

ANALISI 3 - L15:
PROPRIETÀ DI CONVERGENZA PER LA SERIE DI FOURIER.

Data una funzione $f \in L^1([-\pi, \pi])$ abbiamo definito la serie di Fourier associata ad f (o alla sua versione periodica) come la serie di funzioni

$$(1) \quad S[f](t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikt},$$

dove i coefficienti di Fourier \widehat{f}_k sono definiti dagli integrali

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds.$$

Nel contesto dello spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$ (che è contenuto in L^1) possiamo interpretare questi integrali come prodotti scalari,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle,$$

avendo definito $\widehat{E}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$. Abbiamo visto che l'insieme $\widehat{\Xi} = \{\widehat{E}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ forma un sistema ortonormale in $L^2([-\pi, \pi])$. In particolare vale la disuguaglianza di Bessel, che nel nostro caso diventa

$$(2) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2}^2.$$

Dedichiamo questa lezione allo studio del legame tra le proprietà di integrabilità e regolarità di f e le proprietà di convergenza della sua serie di Fourier. Quello che ci aspettiamo è che la serie di Fourier converga alla funzione di partenza quindi permetta di descrivere una decomposizione della funzione come somma numerabile di componenti armoniche ortogonali tra loro.

1. CONVERGENZA TOTALE PER FUNZIONI CONTINUE E REGOLARI A TRATTI

Osservazione 1.1. Quando $f \in L^1([-\pi, \pi])$, segue immediatamente dalla definizione che la successione dei coefficienti di Fourier è limitata,

$$\|(\widehat{f}_k)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)| ds = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1}.$$

Osservazione 1.2. Quando $f \in L^2([-\pi, \pi])$ la disuguaglianza di Bessel (2) ci dice che la successione dei coefficienti sta in $\ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\|(\widehat{f}_k)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2}.$$

Definizione 1.3. Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *regolari a tratti* (o anche C^1 a tratti) quando esiste una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di intervalli $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

Date: ultimo aggiornamento, 2 dicembre 2021.

tale che, per ogni $j = 1, \dots, n$, la funzione f è di classe C^1 su ciascun intervallo aperto $]x_{j-1}, x_j[$, ed inoltre esistono e sono finiti i limiti laterali di f e di f' negli estremi di I_j ,

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}^+) &= \lim_{t \rightarrow x_{j-1}^+} f(x), & f(x_j^-) &= \lim_{t \rightarrow x_j^-} f(x), \\ f'(x_{j-1}^+) &= \lim_{t \rightarrow x_{j-1}^+} f'(x), & f'(x_j^-) &= \lim_{t \rightarrow x_j^-} f'(x). \end{aligned}$$

In questo modo, per ogni $j = 1, \dots, n$, il prolungamento continuo sull'intervallo chiuso I_j della restrizione di f all'intervallo aperto $]x_{j-1}, x_j[$ risulta essere di classe C^1 .

Una funzione periodica si dice regolare a tratti quando la sua restrizione ad un intervallo di lunghezza uguale al periodo è regolare a tratti.

Ogni funzione regolare a tratti possiede derivata definita quasi ovunque e tale derivata è una funzione limitata.

Sono funzioni regolari a tratti, ad esempio, i segnali di onda quadra, onda a dente di sega, onda triangolare, di cui abbiamo calcolato le serie di Fourier nella precedente lezione.

Proposizione 1.4. *Se f è una funzione 2π -periodica, continua in ogni punto, e regolare a tratti, allora tra i coefficienti di Fourier di f' e quelli di f vale la seguente relazione*

$$(3) \quad \widehat{f}'_k = ik\widehat{f}_k.$$

Dimostrazione. Siano $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ i punti che suddividono l'intervallo $[-\pi, \pi]$ in intervalli sui quali f è di classe C^1 . Integrando per parti su ciascun intervallino su cui la funzione è C^1 otteniamo:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(s)e^{-iks} ds = f(x_j)e^{-ikx_j} - f(x_{j-1})e^{-ikx_{j-1}} + ik \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(s)e^{-iks} ds.$$

Sommando rispetto j otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(s)e^{-iks} ds = \sum_{j=1}^n (f(x_j)e^{-ikx_j} - f(x_{j-1})e^{-ikx_{j-1}}) + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks} ds.$$

