ANALISI 3 - L13: FUNZIONALI LINEARI SU SPAZI DI HILBERT

Nella lezione 4 abbiamo definito lo spazio duale di uno spazio normato V come lo spazio $V' := \mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ dei funzionali lineari continui su V, dotato della norma

$$\|\phi\|_{V'} := \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|_V}.$$

Sappiamo che il duale V' è sempre uno spazio completo (anche se V non lo è).

La norma di un vettore in uno spazio normato può essere determinata usando le valutazioni del vettore rispetto ai funzionali lineari nello spazio duale,

$$\|x\|_V = \sup_{\substack{\phi \in V' \\ \phi \neq 0}} \frac{|\phi(x)|}{\|\phi\|_{V'}}.$$

In particolare abbiamo che $x = 0$ se e solo se $\phi(x) = 0$ per ogni $\phi \in V'$. Per linearità segue che l'uguaglianza di due vettori è determinata dall'uguaglianza delle loro valutazioni rispetto ai funzionali lineari continui,

$$x = y \iff \phi(x) = \phi(y), \forall \phi \in V'.$$

A sinistra abbiamo un uguaglianza tra vettori, a destra invece abbiamo una famiglia di uguaglianze tra quantità scalari. Possiamo pensare ai funzionali lineari continui, gli elementi dello spazio duale, come a degli strumenti per "misurare" i vettori dello spazio; per ogni vettore, l'insieme di tutti i valori (scalari) di queste misure ci permette di identificare univocamente il vettore.

In questa lezione esaminiamo la struttura del duale H' di uno spazio di Hilbert H; mostriamo come H e H' sono tra loro isomorfi e che il prodotto scalare di H ci fornisce una naturale rappresentazione della dualità tra i due spazi.

1. Rappresentazione di funzionali lineari

Il prodotto interno è sempre un'applicazione continua. Questo ci permette di costruire facilmente dei funzionali lineari continui.

Proposizione 1.1. *Sia E uno spazio pre-hilbertiano. Per ogni $v \in E$, il funzionale $\phi_v \colon E \to \mathbb{C}$ definito da $\phi_v(x) := \langle x, v \rangle$ è lineare e continuo, con $\|\phi_v\|_{E'} = \|v\|_E$.*

Dimostrazione. La linearità di ϕ_v segue dalle proprietà di linearità del prodotto interno. La continuità si ottiene come conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|\phi_v(x)| = |\langle x, v \rangle| \leqslant \|v\|_E \, \|x\|_E \,, \quad \forall x \in E,$$

e dunque $\|\phi_v\|_{E'} \leqslant \|v\|_E$. Siccome $\phi_v(v) = \|v\|_E^2$, abbiamo inoltre che

$$\|\phi_v\|_{E'} \geqslant \frac{|\phi_v(v)|}{\|v\|_E} = \|v\|_E \,.$$

□

Date: ultimo aggiornamento, 21 novembre 2021.

Osservazione 1.2. Siccome il vettore v nella definizione di ϕ_v appare come secondo argomento del prodotto interno, l'applicazione

$$\Phi\colon E \to E', \qquad v \mapsto \Phi(v) := \phi_v, \tag{1}$$

risulta essere antilineare:

$$\phi_{v+w} = \phi_v + \phi_w, \quad \phi_{\lambda v} = \overline{\lambda}\phi_v, \qquad \forall v, w \in E,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Negli spazi di Hilbert vale anche il viceversa della proposizione 1.1.

Teorema 1.3 (Teorema di rappresentazione di Riesz). *Sia $\phi \in H'$ un funzionale lineare e continuo sullo spazio di Hilbert H. Allora esiste un unico $v \in H$ tale che $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ per ogni $x \in H$. Inoltre si ha $\|\phi\|_{H'} = \|v\|_H$.*

Dimostrazione. Vediamo l'unicità. Se $\langle x, v_1\rangle = \langle x, v_2\rangle$ per ogni $x \in H$ allora la differenza $u := v_1 - v_2$ è ortogonale a tutto H. In particolare abbiamo $v_1 - v_2$ è ortogonale a se stesso e dunque deve essere il vettore nullo, ovvero $v_1 = v_2$.

