

ANALISI 3 - L04:
SPAZI DI OPERATORI LINEARI

1. LO SPAZIO DEGLI OPERATORI LINEARI CONTINUI TRA DUE SPAZI NORMATI

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi normati sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Nella scorsa lezione abbiamo visto che un operatore lineare $T: V \rightarrow W$ è continuo se e solo se esiste una costante $C \geq 0$ per la quale vale la stima

$$(1) \quad \|Tv\|_W \leq C \|v\|_V,$$

per ogni $v \in V$. In tal caso risulta che

$$C \geq \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}.$$

La quantità a destra risulta finita se e solo se l'operatore è continuo e rappresenta la più piccola costante per la quale vale la stima (1); essa si dice *norma operatoriale* di T , e la indichiamo con $\|T\|_{V \rightarrow W}$,

$$(2) \quad \|T\|_{V \rightarrow W} := \inf \{C \geq 0: \forall v \in V, \|Tv\|_W \leq C \|v\|_V\} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}.$$

In particolare, per un operatore lineare continuo vale sempre la *stima operatoriale*

$$\|Tv\|_W \leq \|T\|_{V \rightarrow W} \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

L'insieme di tutti gli operatori lineari da V a W possiede una naturale struttura di spazio vettoriale. Possiamo infatti definire la somma di due operatori lineari $S, T: V \rightarrow W$ ponendo

$$(S + T)v := Sv + Tv, \quad \forall v \in V.$$

Possiamo definire inoltre il prodotto di un operatore lineare $T: V \rightarrow W$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ ponendo

$$(\lambda T)v := \lambda(Tv), \quad \forall v \in V.$$

Dalla linearità di S e T segue immediatamente che gli operatori $S + T$ e λT così definiti sono ancora operatori lineari. L'operatore lineare nullo, che indichiamo sempre con 0 , è l'operatore che ad ogni $v \in V$ associa $0 \in W$.

Lemma 1.1. *Se $S, T: V \rightarrow W$ sono operatori lineari continui e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora anche gli operatori lineari $S + T$ e λT sono continui, ed inoltre abbiamo*

$$\|S + T\|_{V \rightarrow W} \leq \|S\|_{V \rightarrow W} + \|T\|_{V \rightarrow W}, \quad \|\lambda T\|_{V \rightarrow W} = |\lambda| \|T\|_{V \rightarrow W}.$$

Dimostrazione. Dato $v \in V$, per la disuguaglianza triangolare per la norma di W , e per le stime operatoriali di S e T , abbiamo

$$\begin{aligned} \|(S + T)v\|_W &\leq \|Sv\|_W + \|Tv\|_W \leq \|S\|_{V \rightarrow W} \|v\|_W + \|T\|_{V \rightarrow W} \|v\|_W = \\ &= (\|S\|_{V \rightarrow W} + \|T\|_{V \rightarrow W}) \|v\|_W, \end{aligned}$$

da cui segue che $\|S + T\|_{V \rightarrow W} \leq \|S\|_{V \rightarrow W} + \|T\|_{V \rightarrow W}$.

Per la definizione di norma operatoriale, e per l'omogeneità della norma in W , abbiamo poi

$$\|\lambda T\|_{V \rightarrow W} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|\lambda(Tv)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} |\lambda| \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = |\lambda| \|T\|_{V \rightarrow W}.$$

□

Osserviamo inoltre che se $\|T\|_{V \rightarrow W} = 0$, allora necessariamente $\|Tv\| = 0$, e dunque $Tv = 0$, per ogni $v \in V$, quindi T deve essere l'operatore nullo. Risulta così, dal lemma e da quest'ultima osservazione, che la norma operatoriale gode di tutte le proprietà di una norma che agisce sullo spazio degli operatori lineari continui.

Definizione 1.2. Dati due spazi normati V e W indichiamo con $\mathcal{L}(V, W)$ lo spazio degli operatori lineari e continui da V a W .

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T: V \rightarrow W : T \text{ è lineare e continuo}\}.$$

Per quanto visto sopra abbiamo che $(\mathcal{L}(V, W), \|\cdot\|_{V \rightarrow W})$ dotato della norma operatoriale (2) è uno spazio normato.

