

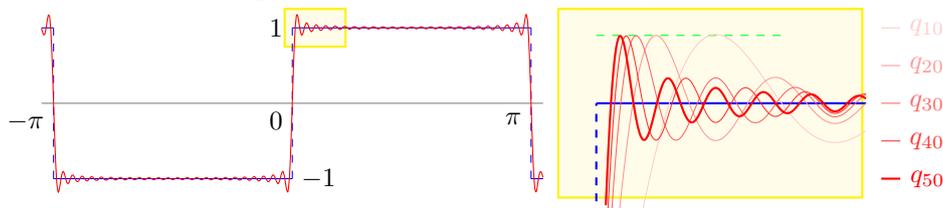
**ANALISI 3 - L16:**  
**APPLICAZIONI DELLA SERIE DI FOURIER.**

1. FENOMENO DI GIBBS

Per completare il discorso sulla convergenza puntuale della serie di Fourier di un segnale continuo a tratti cerchiamo di capire cosa succede in un intorno di un punto di discontinuità di tipo salto. Consideriamo il segnale di un onda quadra

$$f(t) := \begin{cases} -1, & \text{se } t \in ]-\pi, 0[, \\ 1, & \text{se } t \in ]0, \pi[, \end{cases} \quad S[f](t) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ dispari}}} \frac{4 \sin(kt)}{\pi k}, \quad q_n(t) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ dispari}}} \frac{4 \sin(kt)}{\pi k}.$$

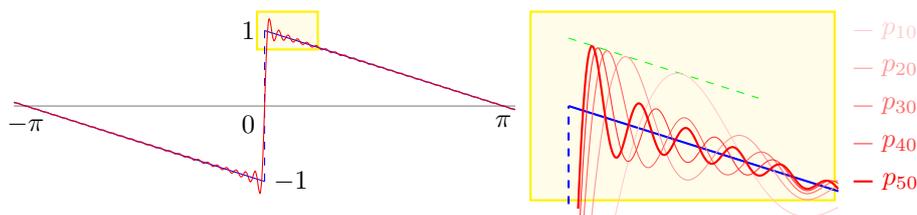
Diamo un'occhiata ai grafici delle sue approssimazioni  $q_n$ ,



Notiamo che al crescere del grado di approssimazione, lo scarto massimo tra il polinomio approssimante e la funzione da approssimare non sembra tendere a zero, anzi sembra mantenersi costante.

La stessa cosa la si nota osservando le approssimazioni per il segnale di un'onda a dente di sega. Consideriamo un segnale  $h$  a dente di sega con un salto per  $t = 0$  di ampiezza 2 con  $h(0^+) = 1$  e  $h(0^-) = -1$ ,

$$(1) \quad h(t) := \begin{cases} -1 - \frac{t}{\pi}, & \text{se } t \in ]-\pi, 0[, \\ 1 - \frac{t}{\pi}, & \text{se } t \in ]0, \pi[, \end{cases} \quad S[h](t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2 \sin(kt)}{\pi k}, \quad p_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin(kt)}{\pi k}.$$



Ogni segnale regolare a tratti si può scrivere come somma di un segnale continuo regolare a tratti più una combinazione lineare di denti di sega traslati.

**Proposizione 1.1.** *Sia  $f(t)$  un segnale  $2\pi$ -periodico regolare a tratti con discontinuità di tipo salto nei punti  $t_j$ , con salti di ampiezza  $c_j := f(t_j^+) - f(t_j^-)$ , per  $j = 1, \dots, m$ . Allora  $f$  può essere decomposto nella somma*

$$f(t) = g(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m c_j h(t - t_j),$$

dove  $g(t)$  è un segnale continuo regolare a tratti e i termini  $c_j h(t - t_j)$  sono riscalamenti traslati del segnale a dente sega (1).

*Dimostrazione.* Basta verificare che la quantità  $f(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m c_j h(t - t_j)$  è una funzione continua nei punti  $t_j$ . Lasciamo questa semplice verifica come esercizio.  $\square$

La serie di Fourier di una somma di segnali si ottiene come somma delle serie di Fourier di ciascuna componente. Abbiamo visto che la componente continua regolare a tratti  $g$  ha una serie di Fourier che converge uniformemente, e quindi le sue approssimazioni hanno uno scarto massimo che tende a zero. La serie di Fourier di  $f$  nell'intorno della discontinuità  $t_j$  risulterà pertanto avere uno scarto asintoticamente equivalente a quello della componente a dente di sega  $c_j h(t - t_j)$ , che sarà una versione traslata e riscalata di quello che si vede in figura.

