

**ANALISI 3 - L11:**  
**PROIEZIONI ORTOGONALI**

1. ORTOGONALITÀ

Con il prodotto interno possiamo definire la relazione di ortogonalità tra vettori di uno spazio pre-hilbertiano.

**Definizione 1.1.** Dati due elementi  $a$  e  $b$  di uno spazio pre-hilbertiano  $E$ , diciamo che  $a$  è *ortogonale* a  $b$ , e scriviamo  $a \perp b$ , quando il loro prodotto interno è nullo:  $\langle a, b \rangle = 0$ . Se  $S$  è un sottoinsieme di  $E$  diciamo che  $a \perp S$  quando  $a \perp x$  per ogni  $x \in S$ . Se  $A$  e  $B$  sono due sottoinsiemi di  $E$  diciamo che  $A \perp B$  quando  $a \perp b$  per ogni  $a \in A$  e  $b \in B$ .

In particolare, negli spazi pre-hilbertiani vale il teorema di Pitagora, infatti usando l'identità

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a, b \rangle + \|b\|^2,$$

abbiamo che

$$(1) \quad a \perp b \implies \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

*Osservazione 1.2.* Attenzione: l'implicazione nel senso opposto vale solo nel caso reale e non nel caso complesso. Infatti se  $x$  è un elemento non nullo di uno spazio pre-hilbertiano complesso abbiamo

$$\|x + ix\|^2 = |1 + i|^2 \|x\|^2 = 2 \|x\|^2 = \|x\|^2 + \|ix\|^2,$$

ma  $x$  non è ortogonale a  $ix$ , in quanto  $\langle x, ix \rangle = -i \|x\|^2$ .

*Osservazione 1.3.* Per induzione, la relazione (1) si estende anche a qualsiasi famiglia finita di vettori mutualmente ortogonali. Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono vettori a due a due ortogonali allora vale

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

**Definizione 1.4.** Sia  $S$  un sottoinsieme di uno spazio pre-hilbertiano  $E$ . Definiamo *complemento ortogonale* di  $S$  in  $E$  l'insieme formato da tutti i vettori ortogonali ad  $S$ ,

$$S^\perp := \{x \in E : x \perp S\}.$$

**Proposizione 1.5.** *Il complemento ortogonale è sempre un sottospazio vettoriale chiuso.*

*Dimostrazione.* Vediamo che  $S^\perp$  è un sottospazio. Se  $x, y \in S^\perp$ ,  $k \in \mathbb{C}$  e  $a \in S$ , per la linearità del prodotto interno

$$\langle x + ky, a \rangle = \langle x, a \rangle + k\langle y, a \rangle = 0 + k0 = 0,$$

e quindi  $x + ky \in S^\perp$ .

Vediamo che  $S^\perp$  è chiuso. Sia  $(x_n)$  una successione di elementi  $x_n \in S^\perp$  che converge a  $x \in E$ . Per la continuità del prodotto interno abbiamo

$$\langle x, a \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, a \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

per ogni  $a \in S$ . Dunque  $x \in S^\perp$ . □

*Osservazione 1.6.* L'unico vettore ortogonale a se stesso è il vettore nullo,

$$x \perp x \iff \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Questo significa che per ogni sottospazio vettoriale  $V$  di uno spazio pre-hilbertiano si ha sempre che  $V \cap V^\perp = \{0\}$ .

Lasciamo come esercizio per il lettore la dimostrazione delle seguenti semplici, ma importanti proprietà del complemento ortogonale.

**Proposizione 1.7.** *Per i complementi ortogonali valgono le seguenti proprietà:*

- (1) *monotonia rispetto all'inclusione,*

$$A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp;$$

- (2) *il complemento ortogonale di un sottoinsieme  $S$  coincide con il complemento ortogonale della chiusura di  $S$ ,*

$$S^\perp = \overline{S}^\perp;$$

- (3) *il complemento ortogonale del complemento ortogonale di un sottoinsieme  $S$  è il più piccolo sottospazio chiuso che contiene  $S$ ,*

$$(S^\perp)^\perp = \overline{\text{span}(S)}.$$

**Esempio 1.8.** Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(\mathbb{R})$  formato dalle funzioni con simmetria pari,

$$V := \{G \in L^2(\mathbb{R}) : G(x) = G(-x) \text{ quasi ovunque}\}.$$

Determiniamo il complemento ortogonale di  $V$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Dati  $F \in L^2(\mathbb{R})$  e  $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , poniamo  $G(x) := g(-x)$  per  $x < 0$  e  $G(x) = g(x)$  per  $x > 0$ ; otteniamo così una funzione pari  $G \in V$ , e inoltre abbiamo

