ANALISI 3 - L09: APPROSSIMAZIONI CON FUNZIONI REGOLARI

Continuiamo ad esplorare le proprietà del prodotto di convoluzione. In particolare ci interessano le proprietà che riguardano i supporti delle funzioni e le proprietà che riguardano la differenziabilità. L'operazione di convoluzione produce funzioni che sono solitamente più regolari dei suoi fattori. Possiamo dire, in un certo senso, che la regolarità di $f * g$ è data dalla somma della regolarità di f e della regolarità di g. Tramite convoluzioni con nuclei regolari riusciremo ad approssimare con funzioni regolari ogni funzione di L^p.

1. Supporto di una funzione misurabile

Ad un livello puramente insiemistico il supporto di una funzione numerica $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ può essere definito come l'insieme dei punti del dominio Ω in cui la funzione non si annulla, $\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}$. Nel campo dell'analisi, quando sul dominio Ω è presente una struttura topologica o metrica si preferisce considerare come supporto la chiusura (topologica) di tale insieme

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}}, \tag{1}$$

in questo modo il supporto di f è il più piccolo chiuso che contiene i punti in cui f non si annulla; il complementare del supporto risulta così formato dai punti in cui f è *localmente* nulla,

$$x \notin \operatorname{supp} f \iff \exists U \text{ intorno di } x : f|_U \equiv 0,$$

ovvero il complementare del supporto di f è il più grande aperto sul quale f è identicamente nulla.

Se consideriamo funzioni misurabili di classe L^p, rispetto alla misura di Lebesgue su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, siccome si perde il concetto del valore della funzione in un punto, anche la definizione di supporto (1) perde di significato. Ad esempio, consideriamo la funzione di Dirichlet

$$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

abbiamo che $\operatorname{supp} D = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, ma D è nulla quasi ovunque; quindi nella stessa classe di equivalenza in $L^p(\mathbb{R})$ troviamo sia la funzione nulla con supporto vuoto che la funzione D con supporto uguale a $\mathbb{R}$. Abbiamo bisogno allora di una nozione di supporto che sia più robusta nel passaggio da $\mathcal{L}^p$ a $L^q := \mathcal{L}^P / \overset{\mu}{\equiv}$, ovvero di una nozione di supporto che non cambi se si modifica la funzione su un insieme di misura nulla.

Definizione 1.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Definiamo *supporto essenziale* di f, e lo indichiamo con $\operatorname{ess\,supp} f$, il complementare in Ω dell'insieme dei punti in cui f è *localmente* nulla quasi ovunque,

$$x \notin \operatorname{ess\,supp} f \iff \exists U \text{ intorno di } x : f|_U \overset{\mu}{\equiv} 0,$$

si vede facilmente che tale complementare è un aperto, anzi risulta che il complementare del supporto di f è il più grande aperto sul quale f è nulla quasi ovunque.

Date: ultimo aggiornamento, 3 novembre 2021.

Segue immediatamente dalla definizione che $\operatorname{ess\,supp} f \subseteq \operatorname{supp} f$. Se f è una funzione continua allora i due concetti di supporto coincidono, $\operatorname{ess\,supp} f = \operatorname{supp} f$. Se due funzioni misurabili coincidono quasi ovunque avranno lo stesso supporto essenziale,

$$f \overset{\mu}{\equiv} g \implies \operatorname{ess\,supp} f = \operatorname{ess\,supp} g.$$

Nel caso della funzione di Dirichlet abbiamo che $\operatorname{ess\,supp} D = \varnothing$, mentre $\operatorname{supp} D = \mathbb{R}$.

Definizione 1.2. Dati un sottoinsieme A e un punto p di $\mathbb{R}^d$, la traslazione di A di passo p, ovvero la somma di A con p, è definita come l'insieme

$$A + p = p + A := \{a + p\colon a \in A\}.$$

L'opposto, o rovesciato, di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^d$, è il sottoinsieme formato dagli opposti,

$$-A := \{-a\colon a \in A\}.$$

Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}^d$, la loro somma e la loro differenza algebrica sono definite come gli insiemi

$$A + B := \{a + b\colon a \in A, b \in B\}, \quad A - B := \{a - b\colon a \in A, b \in B\}.$$

Attenzione: dati tre sottoinsiemi A, B, C, se $A - B = C$ non significa che si abbia $A = B + C$! Però, dato un sottoinsieme A e un punto p, se $A - p = C$ allora $A = p + C$.