Esempio 1.3. Se V e W sono due spazi normati di dimensione finita, con $\dim V = m$ e $\dim W = n$ allora, come abbiamo visto nella lezione precedente, una volta fissate delle basi per V e per W , esiste una corrispondenza biunivoca tra lo spazio $\mathcal{L}(V, W)$ degli operatori lineari e continui da V a W e lo spazio $M_{\mathbb{K}}(n, m)$ delle matrici n per m a coefficienti in \mathbb{K} . Ad esempio, possiamo identificare $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ con $M_{\mathbb{K}}(n, m)$ rappresentando ogni operatore lineare con applicazioni della forma $x \mapsto Mx$ dove $M \in M_{\mathbb{K}}(n, m)$ e $x \in \mathbb{K}^m$ è inteso come vettore colonna. Se consideriamo \mathbb{K}^m e \mathbb{K}^n normati dalle rispettive norme euclidee, che indichiamo con $\|\cdot\|_2$, possiamo dunque definire su $M_{\mathbb{K}}(n, m)$ una norma $\|\cdot\|_{\text{op}}$ indotta dalla norma operatoriale ponendo

$$(3) \quad \|M\|_{\text{op}} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^m \\ x \neq 0}} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n |\sum_{k=1}^m M_{jk}x_k|^2}{\sum_{k=1}^m |x_k|^2}}.$$

Lo spazio delle matrici ha dimensione finita, $\dim M_{\mathbb{K}}(n, m) = nm$, dunque si tratta di uno spazio completo e avremo che la norma $\|\cdot\|_{\text{op}}$ sarà equivalente alla norma euclidea definita da

$$(4) \quad \|M\|_2 := \sqrt{\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m}} |M_{jk}|^2}.$$

In generale il fatto che $\mathcal{L}(V, W)$ sia uno spazio completo dipende dalle proprietà di completezza dello spazio di arrivo W .

Teorema 1.4. *Se W è uno spazio di Banach, allora anche $\mathcal{L}(V, W)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che se W è completo anche $\mathcal{L}(V, W)$ lo è. Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(V, W)$. Ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|T_n - T_m\|_{V \rightarrow W} < \varepsilon,$$

per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$. Abbiamo inoltre che la successione $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, essendo di Cauchy, è limitata in $\mathcal{L}(V, W)$ e dunque esiste $C > 0$ tale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{V \rightarrow W} \leq C.$$

Per ogni $v \in V$, per la stima operatoriale, abbiamo che

$$(5) \quad \|T_n v - T_m v\|_W \leq \|T_n - T_m\|_{V \rightarrow W} \|v\|_V \leq \varepsilon \|v\|_V,$$

quando $n, m \geq n_\varepsilon$. Dunque la successione $(T_n v)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in W , e quindi è convergente ad un punto di W , essendo W uno spazio completo. Possiamo quindi definire l'applicazione $T: V \rightarrow W$ ponendo

$$Tv := \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n v.$$

Tale applicazione risulta essere lineare come conseguenza della linearità dei T_n e della linearità dell'operazione di limite. Abbiamo inoltre che T è continuo, in quanto per la continuità della norma e la limitatezza della successione $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abbiamo

$$\|Tv\|_W = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n v\|_W \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n v\|_W \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{V \rightarrow W} \|v\|_V \leq C \|v\|_V.$$

Dunque $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ dalla stima (5) segue che

$$\|T_n - T\|_{V \rightarrow W} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|T_n v - Tv\|_W}{\|v\|_V} \leq \varepsilon,$$

per ogni $n \geq n_\varepsilon$. Dunque la successione $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente in $\mathcal{L}(V, W)$ e ha come limite l'operatore T . \square

Quando V e W sono spazi di dimensione finita su \mathbb{K} , utilizzando coordinate rispetto a basi fissate, possiamo identificare lo spazio $\mathcal{L}(V, W)$ con lo spazio delle matrici $m \times n$ a valori in \mathbb{K} , dove $m = \dim V$ e $n = \dim W$. Con questa identificazione, al prodotto tra matrici corrisponde la composizione degli operatori.