$$\begin{aligned} (2) \quad \langle F, G \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \overline{G(x)} \, dx = \\ &= \int_0^{+\infty} F(x) \overline{g(x)} \, dx + \int_{-\infty}^0 F(x) \overline{g(-x)} \, dx = \\ &= \int_0^{+\infty} F(x) \overline{g(x)} \, dx + \int_0^{+\infty} F(-x) \overline{g(x)} \, dx = \\ &= \int_0^{+\infty} (F(x) + F(-x)) \overline{g(x)} \, dx = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto  $f(x) := F(x) + F(-x)$  per ogni  $x > 0$ ; dunque

$$F \perp G \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \iff f \perp g \text{ in } L^2(\mathbb{R}_+).$$

Se  $F$  è ortogonale a  $V$ , allora  $F$  è ortogonale alla funzione  $G$  corrispondente a  $g$ ; scegliendo  $g = f$  per l'identità (2) otteniamo che  $f \perp f$  in  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , ma allora deve essere  $f = 0$ , ovvero  $F(x) + F(-x) = 0$  quasi ovunque, ovvero  $F$  è una funzione dispari.

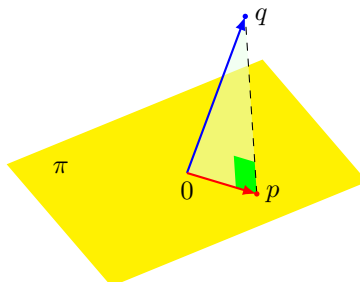
Viceversa, se  $F$  è dispari e  $G$  una funzione pari, per le corrispondenti funzioni su  $\mathbb{R}_+$  abbiamo che  $g$  è la restrizione di  $G$  a  $\mathbb{R}_+$  e  $f$  è la funzione nulla, dunque  $f \perp g$  su  $\mathbb{R}_+$ , e quindi per (2) risulta  $F \perp G$  su  $\mathbb{R}$ ; dunque  $F \in V^\perp$ .

Otteniamo così che l'ortogonale di  $V$  è l'insieme formato dalle funzioni con simmetria dispari,

$$V^\perp = \{F \in L^2 : F(x) = -F(-x) \text{ quasi ovunque}\}.$$

## 2. PROIEZIONI ORTOGONALI

Nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , dato un punto  $q$  e un piano  $\pi$ , il punto  $p$  di  $\pi$  più vicino al punto  $q$  si individua proiettando in modo ortogonale  $q$  su  $\pi$ , ovvero  $p$  è il punto di intersezione tra il piano  $\pi$  e la retta per  $q$  ortogonale a  $\pi$ , ovvero il vettore  $q - p$  è ortogonale a  $\pi$ .



La stessa cosa avviene in qualsiasi spazio pre-hilbertiano.

**Proposizione 2.1.** *Siano  $E$  uno spazio pre-hilbertiano,  $q$  un punto di  $E$ ,  $V$  un sottospazio di  $E$  e  $p$  un punto di  $V$ . Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(A) *Il punto  $p$  è un punto di  $V$  con minima distanza da  $q$ ,*

$$\|q - p\| = \inf_{x \in V} \|q - x\|.$$

(B) *Il vettore  $q - p$  è ortogonale a  $V$ ,*

$$q - p \perp x, \quad \forall x \in V.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che valga la condizione (B). Per ogni  $x \in V$  abbiamo che  $p - x \in V$  e dunque  $q - p \perp p - x$ , per il teorema di Pitagora (1) otteniamo che

$$\|q - x\|^2 = \|(q - p) + (p - x)\|^2 = \|q - p\|^2 + \|p - x\|^2 \geq \|q - p\|^2.$$

Dunque  $p$  è un punto di  $V$  con minima distanza da  $q$ .

Viceversa, supponiamo che valga la condizione (A). Per ogni  $x \in V$  e  $k \in \mathbb{C}$  abbiamo che  $p + kx \in V$ , dunque

$$\|q - p\|^2 \leq \|q - p - kx\|^2 = \|q - p\|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{k}\langle q - p, x \rangle) + |k|^2 \|x\|^2.$$

Scegliendo  $k = t\langle q - p, x \rangle$  con  $t \in \mathbb{R}$  la precedente disuguaglianza si riduce a