Vediamo quindi di analizzare meglio il comportamento delle approssimazioni del segnale a dente di sega (1). Derivando termine a termine i polinomi approssimanti  $p_k$  troviamo,

$$\begin{aligned} p'_n(t) - h'(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq k \leq n} \cos(kt) + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \cos(kt) \right) = \\ &= 2D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Il massimo valore di  $|p_n - h|$  si trova in corrispondenza del primo zero di  $D_n$  a destra dell'origine, ovvero nel primo zero del fattore  $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)$ , ovvero nel punto

$$t = \tau_n := \frac{2\pi}{2n + 1}.$$

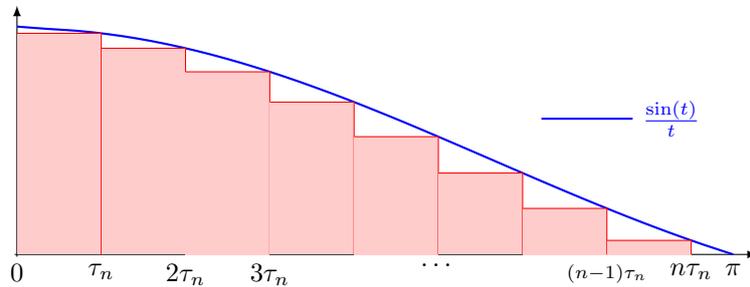
Dunque

$$\|p_n - h\|_{L^\infty} = p_n(\tau_n) - h(\tau_n) = \left( \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{2 \sin(k\tau_n)}{\pi k} \right) - 1 + \frac{\tau_n}{\pi}.$$

La sommatoria che compare in questa formula può essere interpretata come una somma di Darboux che approssima un integrale di Riemann:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin(k\tau_n)}{k} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin(k\tau_n)}{k\tau_n} \tau_n = \underline{S}(\phi, \sigma_n),$$

dove con  $\underline{S}(\phi, \sigma_n)$  indichiamo la somma inferiore relativa alla funzione  $\phi(t) := \frac{\sin t}{t}$  rispetto alla suddivisione  $\sigma_n := \{0, \tau_n, 2\tau_n, \dots, n\tau_n, \pi\}$  dell'intervallo  $[0, \pi]$ .



Quando  $n \rightarrow \infty$  tale somma inferiore tende all'integrale  $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$  e dunque abbiamo che lo scarto massimo tra il segnale dente di sega e le sue approssimazioni trigonometriche non tende a zero, ma ad un valore positivo

$$\Delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - h\|_{L^\infty} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 = 0.1789797 \dots$$

Ciò significa che per una discontinuità di tipo un salto l'approssimazione con somme parziali della serie di Fourier nelle vicinanze della discontinuità presenta sempre un errore relativo di quasi il 9% del valore del salto. Questa proprietà della convergenza puntuale della serie di Fourier va sotto il nome di *fenomeno di Gibbs*.

## 2. SERIE DI FOURIER PER FUNZIONI DI PERIODO $T$ QUALSIASI

Con la serie di Fourier abbiamo visto come decomporre funzioni  $2\pi$ -periodiche come somme numerabili di componenti armoniche. Riscalando i termini di queste componenti armoniche possiamo scrivere una decomposizione anche per funzioni periodiche di qualsiasi periodo. Sia  $f(x)$  una funzione periodica con periodo  $T$ . La funzione riscalata  $g(t) := f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$  risulta essere periodica con periodo  $2\pi$ ,

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) = g(t).$$

Abbiamo che  $g \in L^2([-\pi, \pi])$  se e solo se  $f \in L^2\left([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\right)$  e dalla serie di Fourier di  $g$  possiamo ricavare una serie di funzioni che decompone  $f$  come somma di armoniche riscalate,

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_k e^{ik \frac{2\pi}{T}x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{k,T} e^{ik \frac{2\pi}{T}x},$$

dove i coefficienti di Fourier sono dati da

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{k,T} = \widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) e^{-iks} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}s\right) e^{-iks} ds = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-ik \frac{2\pi}{T}y} dy. \end{aligned}$$