La somma di due aperti è sempre un aperto, anzi la somma di un aperto con un insieme qualsiasi è sempre un aperto; mentre la somma di due chiusi non è detto che sia un chiuso; la somma di un chiuso e di un compatto è sempre un chiuso; la somma di due compatti è un compatto. (Lasciamo la dimostrazione di queste affermazioni come esercizio.)

Lemma 1.3. *Dati una funzione misurabile $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ e un punto $x \in \mathbb{R}^d$, consideriamo la funzione $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definita da $g(y) := f(x - y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^d$. Allora*

$$\operatorname{ess\,supp} g = x - \operatorname{ess\,supp} f.$$

Dimostrazione. Segue facilmente dal fatto che se g è nulla quasi ovunque sulla palla $B(p, r)$ se e solo se f è nulla quasi ovunque sulla palla $B(x - p, r) = x - B(p, r)$. □

Lemma 1.4. *Date due funzioni misurabili $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ abbiamo che*

$$\operatorname{ess\,supp}(f \cdot g) \subseteq \operatorname{ess\,supp} f \cap \operatorname{ess\,supp} g.$$

Dimostrazione. Segue facilmente dal fatto che se una delle due funzioni è nulla quasi ovunque su una palla, allora anche il prodotto puntuale delle due funzioni si annulla quasi ovunque sulla stessa palla. □

Ora abbiamo tutti gli elementi per poter enunciare e dimostrare che il supporto del prodotto di convoluzione è dato dalla somma dei supporti dei due fattori.

Teorema 1.5. *Siano $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ due funzioni misurabili per le quali si ha che la convoluzione è definita quasi ovunque su $\mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\operatorname{ess\,supp} f * g \subseteq \overline{\operatorname{ess\,supp} f + \operatorname{ess\,supp} g}.$$

Dimostrazione. Sia $S := \operatorname{ess\,supp} f + \operatorname{ess\,supp} g$. Sia ora p un punto esterno a S, esiste quindi una palla $B(p, r)$ disgiunta da S.

Sia $x \in B(p, r)$ un punto in cui è definita la convoluzione, consideriamo la funzione $h(y) := f(x - y)g(y)$. Per i lemmi 1.3 e 1.4 abbiamo che

$$\operatorname{ess\,supp} h \subseteq (x - \operatorname{ess\,supp} f) \cap \operatorname{ess\,supp} g.$$

Dunque se esistesse un punto $y \in \operatorname{ess\,supp} h$ allora dovremmo avere $x = (x - y) + y \in S$; ma per come è stato scelto x abbiamo $x \notin S$ e dunque $\operatorname{ess\,supp} h$ è vuoto, ovvero h è nulla quasi ovunque. Abbiamo quindi

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int h(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

La convoluzione $f * g$ si annulla quindi in tutti i punti di $B(p, r)$ in cui è definita, e quindi $p \notin \operatorname{ess\,supp} f * g$. □

Segue dal teorema che la convoluzione di due funzioni con supporto essenziale compatto ha supporto essenziale compatto.

2. Regolarità di convoluzioni

Che legame c'è tra la derivabilità di un prodotto di convoluzione e la derivabilità dei suoi fattori? Formalmente, se possiamo scambiare l'operatore di derivata con l'operatore di integrazione, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * g)(x) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f'(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

ovvero $(f * g)' = (f' * g)$.

Lo scambio tra derivata e integrale non è un'operazione sempre lecita. Ad esempio, per la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)\frac{x^2 - y^2}{x^2}, & \text{se } 0 < |y| < |x|, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

abbiamo che, per $|x| \leqslant 1$,

$$F(x) := \int_{-1}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}x, \quad F'(0) = \frac{4}{3},$$

ma

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue ci permette di definire delle condizioni sufficienti affinché si possa portare la derivata sotto il segno di integrale.