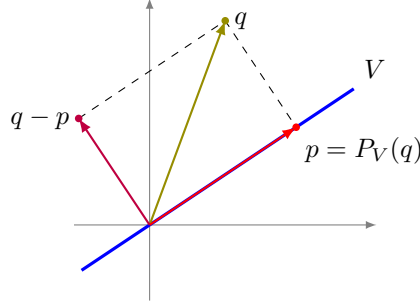
$$0 \leq |\langle q - p, x \rangle|^2 (-2t + \|x\|^2 t^2), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e siccome la quantità  $-2t + \|x\|^2 t^2$  assume segno negativo per piccoli valori positivi di  $t$ , allora dovremo necessariamente avere  $|\langle q - p, x \rangle| = 0$ , e dunque  $q - p \perp x$ . Quindi  $q - p$  è ortogonale ad ogni vettore di  $V$ .  $\square$

Nella precedente lezione avevamo visto che in un spazio di Hilbert per un sottoinsieme convesso e chiuso esiste sempre un unico punto di minima distanza da un punto fissato. Ogni sottospazio è sempre un insieme convesso, in quanto contiene ogni retta passante per due dei suoi punti. Quindi per ogni sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert esiste sempre un unico punto di minima distanza da un punto fissato, e per la proposizione precedente esso è caratterizzato dalla condizione di ortogonalità del vettore di proiezione. Otteniamo così il seguente risultato.

**Teorema 2.2** (Teorema della proiezione). *Sia  $V$  un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Hilbert  $H$ . Allora per ogni  $q \in H$  esiste un unico punto  $p \in V$  tale che  $q - p \perp V$ . Tale punto è caratterizzato dal fatto di essere il punto di  $V$  con distanza minima da  $q$ .*

*Osservazione 2.3.* Il teorema 2.2 rimane valido anche nel caso in cui  $V$  sia uno spazio di dimensione finita in uno spazio pre-hilbertiano. Infatti, l'ipotesi che serve per avere l'esistenza del punto di minima distanza è che  $V$  sia topologicamente completo. Un sottospazio di dimensione finita è sempre uno spazio completo.



**Definizione 2.4.** Dato un sottospazio topologicamente completo  $V$  di uno spazio di pre-hilbertiano  $E$ , definiamo *proiezione ortogonale* di  $E$  su  $V$ , l'applicazione  $P_V: E \rightarrow E$  che ad ogni  $q \in E$  associa l'unico punto  $p \in V$  tale che  $q - p \in V^\perp$ , ovvero l'unico punto di  $V$  con distanza minima da  $q$ .

*Osservazione 2.5.* Il teorema 2.2 ci dice che, per ogni sottospazio chiuso  $V$  di uno spazio di Hilbert  $H$ , la proiezione ortogonale  $P_V: H \rightarrow H$  è ben definita ed è univocamente determinata dalle condizioni:

- $P_V(x) \in V$ ;
- $x - P_V(x) \in V^\perp$ ;

per ogni  $x \in H$ .

**Proposizione 2.6.** Dato un sottospazio chiuso  $V$  di uno spazio di Hilbert  $H$ , la proiezione ortogonale  $P_V$  è lineare e continua.

*Dimostrazione.* Siano  $x$  e  $y$  due punti di  $H$  e sia  $k \in \mathbb{C}$ . Siccome  $P_V(x)$  e  $P_V(y)$  sono due punti del sottospazio  $V$  avremo che anche la combinazione  $P_V(x) + kP_V(y)$  è un punto di  $V$ . Inoltre siccome  $x - P_V(x)$  e  $y - P_V(y)$  sono due punti del sottospazio  $V^\perp$ , avremo che

$$(x + ky) - (P_V(x) + kP_V(y)) = (x - P_V(x)) + k(y - P_V(y)) \in V^\perp.$$

Per la caratterizzazione della proiezione ortogonale, il punto  $P_V(x) + kP_V(y)$  risulta essere la proiezione ortogonale di  $x + ky$  su  $V$ ,

$$P_V(x + ky) = P_V(x) + kP_V(y),$$

e ciò prova la linearità di  $P_V$ .

Siccome  $P_V(x) \in V$  e  $x - P_V(x) \in V^\perp$  sono vettori ortogonali, per il teorema di Pitagora abbiamo

$$\|x\|^2 = \|P_V(x) + (x - P_V(x))\|^2 = \|P_V(x)\|^2 + \|x - P_V(x)\|^2 \geq \|P_V(x)\|^2.$$

Dunque  $\|P_V(x)\| \leq \|x\|$  per ogni  $x \in H$ . Quindi  $P_V$  è un'applicazione continua con norma operatoriale  $\|P_V\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ .  $\square$

Grazie alle proiezioni ortogonali possiamo sempre decomporre uno spazio di Hilbert nella somma diretta di un suo sottospazio chiuso e il corrispondente complemento ortogonale.