Vediamo l'esistenza. Se ϕ è identicamente nullo allora basta prendere $v = 0$. Se ϕ non è identicamente nullo allora esiste un vettore $u \in (\ker\phi)^\perp$ per il quale si ha $\phi(u) = 1$. Fissato un generico $x \in H$, per linearità abbiamo

$$\phi\big(x - \phi(x)u\big) = \phi(x) - \phi(x)\phi(u) = \phi(x) - \phi(x) = 0,$$

e quindi $x - \phi(x)u \in \ker\phi$. Siccome u è ortogonale al nucleo $\ker\phi$ abbiamo anche

$$0 = \langle x - \phi(x)u, u\rangle = \langle x, u\rangle - \phi(x)\|u\|^2,$$

da cui ricaviamo che $\phi(x) = \|u\|^{-2}\langle x, u\rangle$. Otteniamo quindi che $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ per ogni $x \in H$, con $v = \|u\|^{-2} u$.

L'uguaglianza delle norme $\|\phi\| = \|v\|$ segue ora dalla proposizione 1.1. □

Il teorema 1.3 ci permette di identificare il duale H' di uno spazio di Hilbert H con H stesso.

Proposizione 1.4. *Il duale di uno spazio di Hilbert è anch'esso uno spazio di Hilbert.*

Dimostrazione. Il teorema di Riesz ci garantisce che l'applicazione Φ definita in (1) è una biezione da H in H' che preserva la norma. Siccome la norma in H verifica l'identità del parallelogramma essendo H uno spazio di Hilbert, ne segue che anche la norma in H' verifica l'dentità del parallelogramma, e dunque anche H' è uno spazio di Hilbert. □

Vediamo qualche esempio della corrispondenza $v \leftrightarrow \phi_v$ in alcuni casi concreti.

Esempio 1.5. Consideriamo la successione $v := (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ nello spazio di Hilbert ℓ^2. Ad essa corrisponde il funzionale lineare $\phi \in (\ell^2)'$ che ad ogni successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associa il valore scalare dato da

$$\phi(x) := \langle x, v\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n.$$

Per l'uguaglianza delle norme abbiamo

$$\|\phi\|_{(\ell^2)'} = \|v\|_{\ell^2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Esempio 1.6. Consideriamo il funzionale lineare $\phi(x) = 3x_1 - 5x_2 + \mathrm{i}x_4$ definito per ogni successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si tratta di un funzionale continuo su ℓ^2, infatti abbiamo

$$|\phi(x)| \leqslant 3|x_1| + 5|x_2| + |x_4| \leqslant 9\|x\|_{\ell^\infty} \leqslant 9\|x\|_{\ell^2}.$$

Possiamo interpretare $\phi(x)$ come un prodotto scalare,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 3x_1 + (-5)x_2 + 0x_3 + \mathrm{i}x_4 + 0x_5 + \cdots = \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots), (3, -5, 0, -\mathrm{i}, 0, \dots)\rangle_{\ell^2} = \langle x, v\rangle,\end{aligned}$$

e quindi il vettore corrispondente a ϕ è la successione $v = (3, -5, 0, -\mathrm{i}, 0, 0, \dots)$. La norma di ϕ è dunque data da

$$\|\phi\|_{(\ell^2)'} = \|v\|_{\ell^2} = \left(3^2 + 5^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \dots\right)^{1/2} = \sqrt{35}.$$

Esempio 1.7. Consideriamo il funzionale lineare μ che ad ogni funzione integrabile f definita sull'intervallo $[a, b]$ associa il suo valore medio, $\mu(f) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Si tratta di un funzionale continuo su $L^2([a, b])$, infatti

$$|\mu(f)| \leqslant \frac{1}{b-a}\,\|f\|_{L^1([a,b])} \leqslant \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,\|f\|_{L^2([a,b])}\,.$$

Possiamo interpretare $\mu(f)$ come un prodotto scalare con una funzione costante

$$\mu(f) = \int_a^b f(t)\cdot\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \langle f, \frac{1}{b-a}\rangle_{L^2([a,b])},$$

e dunque per la norma di μ abbiamo

$$\|\mu\|_{(L^2([a,b]))'} = \left\|\frac{1}{b-a}\right\|_{L^2([a,b])} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

In uno spazio pre-hilbertiano non completo non tutti i funzionali lineari continui sono rappresentati da prodotti scalari.

