

**ANALISI 3 - L17:
TRASFORMATA DI FOURIER IN L^1 .**

1. DALLA SERIE DI FOURIER ALLA TRASFORMATA DI FOURIER

Per ogni funzione $g \in L^2(-\pi, \pi)$ abbiamo la decomposizione in serie di Fourier

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_k e^{ikt},$$

dove la convergenza della serie è da intendere in norma L^2 , e dove i coefficienti di Fourier \widehat{g}_k sono dati dagli integrali

$$\widehat{g}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt.$$

Vale inoltre l'identità di Plancherel

$$\|g\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_k|^2.$$

Tramite un riscalamento della variabile indipendente si ottengono formule simili per funzioni definite su intervalli di qualsiasi lunghezza. Per ogni $f \in L^2(-T/2, T/2)$ abbiamo la decomposizione

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{k,T} e^{i\frac{2\pi}{T} kx},$$

con coefficienti dati da

$$\widehat{f}_{k,T} := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T} kx} dx,$$

per i quali vale

$$\|f\|_{L^2(-T/2, T/2)}^2 = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_{k,T}|^2.$$

Sia $\delta_T := 2\pi/T$. Possiamo riscrivere la serie usando come indice $\xi = \delta_T k \in \delta_T \mathbb{Z}$,

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta_T \mathbb{Z}} \widehat{f}_T(\xi) e^{i\xi x} \delta_T,$$

con coefficienti dati da

$$\widehat{f}_T(\xi) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\xi x} dx = T \widehat{f}_{k,T},$$

per i quali abbiamo

$$(2) \quad \|f\|_{L^2(-T/2, T/2)}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta_T \mathbb{Z}} |\widehat{f}_T(\xi)|^2 \delta_T.$$

Se supponiamo che f sia una funzione integrabile e a supporto compatto, per T sufficientemente grande il valore di $\widehat{f}_T(\xi)$ risulta indipendente da T . Poniamo

$$(3) \quad \widehat{f}(\xi) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \widehat{f}_{k,T} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Le serie (1) e (2) possono essere considerate allora come somme di Riemann su una suddivisione di \mathbb{R} in intervalli di ampiezza δ_T che, nel limite per $T \rightarrow +\infty$, approssimano gli integrali di $\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}$ e di $|\widehat{f}(\xi)|^2$. Formalmente otteniamo

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta_T \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} \delta_T = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} \delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

e

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta_T \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \delta_T = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \delta \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

L'integrale che compare nella formula (3) risulta ben definito per qualsiasi funzione integrabile su \mathbb{R} anche se non ha supporto compatto.

Definizione 1.1. Data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ la *trasformata di Fourier* di f è la funzione \widehat{f} definita da

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

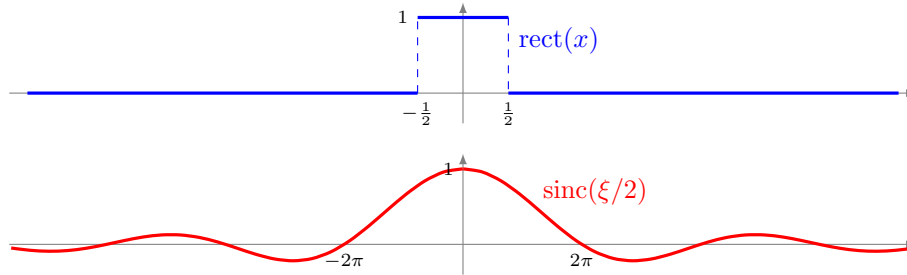
Esempio 1.2. Calcoliamo la trasformata di Fourier del *segnale rettangolare*

$$\text{rect}(x) := \chi_{[-1/2, 1/2]}(x).$$

Otteniamo la funzione

$$\widehat{\text{rect}}(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-i\xi/2} - e^{i\xi/2}}{-i\xi} = \frac{2 \sin(\xi/2)}{\xi} = \text{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

(La funzione *seno cardinale* è definita come $\text{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$.)