La sommatoria dei termini di bordo, grazie alla continuità di f nei punti della suddivisione, è di tipo telescopico, si calcola facilmente e per via della periodicità di f risulta essere nulla,

$$\sum_{j=1}^n (f(x_j)e^{-ikx_j} - f(x_{j-1})e^{-ikx_{j-1}}) = f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0.$$

Otteniamo così che

$$\widehat{f}'_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s)e^{-iks} ds = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks} ds = ik\widehat{f}_k.$$

□

Osservazione 1.5. Se f è 2π -periodica, continua, e regolare a tratti, allora abbiamo anche $f' \in L^2$. Ne segue che la successione dei coefficienti sta in $\ell^1(\mathbb{Z})$. Infatti, utilizzando (3) abbiamo

$$\|(\widehat{f}_k)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_0| + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |\widehat{f}'_k|.$$

Per Hölder (o Cauchy-Schwarz) in ℓ^2 , e per la disuguaglianza di Bessel (2) applicata a f' , abbiamo che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |\widehat{f}'_k| \leq \left(2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}'_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_{L^2},$$

inoltre $|\widehat{f}_0| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2}$. Dunque,

$$\|(\widehat{f}_k)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \|f'\|_{L^2}.$$

Questo fatto ci permette di ottenere un primo risultato di convergenza per la serie di Fourier.

Proposizione 1.6. *Se f è una funzione 2π -periodica, continua e regolare a tratti, allora la serie di Fourier di f converge totalmente e la sua somma $S[f]$ è una funzione continua.*

Dimostrazione. La convergenza totale della serie (1) equivale a richiedere che la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|$ sia convergente, ma questo, per l'osservazione 1.5, segue dalle ipotesi su f . La convergenza totale implica convergenza uniforme, e siccome tutti i termini della serie sono continui ne segue che la somma $S[f]$ della serie di Fourier è una funzione continua, essendo limite uniforme di funzioni continue. \square

Attenzione! La proposizione 1.6 ci dice che la serie di funzioni converge ad una funzione $S[f]$, ma non ci dice che questa funzione coincide con f .

2. COMPLETEZZA DEL SISTEMA TRIGONOMETRICO IN L^2

Quando $f \in L^2([-\pi, \pi])$, utilizzando il sistema ortonormale $\widehat{\Xi} = (\widehat{E}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ possiamo scrivere la serie di Fourier (1) come proiezione ortogonale sulla chiusura $V := \overline{\text{span} \widehat{\Xi}}$ dello spazio generato dai polinomi trigonometrici,

$$S[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k = P_V(f).$$

Le somme parziali di questa serie,

$$\sum_{k=-n}^n \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k = f * D_n,$$

si ottengono tramite convoluzioni con i nuclei di Dirichlet,

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

La convergenza della serie è da intendersi nel senso della norma L^2 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S[f] - f * D_n\|_{L^2} = 0.$$

Vogliamo dimostrare che la somma $S[f]$ della serie di Fourier coincide (in L^2 , e dunque quasi ovunque) con la funzione f . Per il teorema di caratterizzazione delle basi in spazi di Hilbert, ciò equivale a dire che $\widehat{\Xi}$ è una base ortonormale in L^2 .

Teorema 2.1. *Il sistema trigonometrico $\widehat{\Xi}$ è una base ortonormale per lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$.*

Verificare che $\widehat{\Xi}$ è una base ortonormale, equivale a mostrare che $\text{span} \widehat{\Xi}$ è denso in L^2 , ad esempio facendo vedere che per ogni $f \in L^2([-\pi, \pi])$ è possibile definire una successione $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di polinomi trigonometrici che converge ad f in norma L^2 .

2.1. Nuclei di Fejér. Abbiamo già una successione di polinomi trigonometrici candidata ad approssimare una funzione $f \in L^2$ ed è data dalle proiezioni $f * D_N$ ottenute con le convoluzioni con i nuclei di Dirichlet. Purtroppo i nuclei di Dirichlet, per il loro carattere fortemente oscillante, risultano difficili da manipolare, in quanto producono quantità divergenti se integrati in valore assoluto. Possiamo invece utilizzare un'altra famiglia di polinomi approssimanti, costruiti come somme di Cesaro (medie aritmetiche) dei nuclei di Dirichlet, che risultano avere proprietà leggermente più favorevoli per stime puntuali.