Esempio 1.8. Sia c lo spazio delle successioni convergenti (ovvero che possiedono limite finito). Possiamo considerare c come uno spazio pre-hilbertiano dotato del seguente prodotto scalare

$$\langle x, y\rangle_c = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x_n\overline{y_n} + \lim_{n\to\infty} x_n\overline{y_n}, \quad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c. \tag{2}$$

Il teorema di Riesz non è applicabile in quanto si tratta di uno spazio pre-hilbertiano che non è completo. L'operatore di limite $L(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$ è lineare e continuo su c,

$$|L(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty}|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}^2|x_n|^2 + \lim_{n\to\infty}|x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|_c\,.$$

Se esistesse una successione $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ tale che $L(x) = \langle x, v\rangle_c$ per ogni $x \in c$, allora scegliendo come x la successione canonica e_k, per ogni $k \in \mathbb{N}$, avremmo $L(e_k) = 0$ e $\langle e_k, v\rangle_c = \frac{1}{k^2}\overline{v_k}$ e quindi dovrebbe essere $v_k = 0$ per ogni k, e dunque dovremmo avere L identicamente nullo, ma non tutte le successioni di c hanno limite nullo.

2. Derivate deboli

Sia f una funzione di classe C^1 definita su un intervallo aperto I. Per ogni funzione liscia φ a supporto compatto in I, la formula di integrazione per parti ci dice che

$$\int_I f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Questa proprietà caratterizza completamente la derivata. Infatti, se g è una funzione integrabile tale che

$$\int_I g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

per ogni funzione liscia a supporto compatto, allora dal confronto di queste due uguaglianze otteniamo che

$$\int_I \big(g(t) - f'(t)\big)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),$$

ma questo, in virtù del seguente lemma, implica che g coincide con f' quasi ovunque.

Lemma 2.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia f una funzione localmente integrabile su Ω tale che $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ per ogni funzione liscia φ con supporto compatto in Ω. Allora f è nulla quasi ovunque su Ω.*

Dimostrazione. Sia p un qualunque punto di Ω. Essendo Ω aperto esisterà una palla $B(p, 2r) \subseteq \Omega$. Consideriamo una funzione liscia ψ con supporto in $B(p, 2r)$ e tale che $\psi(x) = 1$ quando $x \in B(p, r)$. Sia $(\phi_t)_{t>0}$ una famiglia di mollificatori riscalati,

$$\phi_t(x) = t^{-d}\phi(x/t), \quad \operatorname{supp}\phi_t \subseteq B(0, t), \quad \int \phi_t = 1,$$

Per quanto visto nella lezione 9, le convoluzioni con i mollificatori approssimano le funzioni in L^1, e dunque $(f\psi) * \phi_t$ converge a $f\psi$ in norma L^1 per $t \to 0^+$. Abbiamo

$$(f\psi) * \phi_t(x) = \int f(y)\psi(y)\phi_t(x - y)\,\mathrm{d}y,$$

e osserviamo che, per x fissato, la funzione $y \mapsto \psi(y)\phi_t(x - y)$ è una funzione liscia con supporto compatto contenuto in Ω. Quindi, per le ipotesi sulla f, abbiamo che $(f\psi) * \phi_t(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$ e ogni $t > 0$. Passando al limite per $t \to 0^+$ ricaviamo che la funzione limite $f\psi$ deve essere nulla quasi ovunque, ma tale funzione sulla palla $B(p, r)$ coincide con f, dunque f si annulla in un intorno di p. □

La proprietà (3) può essere verificata da una coppia di funzioni f e g anche in casi in cui f non sia derivabile, in tal caso g fa le veci, in senso debole, della derivata di f.

Definizione 2.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Siano f, g due funzioni localmente integrabili su Ω. La funzione g si dice *derivata parziale debole* di f rispetto alla variabile x_k quando si ha che

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

per ogni funzione liscia φ con supporto compatto in Ω.

Quando una funzione è derivabile la derivata debole coincide con la derivata usuale. Ma ci sono casi di funzioni non derivabili che ammettono derivata debole. Continueremo ad utilizzare gli stessi simboli di notazione delle derivate ordinarie anche per le derivate deboli. Siccome la derivata debole è definita tramite integrali, modificando una derivata debole su un insieme di misura nulla si ottiene ancora una derivata debole della stessa funzione. Le derivate deboli sono quindi funzioni definite quasi ovunque, non possiedono un valore puntuale, vanno considerate come classi di funzioni rispetto alla relazione di uguaglianza quasi ovunque.

Esempio 2.3. Sia φ liscia a supporto compatto in $\mathbb{R}$. Abbiamo,

$$\begin{aligned}\int |t|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_{-\infty}^0 t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int \operatorname{sgn}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La derivata debole della funzione valore assoluto $|t|$ è dunque la funzione segno $\operatorname{sgn}(t)$. Osserviamo che $|t|$ non è derivabile per $t = 0$, e in corrispondenza di tale punto la sua derivata debole $\operatorname{sgn}(t)$ presenta una discontinuità.