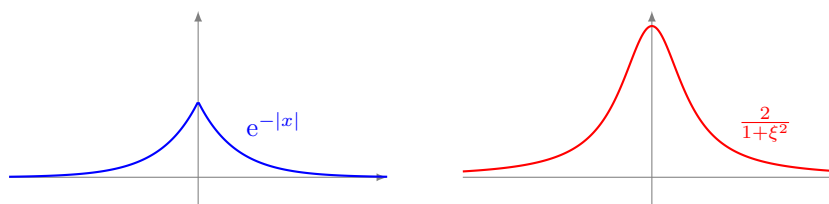


Esempio 1.3. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) := e^{-|x|}.$$

Spezzando in due l'integrale troviamo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x-i\xi x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x-i\xi x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-x+i\xi x} + e^{-x-i\xi x}) dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_0^L (e^{(-1+i\xi)x} + e^{(-1-i\xi)x}) dx = \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{(-1+i\xi)x}}{-1+i\xi} + \frac{e^{(-1-i\xi)x}}{-1-i\xi} \right]_{x=0}^{x=L} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{e^{-L} e^{i\xi L} - 1}{-1+i\xi} + \frac{e^{-L} e^{-i\xi L} - 1}{-1-i\xi} = \\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}. \end{aligned}$$



2. LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE

Osservazione 2.1. Dalla definizione 1.1 si ricava subito che

$$(4) \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx.$$

Per la linearità dell'integrale segue che la trasformata di Fourier definisce un'applicazione lineare e continua da L^1 a L^∞ :

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}(f) := \widehat{f}.$$

Abbiamo $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ per ogni $f \in L^1$, e dunque $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq 1$. Abbiamo anche che $\|\text{rect}\|_{L^1} = 1$ e $\|\widehat{\text{rect}}\|_{L^\infty} = \|\text{sinc}\|_{L^\infty} = 1$ e dunque

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \geq \frac{\|\mathcal{F}(\text{rect})\|_{L^\infty}}{\|\text{rect}\|_{L^1}} = 1.$$

Otteniamo così che la norma operatoriale della trasformata di Fourier come operatore da L^1 a L^∞ è esattamente 1,

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} = 1.$$

La trasformata di Fourier di una funzione L^1 non solo è una funzione limitata, ma risulta anche essere sempre una funzione continua che decade a zero all'infinito.

Lemma 2.2. Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| \leq \min\{|\alpha - \beta|, 2\}.$$

Dimostrazione. Segue facilmente dalla seguente identità

$$|e^{i\alpha} - e^{i\beta}|^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 4\left(\sin \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2,$$

e dal fatto che $|\sin \theta| \leq \min\{|\theta|, 1\}$. □

Proposizione 2.3. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora la sua trasformata di Fourier \widehat{f} è una funzione uniformemente continua.

Dimostrazione. Per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x} \right) dx.$$

Applicando il lemma 2.2 otteniamo

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \min\{|\eta| |x|, 2\} dx.$$

L'integrando nell'ultimo integrale converge puntualmente a zero per $\eta \rightarrow 0$ ed è dominato dalla funzione integrabile $2|f(x)|$; per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue otteniamo che l'integrale converge a zero. Il limite

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| = 0$$

equivale alla continuità uniforme di \widehat{f} . □

Proposizione 2.4 (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}(\xi)$ è infinitesima per $\xi \rightarrow \pm\infty$.*

Dimostrazione. Verifichiamo prima il lemma per una funzione g di classe C^1 a supporto compatto. Siccome

$$e^{-i\xi x} = -\frac{1}{i\xi} \partial_x e^{-i\xi x},$$

possiamo integrare per parti e ricavare che

$$\widehat{g}(\xi) = -\frac{1}{i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \partial_x e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Dunque \widehat{g} è infinitesima all'infinito, in quanto

$$(5) \quad |\widehat{g}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|} \|g'\|_{L^1}.$$

Sappiamo che le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in L^1 , e dunque, data $f \in L^1(\mathbb{R})$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione g di classe C^1 a supporto compatto tale che $\|f - g\|_{L^1} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per linearità e per la stima (4) abbiamo