Dal legame tra le norme  $L^2$  di  $f$  e di  $g$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2\left([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\right)}^2 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right|^2 dx = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt = \\ &= \frac{T}{2\pi} \|g\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2, \end{aligned}$$

otteniamo l'identità di Plancherel riscalata per  $f$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_{k,T}|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2 = \frac{1}{T} \|f\|_{L^2\left([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\right)}^2.$$

## 3. EQUAZIONE DEL CALORE

Uno dei motivi principali che spinsero Fourier ad interessarsi delle serie di funzioni che ora prendono il suo nome era legato alla ricerca di metodi per risolvere l'equazione che descrive la propagazione del calore. L'equazione del calore nella sua forma più semplice (assumendo uguali a 1 alcune costanti fisiche) è data dalla seguente equazione alle derivate parziali,

$$\partial_t u = \Delta u,$$

dove  $u(t, x)$  è una funzione a valori reali che descrive la temperatura al tempo  $t \geq 0$  nel punto  $x \in D$  di un corpo che occupa la regione  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ . L'operatore  $\partial_t$  indica la derivata parziale rispetto a  $t$  e l'operatore  $\Delta$  indica il laplaciano rispetto ad  $x$ .

Consideriamo il caso unidimensionale,  $d = 1$ , con  $D = [0, L]$ , che corrisponde alla propagazione del calore lungo una barra sottile di lunghezza  $L$ ,

$$(2) \quad \partial_t u = \partial_{xx}^2 u, \quad t > 0, \quad 0 < x < L.$$

Supponiamo che alle estremità della barra la temperatura sia mantenuta costante a zero,

$$(3) \quad u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Supponiamo inoltre di conoscere la distribuzione di temperatura all'istante iniziale,

$$(4) \quad u(0, x) = f(x).$$

È possibile calcolare l'evoluzione  $u(t, x)$  in funzione di  $f$  del problema (2)(3)(4)?

**3.1. Linearità.** La prima osservazione è che si tratta di un problema lineare omogeneo. Questo implica in particolare che se  $u_1$  è soluzione del problema con dato iniziale  $f_1$  e  $u_2$  è soluzione del problema con dato iniziale  $f_2$  allora la combinazione lineare  $c_1 u_1 + c_2 u_2$  è soluzione con dato iniziale  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  per ogni coppia di costanti  $c_1$  e  $c_2$ . La strategia sarà quella di determinare una quantità sufficiente di soluzioni "elementari" le cui combinazioni lineari dei corrispondenti dati iniziali siano in grado di generare, o approssimare il dato iniziale (4).

**3.2. Separazione delle variabili.** Per semplificare il problema proviamo ad esempio a cercare soluzioni che si fattorizzano nella forma  $u(t, x) = A(t)B(x)$ ; l'equazione diventa

$$A'(t)B(x) = A(t)B''(x).$$

Nei punti in cui le funzioni non si annullano dovremo avere

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{B''(x)}{B(x)}.$$

Osserviamo che a sinistra abbiamo una funzione della sola variabile  $t$  e a destra una funzione della sola variabile  $x$ . Ma  $t$  ed  $x$  sono variabili indipendenti, e questo implica che le quantità a sinistra e a destra devono essere costanti, ovvero dovrà esistere una costante  $\lambda$  tale che

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = \lambda, \quad \frac{B''(x)}{B(x)} = \lambda,$$

per ogni  $t > 0$  e ogni  $x \in ]0, L[$ . Otteniamo così una coppia di equazioni differenziali ordinarie lineari per  $A$  e  $B$ ,

$$A' - \lambda A = 0, \quad B'' - \lambda B = 0,$$

con le condizioni al bordo (3) che impongono

$$B(0) = B(L) = 0.$$

**3.3. Soluzioni dell'equazione per  $B$ .** Quando  $\lambda > 0$  le soluzioni dell'equazione differenziale per  $B$  sono tutte della forma

$$B(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Le condizioni al bordo si traducono in questo caso nel sistema

$$(5) \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ e^{-\sqrt{\lambda}L} c_1 + e^{\sqrt{\lambda}L} c_2 = 0; \end{cases}$$

la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda}L} & e^{\sqrt{\lambda}L} \end{pmatrix}$$

è invertibile, in quanto il suo determinante è  $2 \sinh(\sqrt{\lambda}L) > 0$ , e dunque il sistema (5) ha come unica soluzione  $c_1 = c_2 = 0$  che corrisponde ad avere  $B$  identicamente nulla.