Definizione 2.4. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Definiamo lo *spazio di Sobolev* $H^1(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni $L^2(\Omega)$ che possiedono tutte le derivate parziali deboli ed anch'esse sono funzioni di L^2,

$$H^1(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \colon \forall k = 1, \dots, d,\ \exists\, \partial_k f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Su $H^1(\Omega)$ possimo definire un prodotto scalare ponendo

$$\langle f, g \rangle_{H^1} := \int_\Omega \Big(f\overline{g} + \sum_{k=1}^{d} \partial_k f \overline{\partial_k g} \Big)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(f\overline{g} + \nabla f \cdot \overline{\nabla g} \right)\, \mathrm{d}x,$$

con corrispondente norma data da

$$\|f\|_{H^1} = \left(\int_\Omega \left(|f|^2 + |\nabla f|^2 \right) \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Proposizione 2.5. *Lo spazio $H^1(\Omega)$ è completo.*

Dimostrazione. Per non appesantire la notazione diamo la dimostrazione nel caso unidimensionale per funzioni definite su un intervallo aperto I. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy in $H^1(I)$. Siccome la norma H^1 di una funzione f domina sia la norma L^2 di f che la norma L^2 della derivata (debole) di f, abbiamo che sia (f_n) che (f_n') sono successioni di Cauchy in L^2. Per la completezza di L^2 otteniamo che la successione (f_n) converge ad una funzione f e la successione delle derivate (f_n') converge ad un'altra funzione g. Nella lezione 6 abbiamo visto che la convergenza in norma implica la convergenza debole, e quindi per ogni funzione liscia φ con supporto compatto abbiamo

$$\int f\varphi'\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int f_n \varphi'\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} -\int f_n' \varphi\, \mathrm{d}x = -\int g\varphi.$$

Risulta così che $g = f'$ è derivata debole di f. Il fatto che (f_n) converga a f in L^2 e (f_n') converga a f' in L^2 equivale a dire che (f_n) converge a f in H^1. □

Abbiamo così provato che lo spazio di Sobolev H^1 è uno spazio di Hilbert.

Come per L^2 anche in H^1 non possiamo parlare di valori puntuali per le sue funzioni. Possiamo comunque definire il sottospazio H_0^1 di H^1 formato dalle funzioni che si annullano sul bordo del dominio Ω, prendendo la chiusura rispetto alla topologia di H^1 del sottospazio formato dalle funzioni liscie con supporto compatto in Ω,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1} = \left\{ f \in H^1(\Omega) \colon \exists (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega), \|\varphi_n - f\|_{H^1} \to 0 \right\}.$$

Proposizione 2.6 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ allora esiste una costante positiva C_Ω tale che*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)},$$

per ogni funzione $f \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Anche in questo caso, per semplicità di notazione, diamo la dimostrazione per il caso unidimensionale per funzioni definite su un intervallo aperto e limitato $I =]a, b[$. Siccome le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in H_0^1, è sufficiente dimostrare la disuguaglianza per una funzione regolare che si annulla negli estremi dell'intervallo, il caso generale si ottiene poi considerando una successione approssimante. Sia f una funzione di classe C^1 che si annulla negli estremi a

e b. Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo che $f(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, e dunque per Hölder

$$|f(x)|^2 \leqslant \Big(\int_a^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\ \mathrm{d}t \leqslant (x-a)\,\|f'\|^2_{L^2(a,b)}\,.$$

Integrando ulteriormente,

$$\|f\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b |f(x)|^2\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x\,\|f'\|^2_{L^2(a,b)} = \frac{(b-a)^2}{2}\,\|f'\|^2_{L^2(a,b)}\,.$$

□

Come conseguenza della disuguaglianza di Poincarè abbiamo che su $H_0^1(\Omega)$ la norma H^1 è equivalente alla norma L^2 del gradiente, risulta infatti che

$$\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{1+C_\Omega^2}\,\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{4}$$

Per funzioni di H^1 ciò non vale, si prenda ad esempio una funzione costante non nulla, ha un gradiente nullo, mentre la norma H^1 che in questo caso coincide con la norma L^2 non è nulla.