Definizione 2.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo il *nucleo di Fejér* come il polinomio trigonometrico F_n di grado $n-1$ ottenuto come media aritmetica dei primi n nuclei di Dirichlet,

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k.$$

Dalla formula esplicita che abbiamo ricavato per i nuclei di Dirichlet,

$$(4) \quad D_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

possiamo ottenere anche una formula esplicita per i nuclei di Fejér. Ricordiamo che $\sin \alpha = \operatorname{Im}(e^{i\alpha})$,

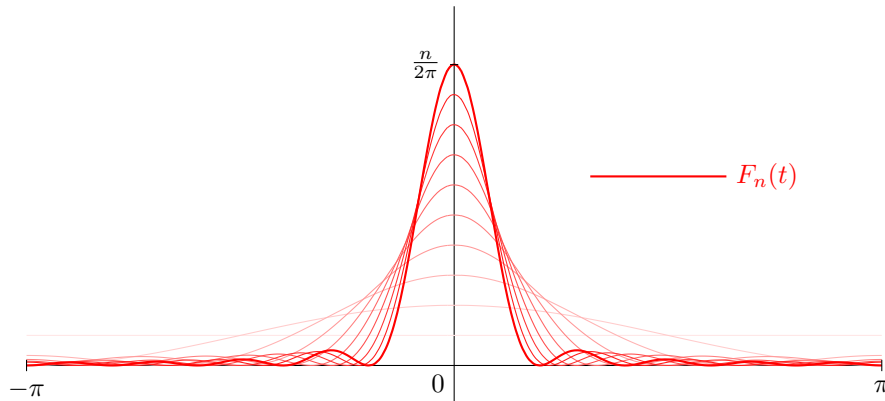
$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{1}{2\pi n \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi n \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k + \frac{1}{2}\right)t}\right). \end{aligned}$$

L'ultima sommatoria, è la somma di n termini di una progressione geometrica di ragione e^{it} e con primo termine $e^{i\frac{1}{2}t}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k + \frac{1}{2}\right)t} &= e^{i\frac{1}{2}t} \frac{(e^{it})^n - 1}{e^{it} - 1} = e^{i\frac{n}{2}t} \cdot \frac{e^{i\frac{n}{2}t} - e^{-i\frac{n}{2}t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} = e^{i\frac{n}{2}t} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nt\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \\ &= \frac{\sin(nt)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} + i \frac{(\sin\left(\frac{1}{2}nt\right))^2}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}. \end{aligned}$$

Otteniamo così che

$$(5) \quad F_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}nt\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)^2.$$



Proposizione 2.3. *I nuclei di Fejér godono delle seguenti proprietà:*

(A) F_n è una funzione pari a valori non negativi,

$$F_n(t) = F_n(-t) \geq 0;$$

(B) F_n sono funzioni di massa unitaria,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \|F_n\|_{L^1} = 1;$$

(C) la massa di f_n tende a concentrarsi intorno all'origine, infatti per ogni $\delta \in]0, \pi]$ abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt = 0.$$

Dimostrazione. La proprietà (A) risulta evidente dalla formula (5). La proprietà (B) segue dalla definizione e dal fatto che ogni nucleo di Dirichlet ha integrale 1,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1.$$

La proprietà (C) segue dal fatto che la funzione $(\sin(t/2))^{-2}$ è continua e limitata su ogni intervallo della forma $[\delta, \pi]$ con $\delta \in]0, \pi]$, e dunque ha integrale finito (dipendente da δ),

$$0 \leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt = \frac{1}{\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}nt)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right)^2 dt \leq \frac{1}{\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{(\sin(\frac{1}{2}t))^2} dt = \frac{C_{\delta}}{n}.$$

□

La proposizione ci dice che la successione dei nuclei di Fejér si comporta come una famiglia di mollificatori riscaldati, concentrando una massa unitaria sempre più vicino all'origine; come abbiamo già visto per i mollificatori, anche in questo caso otteniamo che l'operazione di convoluzione con questi nuclei permette di approssimare l'identità sugli spazi L^p .

