ANALISI 3 - L10: PRODOTTO SCALARE

Sappiamo che il prodotto scalare di due vettori di $\mathbb{R}^d$, definito da

$$x{\cdot}y := \sum_{k=1}^{d} x_k y_k, \quad x = (x_1, \dots, x_d),\ y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d,$$

determina la struttura euclidea dello spazio vettoriale; infatti tramite il prodotto scalare è possibile misurare le lunghezze dei vettori, le distanze tra punti e gli angoli formati da due vettori: se $u, v \in \mathbb{R}^d$ sono due vettori non nulli e θ è l'angolo formato dai due vettori abbiamo

$$\|u\| = \sqrt{u{\cdot}u}, \quad \|v\| = \sqrt{v{\cdot}v}, \quad \operatorname{dist}(u,v) = \sqrt{(u-v){\cdot}(u-v)}, \quad \cos\theta = \frac{u{\cdot}v}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Inoltre, tramite il prodotto scalare è possibile definire la nozione di ortogonalità,

$$x \perp y \iff x{\cdot}y = 0.$$

Possiamo dire che è grazie al prodotto scalare e alle sue proprietà che è possibile "fare della geometria" su $\mathbb{R}^d$. Analizziamo in astratto quali sono le proprietà fondamentali di questo prodotto per poterle utilizzare per studiare la geometria anche di altri spazi vettoriali.

1. Prodotti interni

Definizione 1.1. Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Un *prodotto interno*, detto anche *prodotto scalare*, su E è un'applicazione $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E \times E \to \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti condizioni per ogni $a, b, c \in E$ e $k \in \mathbb{C}$:

(i) $\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle}$;
(ii) $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$;
(iii) $\langle ka, b\rangle = k\langle a, b\rangle$;
(iv) $\langle a, a\rangle \geqslant 0$;
(v) $\langle a, a\rangle = 0$ se e solo se $a = 0$.

Lo spazio E dotato di un prodotto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ si dice *pre-hilbertiano*.

Osservazione 1.2. Le condizioni (ii), (iii) ci dicono che rispetto al primo argomento il prodotto interno è lineare, mentre combinate con (i) implicano che rispetto al secondo argomento è antilineare, ovvero

(ii') $\langle a, b + c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle$;
(iii') $\langle a, kb\rangle = \overline{k}\langle a, b\rangle$.

Osservazione 1.3. Le condizioni (i), (ii) e (iii) dicono che il prodotto interno è una *forma hermitiana* su E, la (iv) dice che tale forma è (semi)definita positiva, la (v) dice che è non degenere.

Osservazione 1.4. Anche nel caso di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, possiamo dare la nozione di prodotto interno nello stesso modo, con l'unica differenza che il prodotto interno avrà valori reali e la condizione (i) si semplifica in

(i') $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$;

ovvero $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è una forma *simmetrica*, positiva non degenere.

Date: ultimo aggiornamento, 3 gennaio 2022.

Esempio 1.5. Diamo alcuni esempi di prodotti interni:

- sullo spazio di dimensione finita $\mathbb{C}^d$ abbiamo il prodotto scalare
$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}^d} := \sum_{k=1}^{d} z_k \overline{w_k};$$
- sullo spazio di dimensione infinita ℓ^2 abbiamo il prodotto scalare
$$\langle z, w\rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{w_k};$$
- sullo spazio di funzioni $L^2(\Omega)$ abbiamo il prodotto scalare
$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

La verifica delle proprietà di prodotto interno in questi casi è abbastanza semplice e la lasciamo come esercizio al lettore.