Anche in spazi di dimensione infinita possiamo definire composizioni di operatori. La composizione di operatori lineari è ancora un'operatore lineare. La composizione di due funzioni continue è ancora una funzione continua. Dunque, se U, V, W sono tre spazi normati, dati due operatori lineari continui $S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $T \in \mathcal{L}(V, W)$, la loro composizione, che indichiamo con TS ed è definita da

$$TS: U \rightarrow W, \quad (TS)u = T(Su), \quad \forall u \in U,$$

risulta essere ancora un operatore lineare e continuo, $TS \in \mathcal{L}(U, W)$. Inoltre, per le stime operatoriali di T e S abbiamo

$$\|(TS)u\|_W = \|T(Su)\|_W \leq \|T\|_{V \rightarrow W} \|Su\|_V \leq \|T\|_{V \rightarrow W} \|S\|_{U \rightarrow V} \|u\|_U,$$

e quindi vale la stima

$$\|TS\|_{U \rightarrow W} \leq \|T\|_{V \rightarrow W} \|S\|_{U \rightarrow V}.$$

Come caso particolare possiamo considerare lo spazio degli operatori lineari e continui che agiscono su uno spazio normato V ,

$$\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V) = \{T: V \rightarrow V: T \text{ è lineare e continuo}\},$$

dotato della norma operatoriale. La composizione di operatori definisce un'operazione associativa di prodotto che rende $\mathcal{L}(V)$ un'algebra, detta *algebra degli operatori su V* ; la proprietà

$$\|TS\|_{V \rightarrow V} \leq \|T\|_{V \rightarrow V} \|S\|_{V \rightarrow V}, \quad \forall S, T \in \mathcal{L}(V),$$

rende $\mathcal{L}(V)$ una cosiddetta *algebra normata*. Quando V è uno spazio di Banach, per il teorema 1.4, anche $\mathcal{L}(V)$ è uno spazio di Banach.

2. DUALE DI UNO SPAZIO NORMATO

Definizione 2.1. Dato uno spazio normato V sul campo \mathbb{K} definiamo lo *spazio duale (topologico)* di V come lo spazio V' delle applicazioni da V a \mathbb{K} (dette anche *funzionali*) che sono lineari e continue,

$$V' := \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \{\phi: V \rightarrow \mathbb{K}: \phi \text{ lineare e continuo}\}.$$

La norma naturale sullo spazio duale è quella operatoriale che in questo caso diventa

$$\|\phi\|_{V'} = \|\phi\|_{V \rightarrow \mathbb{K}} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{\|v\|_V}.$$

Siccome $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ è un campo completo, per il teorema 1.4 risulta che il duale di qualsiasi spazio normato è sempre uno spazio di Banach.

L'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V' \rightarrow \mathbb{K}$ definita da

$$(v, \phi) \mapsto \langle v, \phi \rangle := \phi(v)$$

viene detta (forma bilineare di) *dualità*.

Il seguente lemma ci assicura che lo spazio duale è uno spazio abbastanza ricco di elementi.

Lemma 2.2. *Dato un vettore non nullo v_* di uno spazio normato V esiste (almeno) un funzionale $\phi_* \in V'$ tale che $\|\phi_*\|_{V'} = 1$ e $\phi_*(v_*) = \|v_*\|_V$.*

Questo lemma si ottiene come diretta applicazione di un importante risultato generale di analisi funzionale, il *teorema di Hahn-Banach*, che riguarda la possibilità di prolungare in modo controllato funzionali lineari definiti su sottospazi. Richiamiamo qui una formulazione del suo enunciato, senza fornire il dettaglio della sua dimostrazione (basata sul lemma di Zorn, e dunque sull'assioma della scelta), che meriterebbe uno spazio più ampio di quello a nostra disposizione. Tale teorema viene comunque trattato nell'insegnamento di *Analisi Funzionale* al primo anno del corso di laurea magistrale.

Teorema 2.3 (Hahn-Banach). *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sia $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sublineare, ovvero tale che:*

- $p(tv) = tp(v)$ per ogni $t > 0$ e $v \in V$;
- $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ per ogni $u, v \in V$.