Proposizione 2.4. *Sia $1 \leq p < \infty$. Data $f \in L^p([-\pi, \pi])$ allora la successione $(f * F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle convoluzioni con i nuclei di Fejér converge ad f in norma L^p .*

Dimostrazione. Siccome $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) ds = 1$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (f * F_n)(t) - f(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) F_n(s) ds - f(t) \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) ds = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) F_n(s) ds. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza integrale di Minkowski e la positività dei nuclei di Fejér otteniamo

$$\|(f * F_n) - f\|_{L^p} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} F_n(s) ds,$$

dove $\tau_{-s}(t) := t - s$ indica la traslazione di passo $-s$. Per la proprietà di continuità della norma L^p rispetto alle traslazioni, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|s| < \delta$ allora $\|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per qualsiasi s , per la disuguaglianza triangolare e l'invarianza delle norme L^p rispetto alle traslazioni, vale sempre la

stima $\|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}$. Combinando le due stime troviamo che

$$\begin{aligned} \|(f * F_n) - f\|_{L^p} &\leq \\ &\leq \int_{|s| < \delta} \|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} F_n(s) \, ds + \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \|f \circ \tau_{(-s)} - f\|_{L^p} F_n(s) \, ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + 2\|f\|_{L^p} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_n(s) \, ds \end{aligned}$$

Per il punto (C) della proposizione 2.1, l'ultimo integrale è infinitesimo per $n \rightarrow \infty$, e dunque per n sufficientemente grande tale integrale risulterà minore di $\varepsilon/(4\|f\|_p)$ e quindi avremo che $\|(f * F_n) - f\|_{L^p} < \varepsilon$. Questo significa che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f * F_n) - f\|_p = 0.$$

□

Ecco che siamo ora pronti per dare la dimostrazione della completezza del sistema trigonometrico in L^2 .

Dimostrazione del teorema 2.1. Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Siano $p_n := f * F_n$ i polinomi trigonometrici ottenuti come convoluzione con i nuclei di Fejer. Per la proposizione (2.4) abbiamo che la successione $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad f in norma L^2 . Dunque i polinomi trigonometrici sono densi in L^2 , ovvero

$$\overline{\text{span } \widehat{\Xi}} = L^2([-\pi, \pi]).$$

Ciò equivale a dire che il sistema ortonormale $\widehat{\Xi}$ è una base per lo spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$. □

Corollario 2.5 (Convergenza della serie di Fourier in L^2). *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$. La successione dei polinomi trigonometrici $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da*

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikt} = f * D_n,$$

converge alla funzione f per $n \rightarrow \infty$ in norma L^2 . (Ricordiamo che con \widehat{f}_k indichiamo i coefficienti di Fourier di f , e con D_n i nuclei di Dirichlet)

Questo significa in particolare che la somma $S[f]$ della serie di Fourier di una funzione $f \in L^2$ coincide quasi ovunque con la funzione f .

Dimostrazione. Il corollario segue immediatamente dal fatto che $\widehat{\Xi}$ è una base per L^2 in quanto, in virtù del teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali, abbiamo che la somma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k(t),$$

converge incondizionatamente ad f in L^2 .

In alternativa, potevamo anche osservare che essendo f_n la proiezione ortogonale di f sul sottospazio dei polinomi ortogonali di grado minore o uguale a n , f_n è anche il polinomio trigonometrico più vicino ad f in norma L^2 tra tutti quelli di grado minore o uguale a n , e in particolare sarà più vicino ad f di quanto lo siano le convoluzioni con i nuclei di Fejér,

$$\|f_n - f\|_{L^2} \leq \|(f * F_n) - f\|_{L^2}.$$

Per la proposizione 2.4 abbiamo che $f * F_n$ converge ad f in norma L^2 e quindi per confronto anche f_n . □

2.2. Identità di Plancherel. Sempre per il teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali in spazi di Hilbert, abbiamo che la disuguaglianza di Bessel (2) si trasforma ora nella seguente *identità di Plancherel*: se $f \in L^2([-\pi, \pi])$ allora