Una delle proprietà fondamentale di ogni prodotto interno è quella di verificare la cosidetta disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Teorema 1.6 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto che verifica le ipotesi (i), (ii), (iii) e (iv) della definizione 1.1, allora per ogni $x, y \in E$ si ha*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{1}$$

Dimostrazione. Poniamo $A := \langle x, x\rangle$, $b := \langle x, y\rangle$, $B = |b|$, $C = \langle y, y\rangle$. Se $B = 0$ la disuguaglianza (1) è triviale. Se $B \neq 0$ allora poniamo $k := tb/B$, con $t \in \mathbb{R}$. Usando il fatto che $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è una forma hermitiana (semi)definita positiva abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle x + ky, x + ky\rangle = \langle x, x\rangle + \langle ky, x\rangle + \langle x, ky\rangle + \langle ky, ky\rangle = \\ = A + k\bar{b} + \bar{k}b + |k|^2 C. \end{aligned}$$

Osserviamo che $k\bar{b} = \bar{k}b = tB$ e $|k|^2 = t^2$. Otteniamo che $A + 2Bt + Ct^2 \geqslant 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il discriminante del polinomio di secondo grado deve essere non positivo, ovvero $B^2 - AC \leqslant 0$, il che equivale proprio a (1). $\square$

La nozione di prodotto interno generalizza il concetto di prodotto scalare per gli spazi euclidei. Analogamente al caso di dimensione finita, con il prodotto interno possiamo definire una norma ponendo

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}. \tag{2}$$

Infatti vale la disuguaglianza triangolare.

Proposizione 1.7. *Per ogni $x, y \in E$ si ha*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{3}$$

Dimostrazione. Usando la definizione della norma e le proprietà di linearità del prodotto interno,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (1) abbiamo

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leqslant |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Dunque

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,$$

da cui segue (3). □

Si verifica poi facilmente che la norma (2) verifica anche tutte le altre proprietà richieste ad una norma. Abbiamo così che ogni spazio pre-hilbertiano è dunque in modo naturale anche uno spazio normato grazie alla norma indotta dal prodotto interno.

Definizione 1.8. Chiamiamo *spazio di Hilbert* ogni uno spazio vettoriale dotato di un prodotto interno e che sia **completo** rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

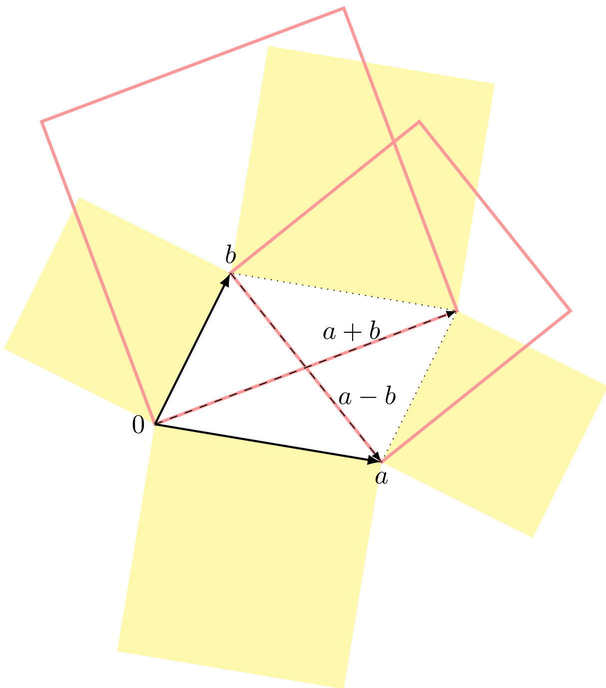
Gli spazi di Hilbert sono dunque casi particolari di spazi di Banach. Ad esempio $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{C}^d$ con le norme euclidee sono spazi di Hilbert di dimensione finita. Mentre ℓ^2 e $L^2(\Omega)$ sono esempi di spazi di Hilbert di dimensione infinita.

2. Identità del parallelogramma

Proposizione 2.1 (Identità del parallelogramma)**.** *In uno spazio pre-hilbertiano, dotato della norma indotta dal prodotto interno, per ogni coppia di vettori a, b si ha*

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 . \tag{5}$$

Quello che ci dice l'identità (5) è che in un parallelogramma la somma delle aree dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma delle aree dei quadrati dei quattro lati.



Dimostrazione. Ripetendo i conti fatti in (4) abbiamo

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle a, b\rangle + \|b\|^2 ,$$
$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle a, b\rangle + \|b\|^2 .$$

Sommando le due righe si ottiene l'identità cercata. □

L'identità del parallelogramma è la cartina di tornasole per verificare se in uno spazio normato la norma è compatibile con un prodotto interno, ovvero se la struttura metrica dello spazio è di tipo euclideo.