Proposizione 2.1. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia Ω un insieme misurabile di $\mathbb{R}^d$. Sia $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione tale che*

- *per ogni $t \in I$ la funzione $x \mapsto f(t, x)$ è integrabile su Ω;*
- *per quasi ogni $x \in \Omega$ la funzione $t \mapsto f(t, x)$ è derivabile su I;*
- *esiste una funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile su Ω e tale che*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leqslant g(x),$$

per ogni $t \in I$ e per quasi ogni $x \in \Omega$.

Allora si ha che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega f(t, x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall t \in I.$$

Dimostrazione. Sia $F(t) := \int_\Omega f(t, x)\,\mathrm{d}x$. Consideriamo il rapporto incrementale,

$$\frac{F(t + h) - F(t)}{h} = \int_\Omega \frac{f(t + h, x) - f(t, x)}{h}\,\mathrm{d}x.$$

Per ipotesi, per quasi ogni $x \in \Omega$, la quantità integranda converge a $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ quando $h \to 0$. Inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo, per quasi ogni $x \in \Omega$ abbiamo che

$$\left| \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} \right| = \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant \frac{1}{|h|} \left| \int_t^{t+h} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\tau,x) \right| \mathrm{d}\tau \right| \leqslant g(x).$$

Avendo un controllo dominato della quantità integranda con un termine integrabile indipendente da t, possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, otteniamo così

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_\Omega \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}\,\mathrm{d}x,$$

ovvero $F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Definizione 2.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che una funzione misurabile $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ è *localmente integrabile su* Ω quando f è integrabile su ogni compatto contenuto in Ω, ovvero quando per ogni K compatto contenuto in Ω si ha che $\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Indichiamo con $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni localmente integrabili su Ω.

La convoluzione tra una funzione derivabile e una funzione integrabile è derivabile.

Teorema 2.3. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione con supporto compatto e sia $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Allora la convoluzione $f * g$ è una funzione di classe C^1 ed inoltre*

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f*g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) * g.$$

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, senza nulla togliere alla generalità, diamo la dimostrazione per il caso $d = 1$. Sia $K = \operatorname{supp} f + \overline{B(0,1)}$ l'ispessimento di raggio 1 del supporto di f, ovvero il compatto formato dai punti con distanza dal supporto di f minore o uguale a 1. Sia f che f' sono funzioni continue e nulle fuori dal compatto K, per il teorema di Weierstrass sono anche limitate. Fissiamo un punto $x_\star$. Scelto $x \in B(x_\star, 1)$ consideriamo la funzione integranda $y \mapsto f(x-y)g(y)$; per i lemmi 1.3 e 1.4 essa ha supporto contenuto in $x - \operatorname{supp} f$, che a sua volta è contenuto in $x_\star - K$, infatti se $p = x - y$ con $y \in \operatorname{supp} f$ allora $p = x_\star - (y + (x_\star - x))$, con $y + (x_\star - x) \in K$. Inoltre

$$|f(x-y)g(y)| \leqslant \sup_K |f| \cdot |g(y)|,$$

con $g(y)$ integrabile sul compatto $x_\star - K$; per il teorema della convergenza dominata abbiamo che

$$\lim_{x\to x_\star} (f*g)(x) = \int \lim_{x\to x_\star} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x_\star - y)g(y)\,\mathrm{d}y = (f*g)(x_\star).$$

Dunque $f * g$ è continua. Allo stesso modo si dimostra che anche $f' * g$ è continua. Inoltre, siccome

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x-y)g(y)\right) \right| = |f'(x-y)g(y)| \leqslant \sup_K |f'| \cdot |g(y)|.$$

per la proposizione 2.1 possiamo scambiare derivata e integrale,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f*g)(x) = \int_{x-K} f'(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_K f'(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = (f'*g)(x).$$

$\square$

Osservazione 2.4. L'ipotesi del supporto compatto per f nell'enunciato del teorema 2.3 ci è servita unicamente per assicurarci che la limitatezza di f e f'. Il teorema rimane ancora valido se rilassiamo le ipotesi su f richiedendo solo che sia di classe C^1 con f e f' limitate, ma rafforzando le ipotesi su g richiedendo che sia una funzione di classe L^1 su tutto lo spazio.