Quando  $\lambda = 0$  le soluzioni dell'equazione differenziale per  $B$  sono tutte della forma

$$B(x) = c_1 + c_2x.$$

Le condizioni al bordo si traducono in questo caso nel sistema  $c_1 = 0$ ,  $c_1 + Lc_2 = 0$ , che implicano ancora che  $c_1 = c_2 = 0$  e dunque  $B$  identicamente nulla.

Per avere una soluzione  $B$  non identicamente nulla dovrà allora necessariamente essere  $\lambda < 0$ , e in questo caso le soluzioni dell'equazione differenziale per  $B$  sono tutte della forma

$$B(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Le condizioni al bordo si traducono ora nel sistema

$$c_1 = 0, \quad c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0,$$

da cui ricaviamo che per avere una soluzione non nulla dovrà necessariamente essere  $c_2 \neq 0$  e quindi  $\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$ , che significa  $\sqrt{-\lambda}L = k\pi$ , ovvero

$$(6) \quad \lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2,$$

per qualche  $k \in \mathbb{N}$ . Abbiamo allora che una soluzione non nulla per l'equazione per  $B$  è data da

$$B_k(x) = \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right).$$

**3.4. Soluzioni dell'equazione per  $A$ .** Quando  $\lambda$  è dato da (6) l'equazione per  $A$  diventa

$$A'(t) = -k^2 \frac{\pi^2}{L^2} A(t)$$

di cui una soluzione non nulla è data dall'esponenziale

$$A_k(t) = e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t}.$$

**3.5. Soluzioni per l'equazione del calore.** Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  abbiamo così trovato una soluzione elementare della forma

$$u_k(t, x) = A_k(t)B_k(x) = e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right),$$

che soddisfa le condizioni al bordo (3) e ha dato iniziale

$$f_k(x) := u_k(0, x) = A_k(0)B_k(x) = B_k(x) = \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right).$$

Ogni combinazione lineare di queste soluzioni è ancora una soluzione. Formalmente, senza per il momento preoccuparci troppo delle questioni di convergenza, possiamo costruire soluzioni della forma

$$(7) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right),$$

con dato iniziale dato da

$$(8) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k B_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right).$$

**3.6. Ortogonalità.** La famiglia formata dalle funzioni  $B_k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , forma un sistema ortogonale completo in  $L^2([0, L])$ . Se  $j, k \in \mathbb{N}$  con  $j \neq k$  abbiamo infatti che

$$\langle B_j, B_k \rangle = \int_0^L \sin\left(j\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \sin(jt) \sin(kt) dt = 0;$$

Inoltre, ogni funzione  $f \in L^2([0, L])$ , può essere scritta nella forma (8), con la serie che converge in norma  $L^2$ . Infatti se consideriamo la funzione  $F \in L^2([-L, L])$  definita da  $F(x) = -f(-x)$  per  $x \in [-L, 0[$  e  $F(x) = f(x)$  per  $x \in ]0, L]$ , essendo dispari  $F$  ammette una espansione in serie di Fourier trigonometrica, riscalata all'intervallo  $[-L, L]$ , formata solo dai termini con i seni; tale serie produce la rappresentazione (8) per  $f$  con i coefficienti  $c_k$  dati dagli integrali

$$(9) \quad c_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) dx.$$

Le formule (7) e (9) ci permettono di definire così la soluzione del problema espressa come serie di funzioni per ogni dato iniziale  $f \in L^2$ .