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1}.$$

Possiamo inoltre applicare la stima (5) a g , così quando $|\xi| \geq \frac{2}{\varepsilon} \|g'\|_{L^1}$ otteniamo

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1} + \frac{1}{|\xi|} \|g'\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Questo implica che $\widehat{f}(\xi)$ è infinitesima per $|\xi| \rightarrow \infty$. \square

3. PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA

Per ogni $p \in \mathbb{R}$ definiamo la *traslazione* di passo p su \mathbb{R} ,

$$\tau_p(x) := x + p,$$

e l'*armonica elementare* di frequenza p ,

$$m_p(x) := e^{ipx}.$$

Per ogni $\lambda > 0$ definiamo

$$\sigma_\lambda(x) := \lambda x$$

l'*omotetia* di fattore λ .

La composizione $(f \circ \tau_p)(x) = f(x + p)$ produce una *traslata* della funzione f ; la moltiplicazione $(m_p \cdot f)(x) = e^{ipx} f(x)$ produce un'*armonica modulata* dalla funzione f ; la composizione $(f \circ \sigma_\lambda)(x) = f(\lambda x)$ produce una *risalata* della funzione f ; indichiamo inoltre con $f_R(x) := f(-x)$ la *rovesciata* della funzione f .

Proposizione 3.1. *Per la trasformata di Fourier valgono le seguenti proprietà elementari:*

- la *traslata* di una funzione si trasforma in un'*armonica modulata* dalla trasformata,

$$g(x) = f(x + p) \implies \widehat{g}(\xi) = e^{ip\xi} \widehat{f}(\xi),$$

ovvero $\mathcal{F}[f \circ \tau_p] = m_p \cdot \mathcal{F}[f]$;

- un *armonica modulata* si trasforma nella *traslata* della trasformata,

$$g(x) = e^{ipx} f(x) \implies \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - p),$$

ovvero $\mathcal{F}[m_p \cdot f] = \mathcal{F}[f] \circ \tau_{-p}$;

- la riscalata si trasforma in un multiplo della riscalata, con un fattore di scala reciproco, della trasformata,

$$g(x) = f(\lambda x) \implies \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right),$$

ovvero $\mathcal{F}[f \circ \tau_\lambda] = \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}[f] \circ \sigma_{\frac{1}{\lambda}}$;

- la rovesciata di una funzione si trasforma nella rovesciata della trasformata,

$$g(x) = f(-x) \implies \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi),$$

ovvero $\mathcal{F}[f_R] = \mathcal{F}[f]_R$;

- il coniugato di una funzione si trasforma nel coniugato della rovesciata della trasformata,

$$g(x) = \overline{f(x)} \implies \widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$

ovvero $\mathcal{F}[\overline{f}] = \overline{\mathcal{F}[f]_R}$.

La dimostrazione delle proprietà enunciate nella proposizione 3.1 si ottiene facilmente tramite semplici, e piuttosto ovvi, cambi di variabile negli integrali che definiscono le trasformate delle varie funzioni considerate; lasciamo i dettagli come esercizio.

Esempio 3.2. Calcoliamo la trasformata della funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}$ di un generico intervallo limitato $[a, b]$. Invece di utilizzare la definizione consideriamo l'intervallo $[a, b]$ ottenuto dall'intervallo $[-1/2, 1/2]$ tramite una omotetia e una traslazione:

$$\chi_{[a,b]}(x) = \text{rect}(\lambda(x - c)) = (\text{rect} \circ \sigma_\lambda \circ \tau_{-c})(x).$$