Esempio 2.2. Consideriamo gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ al variare di $p \in [1, \infty]$. È possibile dotarli di un prodotto interno la cui corrispondente norma coincida con la norma L^p? Proviamo a testare la validità dell'identità del parallelogramma. Siano $f = \chi_{[0,1]}$ e $g = \chi_{[1,2]}$, Abbiamo $|f + g| = |f - g| = \chi_{[0,2]}$ e dunque

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1, \quad \|f + g\|_p = \|f - g\|_p = 2^{1/p}.$$

Se vale l'identità allora deve essere $(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2$, ovvero $2 \cdot 2^{2/p} = 4$, che implica $p = 2$. Questo significa che quando $p \neq 2$ lo spazio L^p non è pre-hilbertiano. Nel caso $p = 2$ invece abbiamo una struttura euclidea, in quanto la norma L^2 è la norma indotta dal prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int f\,\overline{g}$.

Osservazione 2.3. Nel caso di uno spazio pre-hilbertiano reale abbiamo

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

e se invece di sommare facciamo la differenza otteniamo

$$4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2. \tag{6}$$

Tale formula, detta di *polarizzazione*, ci permette di esprimere il prodotto interno usando solo la norma.

Osservazione 2.4. Nel caso di uno spazio pre-hilbertiano complesso abbiamo

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \\ \|x + \mathrm{i}y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Im}\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \\ \|x - \mathrm{i}y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Im}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Combinando insieme queste identità otteniamo la formula di polarizzazione nel caso complesso data da

$$4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x + \mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x - \mathrm{i}y\|^2. \tag{7}$$

L'identità del parallelogrammo caratterizza gli spazi normati che possiedono una struttura pre-hilbertiana.

Teorema 2.5. *Se su uno spazio **normato** vale l'identità del parallelogramma* (5)*, allora le formule* (6)*, nel caso reale, e* (7)*, nel caso complesso, definiscono un prodotto interno compatibile con la norma.*

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso di uno spazio normato reale (il caso complesso si ottiene in modo analogo e lasciamo i dettagli come esercizio per il lettore).

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale, usiamo la formula (6) per definire un'operazione da $V \times V$ a valori in $\mathbb{R}$ ponendo

$$\langle x, y\rangle_V = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2. \tag{8}$$

La proprietà di simmetria, $\langle x, y\rangle_V = \langle y, x\rangle_V$, segue dal fatto che $x - y$ e $y - x$ hanno la stessa norma. Anche la proprietà di positività è immediata

$$\langle x, x\rangle_V = \frac{1}{4}\|2x\|^2 - \frac{1}{4}\|0\|^2 = \|x\|^2 \geqslant 0,$$

ed inoltre se $\langle x,x\rangle_V = 0$ allora $\|x\|^2 = 0$ e dunque $x = 0$.

Ricavare le proprietà di linearità invece non è immediato; il motivo della difficoltà sta nel fatto che la definizione di $\langle\cdot,\cdot\rangle_v$ è basata su una combinazione di quantità quadratiche e non lineari, sarà l'identità del parallelogrammo l'ingrediente chiave che ci permetterà di recuperare la linearità. Cominciamo con l'osservare che, grazie all'identità del parallelogramma,

$$\begin{aligned}\langle 2x,y\rangle_V &= \frac{1}{4}\|x+(x+y)\|^2 - \frac{1}{4}\|x+(x-y)\|^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left(2\|x\|^2 + 2\|x+y\|^2 - \|y\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(2\|x\|^2 + 2\|x-y\|^2 - \|y\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2 = 2\langle x,y\rangle_V .\end{aligned}$$