Sia S un sottospazio vettoriale di V . Sia $f: S \rightarrow \mathbb{K}$ una applicazione lineare definita su S e dominata da p , nel senso che $|f(v)| \leq p(v)$ per ogni $v \in S$. Allora esiste una applicazione lineare $F: V \rightarrow \mathbb{K}$ che prolunga f su tutto V rimanendo dominata da p , ovvero

- $F(v) = f(v)$ per ogni $v \in S$;
- $|F(v)| \leq p(v)$ per ogni $v \in V$.

Dimostrazione del lemma 2.2. La norma $\|\cdot\|_V$ di uno spazio normato V è sempre una funzione sublineare. Dato $v_* \neq 0$, consideriamo il sottospazio S di dimensione 1 generato da v_* ,

$$S = \text{span } v_* = \{\lambda v_* : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Definiamo su S il funzionale lineare $f: S \rightarrow \mathbb{K}$ ponendo

$$f(\lambda v_*) := \lambda \|v_*\|_V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Abbiamo

$$|f(\lambda v_*)| = |\lambda| \|v_*\|_V = \|\lambda v_*\|_V, \quad \forall \lambda v_* \in S.$$

Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare $\phi_\star: V \rightarrow \mathbb{K}$ che prolunga f , e quindi in particolare $\phi_\star(v_\star) = f(v_\star) = \|v_\star\|_V$, e tale che $|\phi_\star(v)| \leq \|v\|_V$ per ogni $v \in V$. Ciò significa che ϕ_\star è continuo con $\|\phi_\star\|_{V'} \leq 1$, ed inoltre

$$\|\phi_\star\|_{V'} \geq \frac{|\phi_\star(v_\star)|}{\|v_\star\|_V} = 1.$$

Dunque $\|\phi_\star\|_{V'} = 1$. □

Come applicazione del lemma 2.2 possiamo ottenere una caratterizzazione della norma di V , tramite dualità, in termini della norma su V' .

Proposizione 2.4. *Sia V uno spazio normato. Per ogni $v \in V$ abbiamo*

$$\|v\|_V = \sup_{\substack{\phi \in V' \\ \phi \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{\|\phi\|_{V'}}.$$

Dimostrazione. Per ogni funzionale $\phi \in V'$ abbiamo $|\phi(v)| \leq \|\phi\|_{V'} \|v\|_V$ e dunque

$$\|v\|_V \geq \sup_{\phi} \frac{|\phi(v)|}{\|\phi\|_{V'}}.$$

Quando $v \neq 0$, per il lemma 2.2 esiste un funzionale $\phi_\star \in V'$ con $\|\phi_\star\|_{V'} = 1$ e $\phi_\star(v) = \|v\|_V$, e dunque

$$\|v\|_V = \frac{|\phi_\star(v)|}{\|\phi_\star\|_{V'}} \leq \sup_{\phi} \frac{|\phi(v)|}{\|\phi\|_{V'}}.$$

□

Nel caso di uno spazio V con dimensione finita d , abbiamo $V \simeq \mathbb{K}^d$, e i funzionali lineari su V (che sono sempre tutti continui) possono essere rappresentati da matrici di tipo $1 \times d$, ovvero da vettori di \mathbb{K}^d e quindi abbiamo anche $V' \simeq \mathbb{K}^d$. Quindi uno spazio normato di dimensione finita è sempre isomorfo al suo duale.

In dimensione infinita uno spazio normato può avere invece una struttura differente dal suo duale. Vediamo un esempio.

Esempio 2.5 (Duale di ℓ^1). Consideriamo lo spazio ℓ^1 , lo spazio delle successioni le cui corrispondenti serie sono assolutamente convergenti, dotato della norma della massa,

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia e_n la successione formata da tutti zeri, tranne un 1 in corrispondenza della coordinata n -esima; è evidente che $e_n \in \ell^1$ e che $\|e_k\|_1 = 1$.