Vogliamo che $\lambda(a - c) = -\frac{1}{2}$ e $\lambda(b - c) = \frac{1}{2}$, risolvendo il sistema otteniamo che il passo della traslazione è il punto medio $c = \frac{a+b}{2}$ mentre il fattore di riscalamento è il reciproco della lunghezza dell'intervallo $\lambda = \frac{1}{b-a}$. Applichiamo le proprietà della trasformata:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\chi_{[a,b]}(\xi) &= \mathcal{F}(\text{rect} \circ \sigma_\lambda \circ \tau_{-c})(\xi) = e^{-ic\xi} \mathcal{F}(\text{rect} \circ \sigma_\lambda)(\xi) = \\ &= \frac{e^{-ic\xi}}{\lambda} \mathcal{F}(\text{rect})\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{e^{-ic\xi}}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{\xi}{2\lambda}\right) = \frac{2e^{-i\frac{a+b}{2}\xi} \sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}. \end{aligned}$$

Esempio 3.3. Calcoliamo la trasformata della funzione

$$f(x) := \cos(2x)e^{-3|x|}$$

a partire dalla trasformata della funzione

$$f_0(x) := e^{-|x|}$$

che sappiamo essere

$$\widehat{f}_0(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

Cominciamo con il calcolare la trasformata della funzione

$$f_1(x) := e^{-3|x|} = f_0(3x),$$

essendo una riscalata otteniamo

$$\widehat{f}_1(\xi) = \frac{1}{3} \widehat{f}_0\left(\frac{\xi}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1 + \left(\frac{\xi}{3}\right)^2} = \frac{6}{9 + \xi^2}.$$

Per le identità di Eulero possiamo scrivere $\cos(2x) = \frac{1}{2}e^{i2x} + \frac{1}{2}e^{-i2x}$ e quindi possiamo decomporre $f = \frac{1}{2}f_+ + \frac{1}{2}f_-$, dove

$$f_\pm(x) = e^{\pm i2x} f_1(x),$$

le cui trasformate sono delle traslate di \widehat{f}_1 ,

$$\widehat{f}_{\pm}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi \mp 2) = \frac{6}{9 + (\xi \mp 2)^2}.$$

Per linearità della trasformata otteniamo

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{f}_+(\xi) + \frac{1}{2}\widehat{f}_-(\xi) = \frac{3}{9 + (\xi - 2)^2} + \frac{3}{9 + (\xi + 2)^2} = \frac{6\xi^2 + 78}{\xi^4 + 10\xi^2 + 169}.$$

Esaminiamo ora il legame tra l'operazione di trasformata e quella di derivazione.

Lemma 3.4. *Sia f una funzione di classe C^1 con $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Dimostrazione. Siccome $f' \in L^1$ abbiamo che gli integrali $\int_0^{+\infty} f'$ e $\int_{-\infty}^0 f'$ convergono a valori finiti. Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy = f(0) - \int_x^0 f'(y) dy.$$

Passando al limite otteniamo che esistono finiti i limiti

$$\begin{aligned} f(+\infty) &:= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(y) dy, \\ f(-\infty) &:= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(y) dy. \end{aligned}$$

Dunque la funzione $f(x)$ possiede asintoti orizzontali di equazione $y = f(\pm\infty)$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Affinché f possa essere una funzione di L^1 è necessario che sia integrabile in un intorno di $\pm\infty$ e dunque l'ordinata degli asintoti orizzontali deve necessariamente essere zero. \square

L'operatore di derivazione si trasforma in un operatore di moltiplicazione per $i\xi$.

Proposizione 3.5. *Sia f una funzione di classe C^1 con $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

Dimostrazione. Siccome $\partial_x e^{-i\xi x} = -i\xi e^{-i\xi x}$, integrando per parti abbiamo

$$\int_A^B f'(x) e^{-i\xi x} dx = [f(x) e^{-i\xi x}]_{x=A}^{x=B} + i\xi \int_A^B f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

La quantità $e^{-i\xi x}$ è sempre limitata (ha modulo 1), quindi per il lemma 3.4 i termini di bordo sono infinitesimi all'infinito e dunque spariscono nel limite per $A \rightarrow -\infty$ e $B \rightarrow +\infty$. Otteniamo allora

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

\square

Osservazione 3.6. Se una funzione è di classe C^k con derivate $f^{(j)} \in L^1$ per ogni $j = 0, 1, \dots, k$, allora possiamo iterare il procedimento: ad ogni derivata corrisponde un fattore $i\xi$ nella trasformata,

$$\widehat{f^{(j)}}(\xi) = (i\xi)^j \widehat{f}(\xi).$$

L'operatore di moltiplicazione per x si trasforma in un operatore di derivazione.