Se f e g sono entrambe di classe C^1, con una delle due funzioni a supporto compatto, essendo il il prodotto di convoluzione commutativo, possiamo scaricare a piacere la derivata di $f * g$ sia su f che su g,

$$\partial(f * g) = (\partial f) * g = f * (\partial g),$$

e questo ci permette di poter derivare ulteriormente e dunque otteniamo che la convoluzione è due volte derivabile,

$$\partial^2(f * g) = \partial\big((\partial f) * g\big) = (\partial f) * (\partial g).$$

Iterando questo procedimento otteniamo che la regolarità della convoluzione è data dalla somma della regolarità dei suoi fattori.

Corollario 2.5. *Se f è un funzione di classe C^j e g è una funzione di classe C^k e una delle due ha supporto compatto, allora $f * g$ è di classe C^{j+k}.*

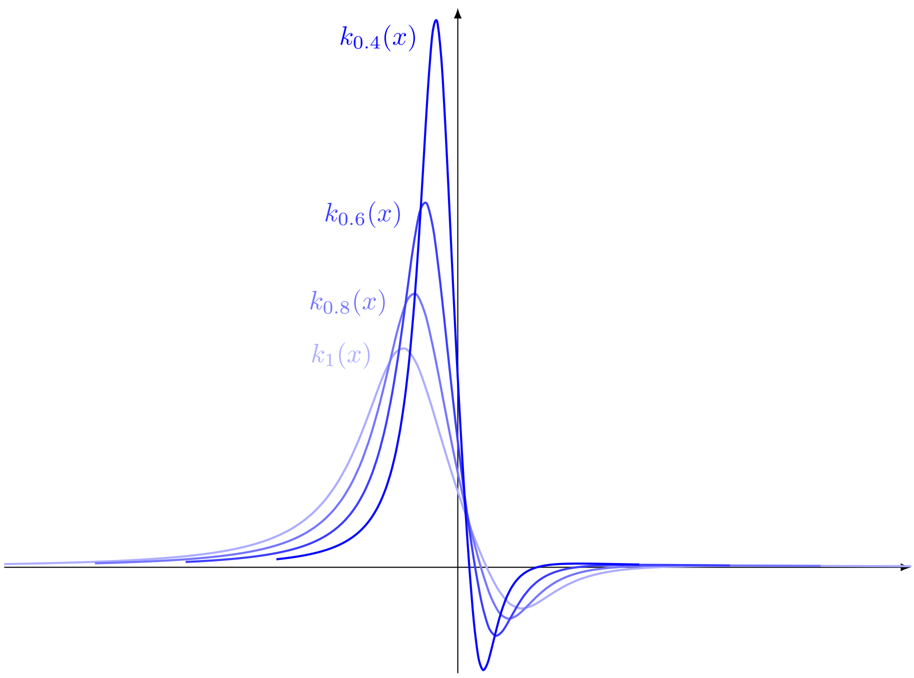
2.1. **Approssimazioni dell'identità.** Data una funzione $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, indichiamo con $(k_t)_{t>0}$ la famiglia dei riscalamenti della funzione k definiti da

$$k_t(x) := 1/t^d k\Big(\frac{x}{t}\Big), \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

In questo modo, per ogni $t > 0$ abbiamo che

$$\int k_t(x)\,\mathrm{d}x = \int k\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{t^d} = \int k(y)\,\mathrm{d}y,$$

in quanto con il cambio di variabile $y \mapsto x = ty$ l'elemento di volume è dato da $\mathrm{d}y = t^d\,\mathrm{d}x$. Analogamente $\|k_t\|_1 = \|k\|_1$. Quando $t \to 0^+$ le funzioni riscalate k_t conservano la loro massa facendola "concentrare" sempre di più intorno all'origine.



Il seguente teorema ci dice che tramite convoluzioni con nuclei L^1 riscalati possiamo approssimare qualsiasi funzione di L^p. Vedremo poi che è possibile scegliere questi nuclei in modo che la convoluzione abbia buone proprietà di regolarità e ciò ci permetterà di approssimare funzioni L^p con funzioni molto regolari.