**Corollario 2.7** (Decomposizione ortogonale). *Sia  $V$  un sottospazio vettoriale di uno spazio di Hilbert  $H$ . Allora  $H = \overline{V} \oplus V^\perp$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo far vedere che ogni elemento  $x$  di  $H$  si può decomporre in modo unico in una somma della forma  $x = v + w$ , con  $v \in \bar{V}$  e  $w \in V^\perp$ .

Per ogni  $x \in H$  possiamo scrivere  $x = P_{\bar{V}}(x) + (x - P_{\bar{V}}(x))$ , e per il teorema 2.2 abbiamo  $P_{\bar{V}}(x) \in \bar{V}$  e  $x - P_{\bar{V}}(x) \in \bar{V}^\perp = V^\perp$ .

Se ora,  $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$  con  $v_1, v_2 \in \bar{V}$  e  $w_1, w_2 \in V^\perp$  otteniamo che  $v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in \bar{V} \cap V^\perp = \{0\}$ , e dunque  $v_1 = v_2$  e  $w_1 = w_2$ .  $\square$

**Esempio 2.8.** Riprendiamo in considerazione il sottospazio  $V$  formato dalle funzioni pari in  $L^2(\mathbb{R})$ . Si tratta di un sottospazio chiuso, in quanto è la controimmagine del singoletto  $\{0\}$  della funzione continua (anzi lipschitziana!)  $\phi: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\phi(F) := \|F(x) - F(-x)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Abbiamo visto nell'esempio 1.8 che il complemento ortogonale  $V^\perp$  è il sottospazio formato dalle funzioni dispari. Ogni funzione può essere dunque decomposta nella somma di una funzione pari e di una funzione dispari: Se  $F \in L^2(\mathbb{R})$  e  $F = G + H$  con  $G$  pari e  $H$  dispari, allora dovrà essere,

$$F(x) = G(x) + H(x), \quad F(-x) = G(x) - H(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

da cui ricaviamo che

$$(3) \quad G(x) = \frac{1}{2}(F(x) + F(-x)), \quad H(x) = \frac{1}{2}(F(x) - F(-x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deduciamo così che la proiezione ortogonale di una funzione  $F$  su  $V$  è la funzione pari  $G$  definita in (3), dunque possiamo scrivere

$$P_V(F) = \frac{1}{2}(F + F_R),$$

dove con  $F_R$  indichiamo la rovesciata di  $F$ , ovvero  $F_R(x) = F(-x)$ .

*Osservazione 2.9.* Supponiamo che  $V$  sia un sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert  $H$ , e che  $B = \{v_1, \dots, v_d\}$  sia una base algebrica di  $V$ . Dato  $x \in H$ , la sua proiezione ortogonale su  $V$  sarà data da una combinazione lineare degli elementi di  $B$ ,

$$(4) \quad P_V(x) = \sum_{k=1}^d \lambda_k v_k.$$

La condizione di ortogonalità della proiezione ci dice che  $x - P_V(x)$  deve essere ortogonale a ciascun elemento di  $B$ . Dunque per ogni  $j = 1, \dots, d$  dobbiamo avere

$$(5) \quad 0 = \langle x - P_V(x), v_j \rangle = \langle x, v_j \rangle - \sum_{k=1}^d \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle.$$

Sia  $M$  la matrice quadrata  $d \times d$  le cui componenti sono date dai prodotti scalari  $M_{j,k} := \langle v_k, v_j \rangle$  con  $j, k = 1, \dots, d$ , sia  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)^t$  il vettore colonna formato dai coefficienti della combinazione lineare che determina la proiezione, e sia  $Y(x) = (\langle x, v_1 \rangle, \dots, \langle x, v_d \rangle)^t$  il vettore colonna formato dai prodotti scalari del punto  $x$  con gli elementi della base  $B$ . Le relazioni (5) possono essere riscritte sottoforma del sistema lineare

$$(6) \quad M\Lambda = Y(x).$$

Risolviendo il sistema otteniamo che i coefficienti che descrivono la proiezione ortogonale nella formula (4) sono dati da  $\Lambda = M^{-1}Y(x)$ . L'invertibilità della matrice  $M$  equivale al fatto che i vettori della base  $B$  sono linearmente indipendenti (lasciamo la verifica di ciò come esercizio).