In realtà la formula dei coefficienti (9) è ben definita anche per ogni funzione  $f \in L^1([0, L])$ , e sappiamo che in questo caso i coefficienti  $c_k$  formano una successione limitata. Questo ci permette di concludere che per ogni  $\varepsilon > 0$  la serie di funzioni (7) converge totalmente sulla regione  $t \geq \varepsilon$ ,  $x \in [0, L]$ , infatti abbiamo

$$\left| c_k e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) \right| \leq \| (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \|_{\ell^\infty} e^{-k^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \leq \frac{2}{L} \|f\|_{L^1} e^{-\frac{\pi^2 \varepsilon}{L^2} k^2},$$

e la serie numerica  $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\frac{\pi^2 \varepsilon}{L^2} k^2}$  è convergente. Derivando la serie (7) termine a termine si ottengono ancora delle serie totalmente convergenti per  $t$  positivi. La convergenza totale implica convergenza uniforme, dunque è consentito di scambiare l'ordine tra l'operazione derivazione e quella di somma della serie. Ne segue che quando  $f \in L^1$  la soluzione  $u$  definita tramite le formule (7) e (9) è una funzione derivabile, sia in  $t$  che in  $x$ , e dunque è effettivamente una soluzione regolare dell'equazione del calore.

#### 4. EQUAZIONE DELLE ONDE

Un'altro problema che può essere risolto tramite sviluppi in serie di Fourier è quello della corda vibrante. Le vibrazioni di una corda di lunghezza  $L$  fissata alle sue estremità (si pensi ad una corda di uno strumento musicale) sono descritte (per piccole oscillazioni) dall'equazione delle onde lineare della forma

$$(10) \quad \partial_{tt}^2 u = c^2 \partial_{xx}^2 u, \quad t > 0, \quad 0 < x < L,$$

dove  $c$  è una costante positiva e  $u(t, x)$  indica lo scostamento della corda dalla posizione di riposo al tempo  $t$  nel punto  $x$ , con le condizioni al bordo date da

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Supponiamo di conoscere la posizione e la velocità iniziale della corda,

$$(11) \quad u(0, x) = f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g(x).$$

Vogliamo determinare delle formule che ci permettano di scrivere la soluzione  $u$  in funzione di  $f$  e di  $g$ .

Applicando il metodo della separazione delle variabili, cerchiamo soluzioni non identicamente nulle della forma  $u(t, x) = A(t)B(x)$ . L'equazione diventa

$$A''(t)B(x) = c^2 A(t)B''(x).$$

Come prima, questo significa che, separando le variabili, dovrà esistere una costante  $\lambda$  tale che

$$\frac{A''(t)}{c^2 A(t)} = \frac{B''(x)}{B(x)} = \lambda.$$

Per la funzione  $B$  ritroviamo la stessa equazione  $B'' - \lambda B = 0$ , che abbiamo già risolto studiando l'equazione del calore. Siccome le condizioni al bordo sono ancora le stesse di prima, otteniamo per  $B$  le stesse soluzioni, ovvero per ogni  $k \in \mathbb{N}$  avremo un possibile valore per la costante  $\lambda$  dato da (6) e una soluzione data da

$$B_k(x) = \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right).$$

L'equazione per  $A$  risulta simile a quella per  $B$ ,

$$A''(t) + \left(ck \frac{\pi}{L}\right)^2 A(t) = 0.$$

Non avendo questa volta condizioni al contorno, la funzione  $A$  sarà data da una generica soluzione della forma

$$A_k(t) = a_k \cos\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) + b_k \sin\left(ck \frac{\pi}{L} t\right).$$

Combinando per linearità le soluzioni  $A_k(t)B_k(t)$  possiamo scrivere soluzioni di (10) nella forma

$$(12) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) + b_k \sin\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right).$$

Derivando termine a termine (formalmente) otteniamo

$$(13) \quad \partial_t u(t, x) = c \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k \left( -a_k \sin\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) + b_k \cos\left(ck \frac{\pi}{L} t\right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right).$$

Per  $t = 0$ , otteniamo che i dati iniziali devono essere rappresentati dalle serie

$$(14) \quad f(x) = u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right),$$

$$(15) \quad g(x) = \partial_t u(0, x) = c \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right),$$

che non sono altro che le serie di Fourier trigonometriche di soli seni per  $f$  e  $g$ . Questo significa che i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  per costruire la soluzione  $u$  sono dati dai coefficienti di Fourier dei dati iniziali  $f$  e  $g$  sviluppati in serie di seni:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right) dx,$$

$$b_k = \frac{2}{c\pi k} \int_0^L g(x) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right) dx.$$