Teorema 2.6. *Sia $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $\int k(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Per ogni $t > 0$ consideriamo il nucleo riscalato $k_t(x) := t^{-d}k\left(\frac{x}{t}\right)$. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, abbiamo che la convoluzione $k_t * f$ converge alla funzione f in norma L^p per $t \to 0^+$.*

Dimostrazione. Siccome $\int k_t(x)\,\mathrm{d}x = \int k(x)\,\mathrm{d}x = 1$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(k_t * f)(x) - f(x) &= \int k_t(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y - \int k_t(y)\,\mathrm{d}y\, f(x) = \\ &= \int k_t(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y = \int k(z)\big(f(x-tz) - f(x)\big)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza integrale di Minkowksi otteniamo

$$\|(k_t * f) - f\|_p \leqslant \int |k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p \mathrm{d}z.$$

Per la proprietà di continuità della norma L^p rispetto alle traslazioni, per ogni z abbiamo che

$$\lim_{t\to 0^+} |k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p = 0;$$

inoltre, per la disuguaglianza triangolare e l'invarianza delle norme L^p rispetto alle traslazioni, vale la stima

$$|k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p \leqslant |k(z)| \left(\left\|f \circ \tau_{(-tz)}\right\|_p + \|f\|_p\right) = 2\,\|f\|_p\, |k(z)|\,,$$

la quantità a destra, essendo $k \in L^1$, è integrabile e non dipende da t. Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e concludere che

$$\lim_{t\to 0^+} \int |k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p \mathrm{d}z = 0,$$

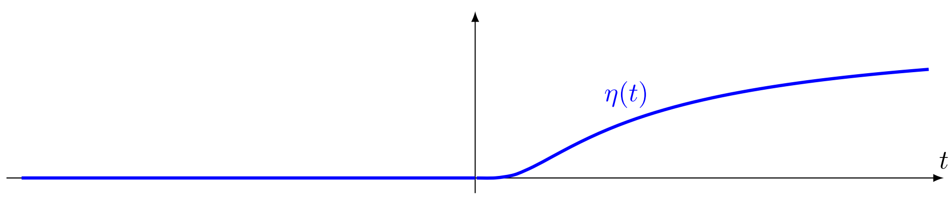
e quindi anche $\|(k_t * f) - f\|_p$ tende a zero. $\square$

3. Funzioni lisce a supporto compatto

Diciamo che una funzione è *liscia* quando possiede derivate di ogni ordine, ovvero quando è di classe C^∞. In particolare le funzioni lisce a supporto compatto sono funzioni regolari che hanno il pregio di essere integrabili su qualsiasi dominio e sono contenuto in ogni spazio L^p. Se Ω è un aperto $\mathbb{R}^d$, indichiamo con $C_c^\infty(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni di classe C^∞ con supporto compatto contenuto in Ω.

Esempio 3.1. Un esempio di funzione liscia definita su $\mathbb{R}$ con supporto $[0, +\infty[$ è data dalla funzione

$$\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \eta(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{-1/t}, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$



Che $\eta(t)$ sia derivabile per $t \neq 0$ è evidente, per $t = 0$ abbiamo

$$\eta'(0^+) := \lim_{t\to 0^+} \frac{\eta(t)-\eta(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-1/t} = \lim_{s\to+\infty} s\mathrm{e}^{-s} = 0^+,$$

e dunque $\eta'(0) = 0$. Derivando, si trova che esistono tutte le derivate di ogni ordine per $\eta(t)$ ed esse hanno sempre la forma $p\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{e}^{-1/t}$ per $t > 0$, dove $p(s)$ è un polinomio, infatti

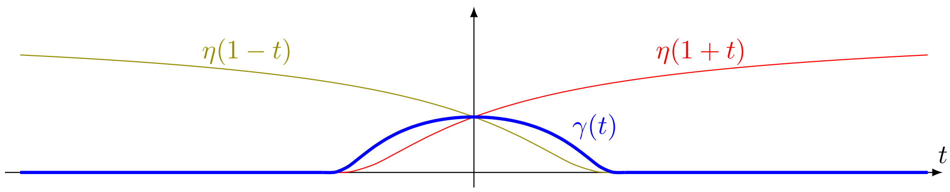
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\Big(\frac{1}{t}\Big)\mathrm{e}^{-1/t}\right) = -\frac{1}{t^2}\Big(p'\Big(\frac{1}{t}\Big)+p\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)\mathrm{e}^{-1/t} = q\Big(\frac{1}{t}\Big)\mathrm{e}^{-1/t},$$

dove $q(s) = -s^2(p'(s)+p(s))$ è ancora un polinomio. Il fatto che tutte le derivate siano nulle e continue per $t = 0$ è conseguenza del limite

$$\lim_{t\to 0^+} p\Big(\frac{1}{t}\Big)\mathrm{e}^{-1/t} = \lim_{s\to+\infty} p(s)\mathrm{e}^{-s} = 0.$$