Grazie a questa nuova identità otteniamo

$$\begin{aligned}\langle x+y,4z\rangle_V &= 2\langle x+y,2z\rangle_V = \frac{1}{2}\|x+y+2z\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y-2z\|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\big\|(x+z)+(y+z)\big\|^2 - \frac{1}{2}\big\|(x-z)+(y-z)\big\|^2 = \\ &= \left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2\right) - \left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2\right) = \\ &= \left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) = \\ &= 4\langle x,z\rangle_V + 4\langle y,z\rangle_V = 2\langle x,2z\rangle_V + 2\langle y,2z\rangle_V = \langle x,4z\rangle_V + \langle y,4z\rangle_V .\end{aligned}$$

Sostituendo $z/4$ a z otteniamo che

$$\langle x+y,z\rangle_V = \langle x,z\rangle_V + \langle y,z\rangle_V . \tag{9}$$

Grazie a quest'ultima proprietà, per induzione si dimostra che $\langle nx,y\rangle_V = n\langle x,y\rangle_V$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Sostituendo x/n a x otteniamo anche $\langle \frac{1}{n}x,y\rangle_V = \frac{1}{n}\langle x,y\rangle_V$. Inoltre, siccome dalla definizione (8) abbiamo che $\langle 0,y\rangle = 0$, da (9) segue anche che

$$0 = \langle(-x)+x,y\rangle = \langle -x,y\rangle + \langle x,y\rangle$$

e dunque $\langle(-1)x,y\rangle_V = (-1)\langle x,y\rangle_V$. Combinando tutte queste cose ricaviamo che

$$\langle \frac{k}{n}x,y\rangle_V = \frac{k}{n}\langle x,y\rangle_V$$

per ogni numero razionale $\frac{k}{n}\in\mathbb{Q}$. Per passare a coefficienti reali, osserviamo che, per ogni $x,y\in V$, la funzione $\lambda\mapsto\|\lambda x+y\|^2$ è sempre una funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, infatti

$$\begin{aligned}\Big|\|\lambda x+y\|^2 - \|\mu x+y\|^2\Big| &= \Big(\|\lambda x+y\| + \|\mu x+y\|\Big)\Big|\|\lambda x+y\| - \|\mu x+y\|\Big| \leqslant \\ &\leqslant \Big((|\lambda|+|\mu|)\|x\| + 2\|y\|\Big)|\lambda-\mu|\,\|x\| .\end{aligned}$$

Ne segue che anche la funzione $\lambda\mapsto\langle\lambda x,y\rangle_V$ è continua e quindi l'identità

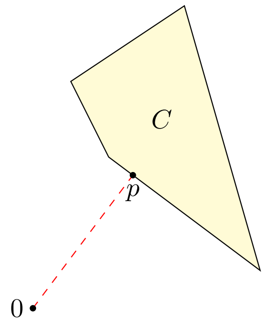
$$\langle\lambda x,y\rangle_V = \lambda\langle x,y\rangle_V$$

che abbiamo dimostrato valere su $\mathbb{Q}$ si estende per continuità a tutto $\mathbb{R}$. □

3. Teorema del punto di minima distanza

Teorema 3.1. *Sia C è un sottoinsieme non vuoto, convesso, topologicamente completo di uno spazio di pre-hilbertiano, allora esiste un unico elemento $p\in C$ con norma minima, ovvero tale che*

$$\|p\| = \operatorname{dist}(C,0) := \inf_{x\in C}\|x\| .$$



Dimostrazione. Sia $d := \operatorname{dist}(C, 0)$. Se $x, y \in C$ per la convessità anche $(x+y)/2 \in C$, e per l'identità del parallelogramma abbiamo

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leqslant 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4d^2. \tag{10}$$

In particolare, ciò ci garantisce l'unicità del punto con norma minima: infatti se $\|x\| = \|y\| = d$ allora dalla (10) segue che $\|x-y\| = 0$. Inoltre, per la definizione di estremo inferiore esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di C tale che $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = d$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_n\|^2 < d^2 + \varepsilon^2/4$$

per ogni $n \geqslant N$. Applichiamo (10) con $x = x_n$, $y = x_m$ e con $n, m \geqslant N$ e otteniamo