**Esempio 2.10** (Retta dei minimi quadrati). Vogliamo determinare la retta che meglio approssima il grafico della funzione esponenziale  $y = e^{-x}$  quando  $x$  varia nell'intervallo  $[0, 1]$ , misurando la bontà dell'approssimazione con lo scarto quadratico, ovvero la norma  $L^2$ . Cerchiamo quindi la retta  $y = a + bx$  i cui coefficienti minimizzano il funzionale

$$(7) \quad F(a, b) := \int_0^1 |e^{-x} - (a + bx)|^2 dx = \|f - av_1 - bv_2\|_{L^2([0,1])}^2, \quad a, b, \in \mathbb{R},$$

dove  $v_1(x) = 1$  e  $v_2(x) = x$ . L'insieme delle rette (non verticali) possiamo identificarlo con il sottospazio bidimensionale  $V$  di  $L^2([0, 1])$  generato dalle funzioni  $v_1$  e  $v_2$ ,

$$V := \text{span} \{v_1, v_2\} = \{x \mapsto a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(Stiamo considerando funzioni a valori reali e quindi in questo caso lavoriamo con spazi vettoriali reali.) La retta cercata corrisponde alla funzione del tipo  $a + bx$  che in  $L^2([0, 1])$  è la più vicina alla funzione esponenziale  $f(x) := e^{-x}$ , ovvero

$$a + bx = P_V(f)(x),$$

dove  $P_V$  indica la proiezione ortogonale su  $V$  in  $L^2([0, 1])$ . Nella notazione dell'osservazione 2.9 abbiamo che determinare  $a$  e  $b$  equivale a risolvere il sistema lineare  $M\Lambda = Y(f)$  dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad Y(f) = \begin{pmatrix} \langle f, v_1 \rangle \\ \langle f, v_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i vari prodotti scalari,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \int_0^1 dx = 1, & \langle v_1, v_2 \rangle &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \\ \langle v_2, v_1 \rangle &= \langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}, & \langle v_2, v_2 \rangle &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \\ \langle f, v_1 \rangle &= \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}, & \langle f, v_2 \rangle &= \int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Si tratta dunque di risolvere il sistema lineare

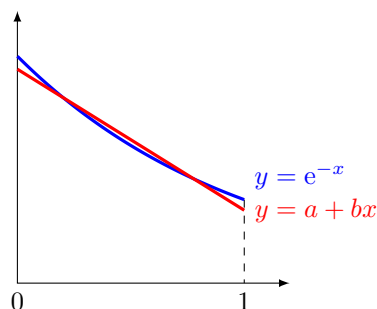
$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b = 1 - \frac{1}{e}, \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = 1 - \frac{2}{e}. \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$a = \frac{8}{e} - 2, \quad b = -\frac{18}{e} + 6.$$

La retta che rende minimo lo scarto quadratico con la funzione  $y = e^{-x}$  sull'intervallo  $[0, 1]$  è dunque la retta di equazione

$$y = \frac{8}{e} - 2 - 6\left(\frac{3}{e} - 1\right)x.$$



Avremmo potuto anche determinare la retta cercando il minimo del funzionale  $F$ , definito in (7), tra i suoi punti critici. Abbiamo infatti che le derivate parziali di  $F$  sono date da

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) &= -2 \int_0^1 (e^{-x} - (a + bx)) dx = -2(\langle f, v_1 \rangle - a\langle v_1, v_1 \rangle - b\langle v_2, v_1 \rangle), \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) &= -2 \int_0^1 (e^{-x} - (a + bx))x dx = -2(\langle f, v_2 \rangle - a\langle v_1, v_2 \rangle - b\langle v_2, v_2 \rangle),\end{aligned}$$

La condizione di annullamento del gradiente di  $F$  porta allo stesso sistema che abbiamo risolto per determinare la proiezione ortogonale. Osserviamo anche che la matrice Hessiana di  $F$  coincide con  $2M$ , che è una matrice definita positiva, e dunque il punto critico di  $F$  risulta essere effettivamente un minimo.

### 3. SISTEMI ORTONORMALI

*Osservazione 3.1.* Abbiamo visto che delle formule esplicite per calcolare la proiezione ortogonale su un sottospazio di dimensione finita di cui si conosca una base si ottengono risolvendo il sistema lineare (6). La soluzione di tale sistema risulta immediata quando la matrice  $M$  coincide con la matrice identità, ovvero quando per i vettori della base si ha  $\langle v_k, v_j \rangle = 0$  per  $k \neq j$  e  $\langle v_k, v_k \rangle = 1$ , ovvero quando i vettori sono a due a due ortogonali e hanno tutti norma 1.

**Definizione 3.2.** Un sottoinsieme  $S$  di uno spazio pre-hilbertiano  $E$  si dice che costituisce un *sistema ortonormale* se gli elementi di  $S$  hanno tutti norma unitaria e sono a due a due ortogonali, ovvero  $\langle a, a \rangle = 1$  per ogni  $a \in S$  e  $\langle a, b \rangle = 0$  per ogni  $a, b \in S$  con  $b \neq a$ .