Esempio 3.2. Il prodotto $\tilde{\eta}(t) := \eta(1-t)\eta(1+t)$ definisce una funzione C^∞ con supporto contenuto nell'intervallo compatto $[-1,1]$; siccome $\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} = \frac{2}{1-t^2}$, abbiamo

$$\tilde{\eta}(t) = \eta\Big(\frac{1-t^2}{2}\Big) = \begin{cases} 0, & \text{se } |t| \geqslant 1,\\ \mathrm{e}^{-2/(1-t^2)}, & \text{se } |t| < 1.\end{cases}$$



Esempio 3.3. La funzione $\gamma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definita da

$$\gamma(x) = \tilde{\eta}\big(|x|\big) = \eta\Big(\frac{1-|x|^2}{2}\Big) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \geqslant 1,\\ \mathrm{e}^{-2/(1-|x|^2)}, & \text{se } |x| < 1,\end{cases}$$

ha supporto nella palla compatta $\overline{B(0,1)}$ ed è una funzione di classe C^∞, in quanto composizione di funzioni C^∞, essendo $|x|^2 = \sum_k x_k^2$ un polinomio di secondo grado.

La convoluzione di una funzione integrabile con funzioni lisce a supporto compatto produce sempre funzioni lisce.

Proposizione 3.4. *Siano $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Allora $\phi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Per il teorema 2.3 abbiamo che $\phi*f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ e $\partial_k(\phi*f) = (\partial_k\phi)*f$. Ma $\partial\phi$ è ancora una funzione $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e quindi possiamo iterare il procedimendo; otteniamo che $\phi * f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$$\partial^\alpha(\phi * f) = (\partial^\alpha\phi) * f, \quad \forall\alpha.$$

Dunque $\phi * f$ è di classe C^∞. □

Definizione 3.5. Diciamo che una funzione $\phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ è un *mollificatore* quando sono verificate le seguenti condizioni:

- $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- $\operatorname{supp}\phi \subseteq \overline{B(0,1)}$;
- $\int \phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Ad ogni mollificatore è associata la famiglia $(\phi_t)_{t>0}$ delle sue riscalate definite come

$$\phi_t(x) := \frac{1}{t^d}\phi\Big(\frac{x}{t}\Big),$$

per le quali si ha che per ogni $t > 0$ valgono le condizioni:

- $\phi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- $\operatorname{supp} \phi_t \subseteq \overline{B(0,t)}$;
- $\int \phi_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Esempio 3.6. Possiamo costruire un mollificatore in $\mathbb{R}^d$ normalizzando la funzione γ costruita nell'esempio 3.3. Poniamo

$$C := \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x)\,\mathrm{d}x = \int_{B(0,1)} \mathrm{e}^{-\frac{2}{1-|x|^2}}\,\mathrm{d}x > 0,$$

allora la funzione

$$\phi(x) := \frac{1}{C}\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \geqslant 1, \\ \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-2/(1-|x|^2)}, & \text{se } |x| < 1, \end{cases}$$

è un mollificatore.

Per la proposizione 3.4, se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e ϕ_t è il riscalato di un mollificatore allora la convoluzione $\phi_t * f$ è di classe C^∞; quando $1 \leqslant p < \infty$, per il teorema 2.6 abbiamo che per $t \to 0^+$ la convoluzione $\phi_t * f$ converge a f in norma L^p. Otteniamo così che lo spazio di funzioni lisce $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e la convoluzione con famiglie di mollificatori riscalati ci fornisce uno strumento per approssimare le funzioni L^p con funzioni regolari.

Osservazione 3.7. Per il teorema dei supporti, teorema 1.5, abbiamo che il supporto dei mollificati è soggetto alla condizione

$$\operatorname{supp} \phi_t * g \subseteq \overline{B(0,t)} + \operatorname{ess\,supp} g,$$

in particolare, se g ha supporto compatto anche la mollificata $\phi_t * g$ avrà supporto compatto.