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \widehat{E}_k \rangle|^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2,$$

ovvero

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt,$$

In particolare, trattandosi di una serie convergente, la successione sommata è infinitesima, dunque abbiamo che

$$(6) \quad f \in L^2([-\pi, \pi]) \implies \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Nel caso in cui la serie di Fourier è scritta nella forma trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

siccome abbiamo che

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad \widehat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \widehat{f}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e quindi

$$|\widehat{f}_0|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2, \quad |\widehat{f}_k|^2 + |\widehat{f}_{-k}|^2 = \frac{1}{2}|a_k|^2 + \frac{1}{2}|b_k|^2,$$

l'identità di Plancherel diventa

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{N}} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Esempio 2.6. Riprendiamo in mano i calcoli fatti nella scorsa lezione per ottenere i coefficienti di Fourier del segnale a dente di sega. Abbiamo visto che la funzione $f(t) = t$ per $t \in [-\pi, \pi]$ ha come coefficienti di Fourier $a_k = 0$ e $b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$. L'identità di Plancherel in questo caso diventa

$$4\pi \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \pi \sum_{k \in \mathbb{N}} |b_k|^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^3,$$

che si semplifica nella famosa somma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. CONVERGENZA PUNTUALE PER FUNZIONI REGOLARI A TRATTI

Le funzioni periodiche regolari a tratti sono contenute in L^2 . Combinando i risultati della proposizione 1.6 con quelli del corollario 2.5, siccome se c'è convergenza in norma L^2 e convergenza puntuale la funzione limite è la stessa, otteniamo che per una funzione f regolare a tratti e continua in ogni punto la sua serie di Fourier converge totalmente, e dunque anche uniformemente alla funzione f . In ogni punto la serie di Fourier ricostruisce fedelmente la funzione.

Vediamo ora che se f è regolare a tratti, anche se presenta delle discontinuità (di tipo salto), la serie di Fourier converge puntualmente in ogni punto.

Definizione 3.1. Data una funzione f regolare a tratti e un punto t_* definiamo il *valore regolarizzato* di f in t_* come il valore medio tra il limite destro e il limite sinistro di f in t_* ,

$$\frac{f(t_*^+) + f(t_*^-)}{2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow t_*^+} f(t) + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow t_*^-} f(t).$$

Nei punti in cui f è continua il valore regolarizzato di f coincide con il valore di f .

Teorema 3.2. *Se f è una funzione 2π -periodica e regolare a tratti allora la serie di Fourier di f converge in ogni punto al valore regolarizzato di f .*

Dimostrazione. Per ogni punto t_* fissato si tratta di dimostrare che la successione dei valori $v_n := (f * D_n)(t_*)$ delle somme parziali della serie di Fourier, che sappiamo essere data dalle convoluzioni con i nuclei di Dirichlet, converge al valore regolarizzato $v := \frac{1}{2}(f(t_*^+) + f(t_*^-))$ per $n \rightarrow \infty$. I nuclei di Dirichlet sono funzioni pari, $D_n(-s) = D_n(s)$, e dunque

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-\pi}^0 f(t_* - s) D_n(s) ds + \int_0^\pi f(t_* - s) D_n(s) ds = \\ &= \int_0^\pi f(t_* + s) D_n(-s) ds + \int_0^\pi f(t_* - s) D_n(s) ds = \\ &= \int_0^\pi (f(t_* + s) + f(t_* - s)) D_n(s) ds. \end{aligned}$$

Inoltre, siccome $\int_{-\pi}^\pi D_n(s) ds = 1$, per simmetria abbiamo $\int_0^\pi D_n(s) ds = \frac{1}{2}$ e quindi possiamo scrivere

$$v = (f(t_*^+) + f(t_*^-)) \int_0^\pi D_n(s) ds = \int_0^\pi (f(t_*^+) + f(t_*^-)) D_n(s) ds.$$

Mettendo insieme le due cose otteniamo

$$v_n - v = \int_0^\pi g(s) D_n(s) ds$$

dove

$$g(s) := f(t_* + s) + f(t_* - s) - f(t_*^+) - f(t_*^-).$$

La funzione g è regolare a tratti e abbiamo

$$g(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = 0, \quad g'(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g'(s) = f'(t_*^+) - f'(t_*^-).$$