Sia $\phi \in (\ell^1)'$ un funzionale lineare continuo su ℓ^1 . Per ogni $k \in \mathbb{N}$, poniamo $a_k = \phi(e_k)$. In questo modo definiamo una successione $a := (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Siccome ϕ è continuo abbiamo,

$$|a_k| = |\phi(e_k)| \leq \|\phi\|_{(\ell^1)'} \cdot \|e_k\|_1 = \|\phi\|_{(\ell^1)'}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dunque otteniamo che $a \in \ell^\infty$ e che

$$(6) \quad \|a\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \leq \|\phi\|_{(\ell^1)'}$$

Ogni successione $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ può essere approssimata da una successione di successioni $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $\xi_n = (\xi_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} \in c_{00}$, ponendo $\xi_{n,k} = x_k$ quando $k \leq n$,

e $\xi_{n,k} = 0$ quando $k > n$.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (x_1, 0, 0, 0, \dots), \\ \xi_2 &= (x_1, x_2, 0, 0, \dots), \\ \xi_3 &= (x_1, x_2, x_3, 0, \dots), \\ &\dots\dots \\ \xi_n &= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

Abbiamo infatti che la distanza tra x e ξ_n in ℓ^1

$$\|x - \xi_n\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|$$

non è altro che la serie resto che otteniamo quando alla serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ sottraiamo la somma parziale dei suoi primi n termini. Sappiamo che quando una serie converge la successione delle serie dei resti è infinitesima. Dunque $\xi_n \rightarrow x$ in ℓ^1 . Per continuità avremo che $\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\xi_n)$. Siccome ξ_n ha solo un numero finito di coordinate non nulle, possiamo scriverlo come combinazione lineare di un numero finito dei vettori e_k ; più precisamente abbiamo $\xi_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ e dunque per linearità otteniamo

$$(7) \quad \phi(\xi_n) = \phi\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \phi(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k a_k.$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k$ è assolutamente convergente, in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \|a\|_{\infty} \leq \|x\|_{\ell^1} \|\phi\|_{(\ell^1)'}$$

Passando al limite in (7) otteniamo allora una rappresentazione concreta della dualità,

$$(8) \quad \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k,$$

ed inoltre

$$|\phi(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |a_k| \leq \|a\|_{\infty} \|x\|_1,$$

da cui segue che

$$(9) \quad \|\phi\|_{(\ell^1)'} \leq \|a\|_{\infty}.$$

Combinando (6) con (9) otteniamo che $\|\phi\|_{(\ell^1)'} = \|a\|_{\infty}$.

Si verifica facilmente che l'applicazione che al funzionale $\phi \in (\ell^1)'$ associa la successione $a \in \ell^{\infty}$ è una applicazione lineare da $(\ell^1)'$ in ℓ^{∞} , è suriettiva in quanto ogni successione $a \in \ell^{\infty}$ risulta essere associata al funzionale $\phi(x) := \sum_k x_k a_k$ (vedi (8)), ed è iniettiva in quanto se $a = 0$ sempre dalla relazione di dualità (8) ricaviamo che $\phi = 0$. Si tratta dunque di un isomorfismo lineare che preserva la norma; ciò ci permette di identificare il duale di $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ con lo spazio $(\ell^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$.

Con procedimenti simili è possibile identificare il duale dello spazio $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ con lo spazio $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ (ricordiamo che c_0 è lo spazio delle successioni infinitesime); mentre invece lo spazio $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è identificabile con il suo stesso duale. Lasciamo i dettagli come esercizio.

Osservazione 2.6. È sempre possibile immergere in modo canonico uno spazio normato V nello spazio $V'' = (V')'$, il duale del suo duale. Vediamo come. Per ogni vettore $a \in V$, consideriamo l'applicazione $J_a: V' \rightarrow \mathbb{K}$ che ad ogni funzionale $\phi \in V'$ fa corrispondere il valore $\phi(a)$, ovvero $J_a(\phi) := \phi(a)$. Verifichiamo che J_a è continuo. Siccome ϕ è lineare e continuo abbiamo

$$|J_a(\phi)| = |\phi(a)| \leq \|\phi\|_{V'} \|a\|_V, \quad \forall \phi \in V',$$

da cui segue la continuità di J_a e la stima per la sua norma in V'' ,

$$\|J_a\|_{V''} = \sup_{\substack{\phi \in V' \\ \phi \neq 0}} \frac{|\phi(a)|}{\|\phi\|_{V'}} \leq \|a\|_V.$$