**Lemma 3.3.** *I vettori di un sistema ortonormale sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Consideriamo un numero finito  $a_1, \dots, a_n$  di vettori di un sistema ortonormale. Supponiamo che una loro combinazione lineare  $\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$  abbia somma nulla, per certi scalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Per il teorema di Pitagora, dall'ortogonalità delle varie componenti avremo che

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\lambda_k a_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2.$$

Ma una somma di quantità non negative è nulla se e solo se tutti gli addendi sono nulli; dunque  $\lambda_k = 0$  per ogni  $k$ . Questo prova che i vettori  $a_k$  sono tra loro linearmente indipendenti.  $\square$

*Osservazione 3.4.* Se  $S = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$  è un sistema ortonormale finito nello spazio pre-hilbertiano  $E$ , lo spazio  $V = \text{span}(S)$  da esso generato è un sottospazio di dimensione finita, e quindi è completo. Dato un qualsiasi  $x \in E$ , per il teorema 2.2 (e per l'osservazione 2.3) esiste la proiezione ortogonale  $p = P_V(x)$  in  $V$ , con  $x - p$

ortogonale a  $V$ . Scriviamo  $p = \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k$  come combinazione lineare dei vettori di  $S$ , la condizione di ortogonalità ci dice che

$$0 = \langle x - p, h_k \rangle = \langle x, h_k \rangle - \sum_j \lambda_j \langle h_j, h_k \rangle = \langle x, h_k \rangle - \lambda_k.$$

in quanto  $\langle h_j, h_k \rangle$  è 0 se  $j \neq k$  ed è 1 se  $j = k$ . Quindi  $\lambda_k = \langle x, h_k \rangle$ . Otteniamo così la formula esplicita per la proiezione:

$$(8) \quad P_V(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, h_k \rangle h_k.$$

**Proposizione 3.5** (Disuguaglianza di Bessel, caso finito). *Se  $S = \{h_1, \dots, h_n\}$  è un sistema ortonormale finito in uno spazio pre-hilbertiano  $E$ , allora per ogni  $x \in E$  abbiamo*

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n |\langle x, h_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Dimostrazione.* Sia  $p := \sum_{k=1}^n \langle x, h_k \rangle h_k$  la proiezione ortogonale di  $x$  su  $\text{span}(S)$ . Siccome  $x = (x - p) + p$  e  $x - p \perp p$ , per il teorema di Pitagora abbiamo

$$\|x\|^2 = \|x - p\|^2 + \|p\|^2 \geq \|p\|^2.$$

Per il fatto che  $S$  è un sistema ortonormale abbiamo che i vettori  $\langle x, h_k \rangle h_k$  sono a due a due ortogonali, quindi per il teorema di Pitagora abbiamo che

$$\|p\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\langle x, h_k \rangle h_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, h_k \rangle|^2.$$

□

#### 4. ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

I sistemi ortonormali hanno il grosso pregio di permetterci di ricavare facilmente formule per calcolare proiezioni ortogonali (vedi la formula (8)). Esiste un procedimento che permette di trasformare una qualsiasi sequenza finita (o numerabile) di vettori linearmente indipendenti in una sequenza di vettori ortonormali, che generano le stesse famiglie di sottospazi.

Consideriamo una sequenza  $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$  (finita o numerabile, non importa) di vettori linearmente indipendenti in uno spazio pre-Hilbertiano  $E$ . Essi generano una sequenza di sottospazi di dimensione finita:

$$V_n := \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_n\};$$

abbiamo che  $V_n \subset V_{n+1}$  e che  $v_{n+1} \notin V_n$ . Sia inoltre  $P_n := P_{V_n}$  la proiezione ortogonale di  $E$  sul sottospazio  $V_n$ ; abbiamo che  $v_{n+1} \neq P_n(v_{n+1})$ .

Poniamo  $w_1 := v_1 \in V_1$  e per ogni  $n$

$$w_{n+1} := v_{n+1} - P_n(v_{n+1}) \in V_{n+1}.$$

Per il teorema della proiezione, abbiamo che  $w_{n+1} \perp V_n$ . Otteniamo così una sequenza di vettori ortogonali ( $w_k$ ) che generano la stessa sequenza di spazi della sequenza ( $v_k$ ), ovvero  $\text{span} \{w_1, w_2, \dots, w_n\} = V_n$ . Possiamo poi normalizzare i vettori ponendo  $u_k := \frac{w_k}{\|w_k\|}$ . Otteniamo così un sistema ortonormale ( $u_k$ ) con la proprietà che

$$(10) \quad \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ per ogni } n.$$



Il primo vettore è dato dunque da  $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ ; mentre i successivi, utilizzando la formula (8) per scrivere la proiezione, sono calcolati iterativamente tramite la formula:

$$u_{n+1} = \frac{w}{\|w\|}, \text{ dove } w := v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle v_{n+1}, u_k \rangle u_k.$$

Tale sistema ortonormale è univocamente determinato dalla proprietà (10) insieme alla condizione  $\langle u_k, v_k \rangle > 0$  (necessaria se vogliamo evitare ambiguità nella scelta del verso degli  $u_k$ ).