Proposizione 2.7. *Lo spazio $H_0^1(\Omega)$ dotato dell'applicazione sesquilineare*

$$B(f,g) := \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione. Si vede facilmente che B soddisfa le condizioni di simmetria e linearità richieste ad un prodotto scalare. Osserviamo inoltre che $B(f,f) = \|\nabla f\|^2_{L^2} \geqslant 0$. Inoltre, quando $B(f,f) = 0$ si ha $\|\nabla f\|_{L^2} = 0$ e quindi, dalla disuguaglianza di Poincarè, segue che $\|f\|_{L^2} = 0$ e dunque $f = 0$. La norma indotta dal prodotto scalare B su H_0^1 è $\|f\|_B = \|\nabla f\|_{L^2}$ e come osservato in (4), è equivalente alla norma di H^1, dunque induce la stessa topologia su H_0^1. Ma H_0^1 è un sottospazio chiuso in H^1 rispetto alla norma di H^1 e dunque è completo, quindi è completo anche rispetto alla norma indotta da B. □

3. Applicazioni ad un problema di equazioni alle derivate parziali

Vogliamo mostrare ora una applicazione concreta della teoria astratta degli spazi di Hilbert ad un problema di fisica matematica: il problema di Poisson su una regione limitata con condizioni di Dirichlet nulle al bordo.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ (si pensi in particolare al caso $d = 3$). Si supponga che Ω rappresenti un corpo conduttore, che possiede una certa densità di carica elettrica al suo interno descritta da una funzione scalare f, allora il potenziale elettrostatico in Ω che si annulla sul bordo di Ω, è descritto da un campo scalare u che risolve la seguente equazione di Poisson,

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad \forall x \in \Omega, \tag{6}$$

soggetto alle condizioni di Dirichlet omogenee al bordo,

$$u(x) = 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

L'operatore Δ, detto *laplaciano*, è un operatore differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine definito come divergenza del gradiente, e coincide con la traccia della matrice hessiana,

$$\Delta u = \nabla\cdot\nabla u = \sum_{k=1}^d \partial_k^2 u.$$

L'equazione di Poisson richiede che il campo u possegga derivate del secondo ordine rispetto a ciascuna variabile. Utilizzando tecniche di dualità possiamo riformulare il problema in modo che basti considerare solo derivate del primo ordine.

Proposizione 3.1. *Siano f una funzione continua e u una funzione di classe C^2 entrambe definite sulla chiusura di Ω. Se $\Delta u = f$ su Ω allora vale l'uguaglianza*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione. Anche in questo caso, per semplicità di notazione, diamo la dimostrazione per il caso unidimensionale per funzioni definite su un intervallo limitato $I = [a, b]$. L'equazione in dimensione 1 si riduce a $u'' = f$. Per densità possiamo supporre che φ sia liscia e a supporto compatto in $]a, b[$. Per ottenere il risultato cercato basta moltiplicare l'equazione per φ e integrare per parti, tenendo conto che la funzione test φ si annulla agli estremi di integrazione,

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u''(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = [u'(t)\varphi(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b u'(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Osserviamo che la condizione (8) richiede solo il controllo delle derivate prime di u e può essere formulata anche per funzioni u in H^1.

Quando Ω è un aperto con un bordo sufficientemente regolare, per una funzione $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, la condizione che u sia nulla sul bordo di Ω equivale a richiedere che u appartenga al sottospazio $H^1_0(\Omega)$. [Questo particolare, seppur abbastanza evidente, non è proprio immediato e richiederebbe qualche approfondimento, per il momento lo accettiamo senza entrare nei dettagli.]

Ecco che allora siamo pronti a dare una formulazione "debole" del nostro problema.

Definizione 3.2. Diciamo che u è una soluzione *debole* del problema di Poisson (6) con dati di Dirichlet nulli (7) quando $u \in H^1_0(\Omega)$ e per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$ si ha che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Grazie al teorema di rappresentazione di Riesz possiamo dare un risultato di esistenza e unicità per soluzioni deboli.

Teorema 3.3. *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ che soddisfa la condizione* (9).

