[0,+\infty[}(x),$$

determina le trasformate di Fourier delle funzioni

$$g_n(x) := \frac{1}{(\lambda + \mathrm{i}x)^{2n}},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.14. Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier calcola la convoluzione $f * g$, dove f e g sono due generiche gaussiane

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\lambda(x-p)^2}, \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-\mu(x-q)^2},$$

con $\lambda, \mu > 0$ e $p, q \in \mathbb{R}$.