Utilizzando le formule di Werner

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (-\cos(\alpha + \beta) + \cos(-\alpha + \beta)),$$

possiamo riscrivere la formula (12) nella forma

$$(16) \quad u(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \sin\left(k \frac{\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(k \frac{\pi}{L}(x-ct)\right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left( -\cos\left(k \frac{\pi}{L}(x+ct)\right) + \cos\left(k \frac{\pi}{L}(x-ct)\right) \right) = \\ = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} (G(x+ct) - G(x-ct)),$$

dove  $f$  è sempre il dato iniziale ottenuto come serie di seni (14), mentre la funzione  $G$  è definita dalla serie dei coseni

$$G(x) = c \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k) \cos\left(k \frac{\pi}{L} x\right),$$

Derivando termine a termine la serie che definisce  $G$  si ottiene esattamente la serie (15) che definisce il dato iniziale  $g$ , e dunque  $G$  è (formalmente) una primitiva di  $g$ . Se supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^2$  e  $g$  di classe  $C^1$ , allora  $G$  risulta essere effettivamente di classe  $C^2$  e la formula (16) descrive una funzione  $u$  di classe  $C^2$  che risulta essere effettivamente una soluzione dell'equazione delle onde (10).

*Osservazione 4.1.* La formula (16) ci mostra anche come la soluzione  $u$  sia composta dalla somma di due onde viaggianti, che si propagano traslando in direzioni opposte, una con velocità  $c$  e l'altra con velocità  $-c$ ,

$$u(t, x) = U_+(x+ct) + U_-(x-ct), \quad U_{\pm}(s) = \frac{1}{2} f(s) \pm \frac{1}{2c} G(s).$$

## 5. ESERCIZI

### 5.1. Fenomeno di Gibbs.

*Esercizio 5.1.* Completa la dimostrazione della proposizione 1.1.

*Esercizio 5.2.* Spiega perché per le convoluzioni con i nuclei di Fejér non si verifica il fenomeno di Gibbs.

### 5.2. Serie di Fourier per funzioni di periodo $T$ qualsiasi.

*Esercizio 5.3.* Riscrivi le formule per la serie di Fourier in forma trigonometrica (con coseni e seni), per i suoi coefficienti, e per l'identità di Plancherel, nel caso di una funzione di periodo  $T$  qualsiasi.

*Esercizio 5.4.* Dato un intervallo limitato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , costruisci una base ortonormale per lo spazio  $L^2([a, b])$ ,

*Esercizio 5.5.* Partendo dallo sviluppo in serie di potenze della funzione esponenziale,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

- Dimostra che ogni armonica elementare  $x \mapsto e^{i\lambda x}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , può essere approssimata in modo uniforme con dei polinomi su ogni intervallo limitato  $[a, b]$ .
- Dimostra che se una funzione in  $L^2([a, b])$  è ortogonale ad ogni monomio  $x \mapsto x^k$  con  $k \in \mathbb{N}_0$  allora è ortogonale anche ad ogni funzione armonica elementare.
- Dimostra che l'insieme dei polinomi è denso in  $L^2([a, b])$ .

### 5.3. Equazione del calore.

*Esercizio 5.6.* Determina delle formule per esprimere la soluzione  $u(t, x)$  dell'equazione del calore

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u$$

per  $t \geq 0$  e  $x \in [0, L]$ , con dato iniziale

$$u(0, x) = f(x) \in L^2([0, L]),$$

e soggetta alle condizioni di isolamento al bordo date da

$$\partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, L) = 0.$$

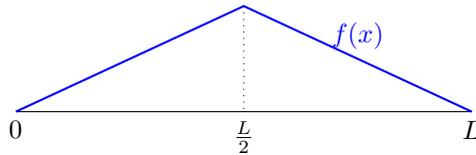
*Esercizio 5.7.* Ripeti l'esercizio precedente cambiando però le condizioni al bordo in

$$u(t, 0) = 0, \quad \partial_x u(t, L) = 0.$$

### 5.4. Equazione delle onde.

*Esercizio 5.8.* Spiega sotto quali ipotesi su  $f$  e  $g$  possiamo giustificare (a posteriori) la derivazione termine a termine ottenuta in (13) della serie (12).

*Esercizio 5.9.* Supponi che una corda vibrante lunga  $L$ , e fissata alle estremità, all'istante  $t = 0$  abbia una posizione iniziale  $f(x)$  descritta dalla seguente figura e una velocità iniziale nulla.



Analizzando l'espressione finale della formula (16) disegna la forma che assume la corda nei vari istanti  $t > 0$ .