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio di Hilbert $H = \big(H^1_0(\Omega), B(\cdot,\cdot)\big)$ descritto nella proposizione 2.7. La condizione (9) richiesta ad u per essere soluzione debole del problema equivale alla richiesta

$$B(v, u) = L(v), \quad \forall v \in H, \tag{10}$$

dove L è il funzionale lineare

$$L(v) := -\int_\Omega \overline{f} v \,\mathrm{d}x.$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder e poi la disuguaglianza di Poincaré abbiamo che

$$|L(v)| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_B\,,$$

dove $\|v\|_B = \|\nabla v\|_{L^2}$ è la norma su H indotta da B. Dunque L è un funzionale lineare e continuo su H, e quindi per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste, ed è unico, un elemento $u \in H$ tale che valga la condizione (10). □

4. Esercizi

4.1. **Rappresentazione di funzionali lineari.**

Esercizio 4.1. Sia $T\colon \ell^2 \to \mathbb{C}$ il funzionale lineare definito da
$$T(x) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{k}, \quad \forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$
Verifica che T è continuo e determina la successione $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ che lo rappresenta, ovvero tale che $T(x) = \langle x, v\rangle_{\ell^2}$.

Esercizio 4.2. Sia $T\colon L^2([0,1] \to \mathbb{C}$ il funzionale lineare definito da
$$T(f) := \int_0^1 x f(x^3)\, \mathrm{d}x.$$
Verifica che T è continuo e determina la funzione $g \in L^2([0,1])$ che lo rappresenta, ovvero tale che $T(f) = \langle f, g\rangle_{L^2([0,1])}$.

Esercizio 4.3. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\phi \in H'$ un funzionale lineare continuo e non identicamente nullo. Dimostra che il complemento ortogonale del nucleo (nullità) di ϕ è un sottospazio di dimensione 1.

Esercizio 4.4. Sia H uno spazio di Hilbert. Utilizzando l'applicazione Φ definita in (1) determina una formula che descriva il legame tra il prodotto scalare di H e il prodotto scalare di H'.

Esercizio 4.5. Una conseguenza del teorema di rappresentazione di Riesz è che ogni spazio di Hilbert H è riflessivo. Sia H uno spazio di Hilbert. Dimostra che l'immersione $J\colon H \to H''$, definita da $J(v)(\phi) = \phi(v)$ per $v \in H$ e $\phi \in H'$, è una isometria suriettiva.

Esercizio 4.6. Per capire meglio l'esempio 1.8.

- Dimostra che la formula (2) definisce un prodotto scalare sullo spazio c delle successioni convergenti;
- Per ogni $k \in \mathbb{N}$, considera la successione $u_k = (u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \in c$ definita da $u_{k,n} = 0$ quando $n < k$ e $u_{k,n} = 1$ quando $n \geqslant k$; dimostra che la successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in c.
- Calcola il prodotto scalare $\langle u_k, e_j\rangle_c$ per $k, j \in \mathbb{N}$, dove e_j è la successione canonica con tutte le componenti nulle tranne la j-esima uguale a 1.
- Calcola i limiti $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_c$ e $\lim_{k\to\infty}\langle u_k, e_j\rangle$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.
- Dai risultati dei punti precedenti deduci che c con il prodotto scalare (2) non è completo facendo vedere che la successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ non può convergere a nessun elemento di c.

Esercizio 4.7. Considera lo spazio pre-hilbertiano $E := \big\{f \in C^1([0,1])\colon f(0) = 0\big\}$ dotato del prodotto scalare $\langle f, g\rangle_E := \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}\, \mathrm{d}t$. Dimostra che il funzionale $T(f) := f(1)$ è lineare e continuo su E, e che non esiste alcuna funzione $g \in E$ tale che $T(f) = \langle f, g\rangle_E$ per ogni $f \in E$.

Esercizio 4.8. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio di Hilbert H si dice che converge *debolmente* al punto $x_\star$ quando per ogni $v \in H$ si ha che
$$\lim_{n\to\infty} \langle x, v\rangle = \langle x_\star, v\rangle.$$
Dimostra che:

- Se (x_n) converge a $x_\star$ in norma, ovvero $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\star\| = 0$, allora (x_n) converge anche debolmente a $x_\star$;

- Se (x_n) converge debolmente a $x_\star$ ed inoltre $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_\star\|$ allora (x_n) converge a $x_\star$ in norma;
- Se H è uno spazio di dimensione infinita esiste sempre una successione (x_n) che converge debolmente ma non in norma.

4.2. **Derivate deboli.**

Esercizio 4.9. Calcola la derivata debole della funzione $f(t) = \sqrt{|t|}$.

Esercizio 4.10. Verifica che la funzione $f(t) = \mathrm{sgn}(t)$ non possiede derivata debole.

Esercizio 4.11. Modificando opportunamente la notazione ed aggiungendo eventuali passaggi, riscrivi le dimostrazioni delle proposizioni 2.5, 2.6 e 3.1 per il caso in dimensione $d = 2$.