Proposizione 3.7. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che anche $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Allora la trasformata \widehat{f} è una funzione di classe C^1 ed inoltre vale

$$\partial_\xi \widehat{f} = \mathcal{F}[x \mapsto -ixf(x)],$$

ovvero se $g(x) = xf(x)$ allora $\widehat{g}(\xi) = i\partial_\xi \widehat{f}(\xi)$.

Dimostrazione. Per calcolare la derivata della trasformata possiamo derivare sotto il segno di integrale

$$\partial_\xi \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi (f(x)e^{-i\xi x}) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)e^{-i\xi x} dx = \mathcal{F}[-ixf](\xi),$$

in quanto la derivata della funzione integranda è dominata da una funzione, indipendente da ξ , che per ipotesi è integrabile su \mathbb{R} ,

$$|\partial_\xi (f(x)e^{-i\xi x})| = |xf(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

□

Esempio 3.8. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione *gaussiana*

$$g(x) := e^{-x^2}.$$

La derivata di g è $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ e dunque abbiamo

$$g'(x) + 2xg(x) = 0.$$

Applicando la trasformata di Fourier a questa identità e utilizzando le proposizioni 3.5 e 3.7 otteniamo $i\xi\widehat{g} + 2i\xi\widehat{g}' = 0$, ovvero

$$\widehat{g}'(\xi) + \frac{1}{2}\xi\widehat{g}(\xi) = 0.$$

Questa equazione differenziale lineare del primo ordine si risolve facilmente: osserviamo che una primitiva di $\frac{1}{2}\xi$ è $\frac{1}{4}\xi^2$, abbiamo

$$\partial_\xi (\widehat{g}e^{\frac{1}{4}\xi^2}) = (\widehat{g}' + \frac{1}{2}\xi\widehat{g})e^{\frac{1}{4}\xi^2} = 0.$$

Dunque $\widehat{g}e^{\frac{1}{4}\xi^2}$ è una funzione costante e avremo

$$\widehat{g}(\xi)e^{\frac{1}{4}\xi^2} = \widehat{g}(0)e^{\frac{1}{4}0} = \widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Otteniamo così che la trasformata di una gaussiana è ancora una funzione di tipo gaussiano,

$$\widehat{g}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}.$$

4. ESERCIZI

4.1. Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier.

Esercizio 4.1. Calcola la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &:= (1 - |x|)_+, & A(x) &:= \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[-1,0]}(x), \\ B(x) &:= e^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), & C(x) &:= x \operatorname{rect}(x), \\ D(x) &:= \sin(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x), & E(x) &:= \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}. \end{aligned}$$

4.2. Proprietà della trasformata.

Esercizio 4.2. Dimostra le proprietà enunciate nella proposizione 3.1.

Esercizio 4.3. Calcola la trasformata di Fourier della densità di probabilità $p(x)$ per la distribuzione normale con media μ e varianza σ^2 ,

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Indichiamo con $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$ la funzione gradino di Heaviside.

Esercizio 4.4. Calcola le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2)H(x)e^{-3x}, & B(x) &= xH(x-2)e^{-3(x-2)}, & C(x) &= (-2-x)H(-x)e^{3x}, \\ D(x) &= 2xe^{-3x^2}, & E(x) &= \sin(2x)e^{-3x^2}, & F(x) &= x\sin(2x)e^{-3(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.5. Calcola l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi x) e^{-\pi x^2} dx.$$

Esercizio 4.6. Determina la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ sapendo che essa è soluzione dell'equazione differenziale

$$f''(x) - 2f(x) = e^{-|x-1|}.$$

Esercizio 4.7. Spiega perché non esistono soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$f''(x) + 2f(x) = e^{-|x-1|}.$$