Il metodo appena descritto che produce il sistema ortonormale  $(u_k)$  a partire dal sistema di vettori indipendenti  $(v_k)$  si chiama *procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*.

**Esempio 4.1** (Polinomi di Legendre). Se applichiamo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla sequenza dei monomi  $x^k$ , per  $k \in \mathbb{N}_0$ , nello spazio di Hilbert  $L^2([-1, 1])$  con prodotto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx,$$

otteniamo un sistema ortonormale formato dai multipli normalizzati dei *polinomi di Legendre*, i quali sono definiti da

$$P_k(x) := \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

Infatti, si verifica facilmente che  $P_k$  è un polinomio di grado  $k$ . Inoltre, se  $j > k$  abbiamo che  $P_j \perp P_k$ , in quanto integrando per parti  $j$  volte otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_j(x) P_k(x) dx &= \frac{1}{2^j j!} \frac{1}{2^k k!} \int_{-1}^1 \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k dx = \\ &= \frac{1}{2^j j!} \frac{1}{2^k k!} (-1)^j \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^j \frac{d^{k+j}}{dx^{k+j}} (x^2 - 1)^k dx = 0, \end{aligned}$$

essendo  $k + j$  maggiore del grado del polinomio  $(x^2 - 1)^k$ . Dunque l'insieme dei polinomi  $P_0, P_1, \dots, P_n$  forma una base ortogonale dello spazio dei polinomi di grado minore o uguale a  $n$ .

**Esempio 4.2** (Polinomi di Hermite). Consideriamo lo spazio di Hilbert  $L^2(e^{-x^2} dx)$  delle funzioni definite su  $\mathbb{R}$  che hanno norma finita rispetto alla norma indotta dal prodotto interno definito da

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx.$$

Se applichiamo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla sequenza dei monomi  $x^k$ , per  $k \in \mathbb{N}_0$ , otteniamo un sistema ortonormale formato dai multipli normalizzati dei *polinomi di Hermite*, i quali sono definiti da

$$H_k(x) := (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}.$$

Infatti, si verifica facilmente che  $H_k$  è un polinomio di grado  $k$ . Inoltre, se  $j > k$  abbiamo che  $H_j \perp H_k$ , in quanto integrando per parti  $j$  volte otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_j(x) H_k(x) e^{-x^2} dx &= (-1)^j \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d^j}{dx^j} e^{-x^2} \right) H_k(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^j}{dx^j} H_k(x) dx = 0, \end{aligned}$$

essendo  $j$  maggiore del grado del polinomio  $H_k$ . Dunque l'insieme  $H_0, H_1, \dots, H_n$  forma una base ortogonale dello spazio dei polinomi di grado minore o uguale a  $n$ .

## 5. ESERCIZI

### 5.1. Ortogonalità.

*Esercizio 5.1.* Dimostra le proprietà del complemento ortogonale enunciate nella proposizione 1.7

*Esercizio 5.2.* Siano  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi di uno spazio pre-hilbertiano. Determina le relazioni che intercorrono tra i complementi ortogonali  $(A \cap B)^\perp$ ,  $(A \cup B)^\perp$  e i complementi ortogonali  $A^\perp$ ,  $B^\perp$

*Esercizio 5.3.* Determina esplicitamente i complementi ortogonali dei seguenti sottoinsiemi di  $\ell^2$ :

- $A := \{x \in c_{00} : x_{2k} = 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}\}$ ;
- $B := \{e_{2k} - e_{2k-1} : k \in \mathbb{N}\}$ , dove  $e_k$  è il  $k$ -esimo vettore della "base canonica" di  $\ell^2$ ;
- $C := \{x \in c_{00} : \sum_n x_n = 0\}$ .

(Con  $c_{00}$  indichiamo lo spazio delle successioni che possiedono solo un numero finito di termini non nulli.)