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2 < \varepsilon^2.$$

Ne segue che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e dunque, per la completezza di C, è convergente ad un punto $p = \lim_{n\to\infty} x_n \in C$. Per la continuità della norma abbiamo che $\|p\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = d$. □

Osservazione 3.2. Senza l'ipotesi di convessità su C non è garantita ne unicità ne esistenza del punto di minima norma. Consideriamo ad esempio l'insieme $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ in ℓ^2 formato dalle successioni $e_n = (e_{n,k})$ dove $e_{n,k} = 0$ se $k \neq n$ e $e_{n,n} = 1$; essendo formato da tutti punti isolati, si tratta di un insieme chiuso e completo, e siccome tutti i suoi punti stanno sulla sfera unitaria ogni suo punto è punto di minima norma. Invece, l'insieme $\{(1 + 1/n)e_n : n \in \mathbb{N}\}$ è anch'esso chiuso e completo in ℓ^2, ma non possiede alcun punto di minima norma.

Osservazione 3.3. Le ipotesi di convessità e completezza del sottoinsieme C richieste dal teorema 3.1 sono garantite ad esempio nel caso in cui C sia un sottospazio di dimensione finita, oppure nel caso in cui C sia un convesso compatto.

In uno spazio metrico completo ogni sottoinsieme chiuso è automaticamente completo. Questo ci permette di riformulare il teorema 3.1 nel caso di spazi di Hilbert nel seguente modo

Teorema 3.4. *Se C è un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di uno spazio di Hilbert allora esiste un unico elemento $p \in C$ con norma minima, ovvero tale che*

$$\|p\| = \operatorname{dist}(C, 0) := \inf_{x\in C}\|x\|.$$

Operando una semplice traslazione il teorema 3.4 ci garantisce l'esistenza e unicità del punto di minima distanza di un convesso chiuso rispetto ad un qualsiasi punto dello spazio di Hilbert.

Proposizione 3.5. *Sia H uno spazio di Hilbert. Sia C è un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di H e sia q un punto di H. Allora esiste un unico elemento $p \in C$ con distanza minima da q, ovvero tale che*

$$\|p - q\| = \operatorname{dist}(C, q) := \inf_{x \in C} \|x - q\| .$$

4. Esercizi

4.1. Prodotti interni.

Esercizio 4.1. Verifica che i prodotti scalari definiti nell'esempio 1.5 sono effettivamente dei prodotti interni sui relativi spazi.

Esercizio 4.2. Sia $M = (m_{jk})$ una matrice $d \times d$ a valori reali. Determina sotto quali condizioni su M si ha che

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j,k=1,\dots,n} m_{jk} x_j y_k = x^t M y$$

definisce un prodotto interno su $\mathbb{R}^d$.

Esercizio 4.3. Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e siano e^k, con $k = 1, \dots, d$, i vettori di una sua base. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto interno su E. Verifica che allora

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j,k=1}^{d} m_{jk} x_j y_k,$$

dove $m_{jk} := \langle e^j, e^k \rangle$, $x_j := \langle x, e^j \rangle$, $y_k := \langle y, e^k \rangle$. Verifica inoltre che la matrice $M = (m_{jk})$ è simmetrica e definita positiva.

Esercizio 4.4. Verifica che se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto interno allora si ha uguaglianza in (1) se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Esercizio 4.5. Verifica che la norma definita in (2) possiede effettivamente tutte le caratteristiche per essere una norma.

Esercizio 4.6 (Continuità del prodotto interno). Sia E uno spazio pre-hilbertiano normato con la norma indotta dal prodotto interno. Dimostra che $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ è una applicazione continua da $E \times E \to \mathbb{C}$ facendo vedere che se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ in E allora $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$ in $\mathbb{C}$.

Esercizio 4.7. Siano a, b, c tre punti di uno spazio pre-hilbertiano. Dimostra che vale la disuguaglianza

$$\|a\| \, \|b - c\| \leqslant \|b\| \, \|a - c\| + \|c\| \, \|a - b\| .$$

(Suggerimento: applica la disuguaglianza triangolare ai valori di $f(x) = x / \|x\|^2$ definita per $x \neq 0$, e prova a semplificare l'espressione $\|f(x) - f(y)\|^2$.) In quali casi si ha uguaglianza?