Siamo pronti per dimostrare l'importante risultato di approssimazione che dice che ogni funzione L^p è approssimabile con funzioni regolari a supporto compatto. Ovvero che per quanto irregolare possa essere una funzione L^p, essa rimane sempre vicino a qualche funzione con ottime proprietà di derivabilità e limitatezza.

Teorema 3.8. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni lisce a supporto compatto in Ω è denso in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^p(\Omega)$ e sia $\varepsilon > 0$. Abbiamo dimostrato nella lezione 7 che le funzioni continue supporto compatto sono dense in $L^p(\Omega)$. Dunque esiste una funzione g continua e a supporto compatto in Ω tale che $\|f - g\|_p < \frac{1}{2}\varepsilon$. Sia K il supporto compatto di g, e sia $\delta = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ la distanza di K dalla frontiera di Ω, che sappiamo essere stettamente positiva. Consideriamo ora una famiglia di mollificatori riscalati $(\phi_t)_{t>0}$; quando $0 < t < \delta$ abbiamo che i mollificati $\phi_t * g$ sono funzioni lisce con supporto compatto contenuto in Ω. Per il teorema 2.6, esiste t sufficientemente piccolo tale che $\|g - \phi_t * g\|_p < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per la disuguaglianza triangolare otteniamo infine

$$\|f - \phi_t * g\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - \phi_t * g\|_p < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

4. Esercizi

4.1. **Supporto di una funzione misurabile.**

Esercizio 4.1. Dimostra che se f è continua allora $\operatorname{ess\,supp} f = \operatorname{supp} f$.

Esercizio 4.2. Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$. Dimostra che:

(1) se A è aperto allora $A + B$ è aperto;
(2) è possibile scegliere A e B chiusi con $A + B$ aperto e non chiuso;
(3) se A è chiuso e B è compatto allora $A + B$ è chiuso;
(4) se A e B sono compatti allora $A + B$ è compatto.

Esercizio 4.3. Dimostra che $\operatorname{ess\,supp}(f + g) \subseteq (\operatorname{ess\,supp} f) \cup (\operatorname{ess\,supp} g)$.

Esercizio 4.4. È vero che $\operatorname{supp} f \setminus \operatorname{ess\,supp} f$ è sempre un insieme di misura nulla? È vero che data una funzione misurabile f è sempre possibile trovare una funzione misurabile g tale che $g \overset{\mu}{\equiv} f$ e $\operatorname{supp} g = \operatorname{ess\,supp} f$?

4.2. **Regolarità di convoluzioni.**

Esercizio 4.5. Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^d$. Dimostra che lo spazio vettoriale $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ contiene tutte le funzioni di $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

Esercizio 4.6. Dimostra che se $f \in C^1(\mathbb{R})$ con f e f' limitate e $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora la convoluzione $f * g$ è di classe C^1 e si ha $(f * g)' = f' * g$.

4.3. **Funzioni lisce a supporto compatto.**

Esercizio 4.7. Costruisci esempi di funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ il cui supporto coincida con:

(1) il quadrato $Q := [0, 1] \times [0, 1]$;
(2) il rettangolo R di vertici $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$;
(3) il semicerchio $S = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\}$;
(4) la corona circolare $C = \{(x, y) \colon 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 4.8. Costruisci un esempio di funzione $\psi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ che verifica le seguenti condizioni:

- $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- $\operatorname{supp} \psi \subseteq \overline{B(0, 1)}$;
- $\int \psi(x)\, \mathrm{d}x = 0$.
- $\int |\psi(x)|\, \mathrm{d}x = 1$.

Esercizio 4.9. Sia ϕ un mollificatore su $\mathbb{R}$. Sia $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Cosa si può dire a proposito della convergenza di $\phi_t * f$ in L^∞?

Esercizio 4.10. Supponiamo che f sia una funzione derivabile tale che $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $f' \in L^q(\mathbb{R})$ con $p, q \in [1, \infty[$. Dimostra che è possibile costruire una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con f_n di classe C^∞ e a supporto compatto, tale che f_n converge a f in norma L^p e f'_n converge a f' in norma L^q.