### 5.2. Proiezioni ortogonali.

*Esercizio 5.4.* Sia  $V$  un sottospazio chiuso non triviale dello spazio di Hilbert  $H$ . Verifica che  $P_V P_V = P_V$ , che il nucleo (nullità) di  $P_V$  è  $\ker P_V = V^\perp$  e che  $\|P_V\| = 1$ .

*Esercizio 5.5.* Dimostra che un sottospazio vettoriale  $V$  di uno spazio di Hilbert è denso se e solo se  $V^\perp = \{0\}$ . [Prova ad utilizzare la decomposizione ortogonale di  $H$ .]

*Esercizio 5.6.* Per ciascuno dei seguenti sottospazi di  $\ell^2$ ,

$$\begin{aligned} V &:= \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : x_1 = 2x_2 - x_3\}, \\ V &:= \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : x_1 = 2x_2 - x_3, x_1 - 2x_3 = 0\}, \\ V &:= \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : x_{2k-1} = x_{2k}, \forall k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

rispondi alle seguenti richieste:

- Dimostra che  $V$  è un sottospazio chiuso di  $\ell^2$ .
- Determina esplicitamente il complemento ortogonale di  $V$  in  $\ell^2$ .
- Calcola la proiezione ortogonale di  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  su  $V$ .
- Calcola la distanza di  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  da  $V$ .
- Determina delle formule esplicite per calcolare  $P_V(x)$  per ogni  $x \in \ell^2$ .

*Esercizio 5.7.* Considera il sottospazio  $V$  di  $L^2([-1, 1])$  formato dai polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due. Sia  $f(x) = 1 + x^3$ . Considera il funzionale  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definito da

$$F(a, b, c) := \int_{-1}^1 |f(x) - (a + bx + cx^2)|^2 dx.$$

Abbiamo che

$$m := \min_{p \in V} \|f - p\|_{L^2}^2 = \min_{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3} F(a, b, c).$$

- Determina il valore del minimo  $m$  studiando i punti critici del funzionale  $F$  su  $\mathbb{R}^3$ .
- Determina il valore del minimo  $m$  studiando la proiezione ortogonale di  $f$  su  $V$ .

*Esercizio 5.8.* Siano  $v_1, v_2, \dots, v_d$  dei vettori di uno spazio pre-hilbertiano e sia  $M = (M_{j,k})$  la matrice quadrata i cui elementi sono dati dai prodotti scalari  $M_{j,k} := \langle v_k, v_j \rangle$ , con  $j, k = 1, \dots, d$ . Dimostra che la matrice  $M$  è invertibile se e solo i vettori  $v_k$  sono linearmente indipendenti.

*Esercizio 5.9.* Calcola la proiezione ortogonale di  $f(x) = e^x$  sul sottospazio  $V$  generato dalle funzioni  $g_1(x) = 1$ ,  $g_2(x) = \cos(x)$ ,  $g_3(x) = \sin(x)$  in  $L^2([-\pi, \pi])$ . [Per il calcolo dei vari integrali e per la risoluzione di eventuali sistemi lineari puoi farti aiutare da qualche strumento di calcolo digitale.]

### 5.3. Sistemi ortonormali.

*Esercizio 5.10.* Dati due sistemi ortonormali  $S_1$  e  $S_2$ , la loro intersezione è sempre un sistema ortonormale, cosa puoi dire invece della loro unione?

*Esercizio 5.11.* Sia  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di sistemi ortonormali crescente, ovvero con  $S_n \subseteq S_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Dimostra che allora anche  $S := \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  è un sistema ortonormale.

*Esercizio 5.12.* Considera il sottospazio  $V$  di  $\ell^2$  formato dalle successioni  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di  $c_{00}$  tali che  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$ . Determina un sistema ortonormale  $S$  tale che  $V = \text{span}(S)$ .

### 5.4. Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

*Esercizio 5.13.* Applica il procedimento di ortonormalizzazione per ottenere un sistema ortonormale in  $L^2([-1, 1])$  a partire dai monomi

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x, \quad q_2(x) = x^2, \quad q_3(x) = x^3,$$

e verifica che si ottengono dei polinomi

$$p_0(x), \quad p_1(x), \quad p_2(x), \quad p_3(x),$$

che sono dei multipli dei polinomi di Legendre.

*Esercizio 5.14.* Applica il procedimento di ortonormalizzazione per ottenere un sistema ortonormale in  $L^2(e^{-x^2} dx)$  a partire dai monomi

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x, \quad q_2(x) = x^2, \quad q_3(x) = x^3,$$

e verifica che si ottengono dei polinomi

$$p_0(x), \quad p_1(x), \quad p_2(x), \quad p_3(x),$$

che sono dei multipli dei polinomi di Hermite.