Esercizio 4.8. Sia $X := \{ f \in C^1[0,1] \colon f(0) = 0 \}$. Verifica che

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f'(t) \overline{g'(t)} \, \mathrm{d}t$$

definisce un prodotto interno su X. Fai vedere che X con tale prodotto interno non è uno spazio di Hilbert, ovvero che non è completo rispetto alla norma

$$\|f\|_X := \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2} .$$

Usando le proprietà di continuità del prodotto interno possiamo completare ogni spazio pre-hilbertiano rispetto alla norma indotta dal prodotto interno ottendo uno spazio di Hilbert.

Esercizio 4.9. Sia $(H, \|\cdot\|_H)$ uno spazio di Banach e sia E un suo sottospazio denso dotato di un prodotto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ compatibile con la norma, nel senso che $\|x\|_H^2 = \langle x, x\rangle_E$, per ogni $x \in E$. Dimostra che ponendo

$$\langle x, y\rangle_H := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle_E,$$

dove $(x_n)_{n\to\mathbb{N}}$ è una successione di punti di E convergente a x e $(y_n)_{n\to\mathbb{N}}$ è una successione di punti di E convergente a y, si definisce su H un prodotto interno che lo rende uno spazio di Hilbert.

Esercizio 4.10. Considera lo spazio di funzioni

$$H := \left\{f\colon [0,1] \to \mathbb{C}\colon f \text{ misurabile}, xf(x) \in L^2(0,1)\right\},$$

dotato della norma $\|f\|_H := \left(\int_0^1 x^2 \,|f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$.

- Fai un esempio esplicito di una funzione $f \in H \setminus L^2$.
- Definisci su H un prodotto interno compatibile con la sua norma e verifica che H è uno spazio di Hilbert.
- Considera l'operatore lineare $J\colon L^2 \to H$ definito da $J(f) = f$; mostra che J è continuo e calcola la sua norma operatoriale.

4.2. **Identità del parallelogramma.**

Esercizio 4.11. Dimostra che le norme di ℓ^p sono indotte da un prodotto interno se e solo se $p = 2$.

Esercizio 4.12. Verifica che nel caso di uno spazio pre-Hilbertiano reale vale anche la formula di polarizzazione data da

$$2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Esercizio 4.13. Dimostra il teorema 2.5 nel caso di uno spazio normato complesso.

Definizione 4.14. Uno spazio normato V si dice *uniformemente convesso* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in V$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ si ha $\|(x+y)/2\| \leqslant 1 - \delta$.

Esercizio 4.15. Dimostra che ogni spazio pre-hilbertiano è uniformemente convesso.

4.3. **Teorema del punto di minima distanza.**

Esercizio 4.16. Dimostra che il teorema 3.4 e la proposizione 3.5 valgono anche per spazi di Banach uniformemente convessi.

Esercizio 4.17. Fai un esempio di sottoinsieme chiuso e convesso del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ per il quale non si ha unicità del punto di minima norma, rispetto alla norma $\|(x,y)\| := |x| + |y|$.

Esercizio 4.18. Sia $C := \left\{f \in L^1(0,1)\colon \int_0^1 f = 1\right\}$. Dimostra che C è convesso e chiuso in $L^1(0,1)$ e che possiede infiniti elementi di norma minima.

Esercizio 4.19. Sia $C := \left\{f \in L^1(0,1)\colon \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1\right\}$. Dimostra che C è convesso e chiuso in $C(0,1)$ (dotato della norma del sup, $\|f\| := \sup|f|$) e che non esiste alcun elemento di norma minima.

Esercizio 4.20. Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio pre-Hilbertiano E, siano $p \in C$ e $q \in E$. Dimostra che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

(A) il punto p è un punto di C con minima distanza da q, ovvero $\|q-p\| = \min_{x\in C}\|q-x\|$;
(B) per ogni $x \in C$ si ha che $\langle q-p, x-p\rangle \leqslant 0$.

Prova inoltre a dare una interpretazione geometrica della condizione (B).