Utilizzando la formula (4) abbiamo che

$$\begin{aligned} (7) \quad v_n - v &= \int_0^\pi \frac{g(s)}{2\pi \sin(s/2)} \cdot \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})s} - e^{-i(n+\frac{1}{2})s}}{2i} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi h_+(s) e^{ins} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi h_-(s) e^{-ins} ds = \widehat{h}_{+n} + \widehat{h}_{-n}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$h_\pm(s) := \begin{cases} \pm \frac{g(s) e^{\pm is/2}}{2i \sin(s/2)}, & \text{se } s \in]0, \pi], \\ 0, & \text{se } s \in]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Queste funzioni h_\pm sono funzioni limitate, in quanto la g è limitata, e per $s \rightarrow 0^+$, per la regola di De L'Hopital, abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} h_\pm(s) = \pm \frac{1}{2i} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g(s)}{\sin(s/2)} = \mp i \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g'(s)}{\cos(s/2)} = \mp i (f'(t_*^+) - f'(t_*^-)).$$

Dunque abbiamo che $h_{\pm} \in L^2([-\pi, \pi])$; per la proprietà (6) i loro coefficienti di Fourier formano successioni infinitesime, e quindi dalla formula (7) ricaviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - v = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{h}_{+n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{h}_{-n} = 0.$$

□

4. ESERCIZI

4.1. Convergenza totale per funzioni continue e regolari a tratti.

Esercizio 4.1. Sia $0 < a < 1$. Siano f e g le funzioni 2π -periodica che coincidono con $f(t) = \cos(at)$ e $g(t) = \sin(at)$ per $t \in [-\pi, \pi]$. Calcola i termini della serie di Fourier di f e sfruttando la relazione (3) tra i coefficienti di una funzione e quelli della sua derivata scrivi i termini della serie di Fourier di g . Verifica che la serie di Fourier di f converge totalmente, e che la serie di Fourier di g non converge totalmente.

Esercizio 4.2. Se f è una funzione 2π -periodica di classe C^2 , quale relazione c'è tra i coefficienti di Fourier di f e i coefficienti di Fourier di f'' ?

Esercizio 4.3. Determina esplicitamente la funzione $f(t)$ che ha come serie di Fourier la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{2^n}.$$

[Suggerimento: la serie in questione è la parte reale di una serie geometrica a valori complessi.]

4.2. Completezza del sistema trigonometrico in L^2 .

Esercizio 4.4. Calcola le convoluzioni $D_n * D_m$ tra nuclei di Dirichlet. [Riesci a calcolarle senza fare calcoli?]

Esercizio 4.5. Determina i coefficienti numerici che permettono di esprimere i nuclei di Fejer come combinazione lineare delle funzioni armoniche elementari.

Esercizio 4.6 (Somme di Cesaro in spazi normati). Per capire il legame tra nuclei di Dirichlet e nuclei di Fejer dimostra il seguente lemma che illustra la peculiarità delle somme di Cesaro.

Lemma 4.7. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente in uno spazio normato. Definiamo $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e il suo limite è lo stesso di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 4.8. Dimostra che se f è una funzione 2π -periodica e continua allora la successione $(f * F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle convoluzioni con i nuclei di Fejér converge uniformemente ad f .

Esercizio 4.9. Ogni funzione di $L^2([0, \pi])$ può essere estesa in modo unico ad una funzione dispari o ad una funzione pari di $L^2([-\pi, \pi])$. Sfruttando questa idea dimostra che:

- l'insieme di funzioni $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kt) : k \in \mathbb{N} \right\}$ è una base ortonormale per $L^2([0, \pi])$;
- l'insieme di funzioni $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kt) : k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ è una base ortonormale per $L^2([0, \pi])$.

Esercizio 4.10. Utilizzando l'identità di Plancherel applicata ai segnali di onda quadra e di onda triangolare visti nella precedente lezione, calcola la somma esatta delle seguenti serie numeriche,

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k^4}, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^4}.$$

4.3. Convergenza puntuale per funzioni regolari a tratti.

Esercizio 4.11. Dimostra che ogni funzione 2π -periodica regolare a tratti si può scrivere come somma di una funzione *continua* regolare a tratti più una combinazione lineare di traslate del segnale a dente di sega.

Esercizio 4.12. Considera la serie di Fourier per la funzione 2π -periodica f che coincide con $f(t) = e^t$ per $t \in]-\pi, \pi[$ (e di cui abbiamo già calcolato i coefficienti negli esempi della lezione 14). Esaminando la convergenza della serie di Fourier nei punti $t_0 = 0$ e $t_1 = \pi$ determina la somma delle serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}.$$