Per il lemma 2.2, dato un vettore $a \in V$ non nullo esiste un funzionale lineare $\phi_* \in V'$ tale che $\phi_*(a) = \|a\|_V$ e $\|\phi_*\|_{V'} = 1$, otteniamo così

$$\|J_a\|_{V''} \geq \frac{|\phi_*(a)|}{\|\phi_*\|_{V'}} = \|a\|_V.$$

Dunque, per ogni $a \in V$ abbiamo che $J_a \in V''$ con

$$(10) \quad \|J_a\|_{V''} = \|a\|_V.$$

Possiamo quindi definire l'applicazione $J: V \rightarrow V''$, ponendo $J(a) = J_a$. Si verifica facilmente che anche questa applicazione è lineare e continua e dall'identità (10) segue che $\|J\|_{V \rightarrow V''} = 1$. Questa applicazione J è iniettiva, infatti se $J_a \equiv 0$, ciò significa che $\|a\|_V = \|J_a\|_{V''} = 0$ e dunque $a = 0$, per cui il nucleo di J contiene solo il vettore nullo. La linearità di J con (10) implica che

$$\|J_a - J_b\|_{V''} = \|a - b\|_V, \quad \forall a, b \in V,$$

ovvero J preserva le distanze e questo significa che l'immagine dell'applicazione J è una copia isometrica dello spazio V in V'' . Quando la mappa J è anche suriettiva, da cui segue che V risulta essere isometrico a V'' , si dice che lo spazio normato V è *riflessivo*.

Ad esempio, $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio riflessivo, mentre $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ non lo è.

3. OPERATORE AGGIUNTO

Definiamo ora un'operazione che agisce sugli operatori lineari e continui in modo analogo all'operazione di trasposizione per le matrici.

Definizione 3.1. Siano V e W due spazi normati sul campo \mathbb{K} e sia $T \in \mathcal{L}(V, W)$ un operatore lineare e continuo da V in W . Definiamo l'operatore *aggiunto* (o trasposto) di T come l'operatore $T^*: W' \rightarrow V'$ che ad ogni funzionale lineare e continuo $\psi \in W'$ associa il funzionale $T^*\psi \in V'$ definito da

$$T^*\psi(v) = \psi(Tv), \quad \forall v \in V.$$

La linearità degli operatori così definiti segue dal fatto che si tratta di composizioni di operatori lineari. Che $T^*\psi$ sia continuo segue dalla stima operatoriale

$$|T^*\psi(v)| = |\psi(Tv)| \leq \|\psi\|_{W'} \|T\|_{V \rightarrow W} \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

Dunque

$$\|T^*\psi\|_{V'} \leq \|\psi\|_{W'} \|T\|_{V \rightarrow W}, \quad \forall \psi \in W'.$$

Da quest'ultima stima ricaviamo che T^* è continuo e che

$$(11) \quad \|T^*\|_{W' \rightarrow V'} \leq \|T\|_{V \rightarrow W}.$$

Proposizione 3.2. *La norma operatoriale dell'operatore aggiunto T^* coincide con la norma operatoriale di T ,*

$$\|T^*\|_{W' \rightarrow V'} = \|T\|_{V \rightarrow W}.$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che vale anche la disuguaglianza in verso opposto rispetto a (11). Per ogni $v \in V$ per cui si ha $Tv \neq 0$, grazie al lemma 2.2, sappiamo che esiste un funzionale $\psi \in W'$ tale che $\|\psi\|_{W'} = 1$ e $\psi(Tv) = \|Tv\|_W$. E dunque

$$\|Tv\|_W = |\psi(Tv)| = |T^*\psi(v)| \leq \|T^*\|_{W' \rightarrow V'} \|\psi\|_{W'} \|v\|_V = \|T^*\|_{W' \rightarrow V'} \|v\|_V.$$

Tale stima vale, trivialmente, anche quando $Tv = 0$. Ne segue che

$$\|T\|_{V \rightarrow W} \leq \|T^*\|_{W' \rightarrow V'}.$$

□

Quest'uguaglianza tra la norma operatoriale dell'operatore T e del suo aggiunto T^* ci dice che lo studio dell'aggiunto T^* può fornirci molte informazioni sull'operatore T . Inoltre osserviamo che, anche quando V e W non sono spazi di Banach, per il teorema 1.4 lo spazio $\mathcal{L}(W', V')$ in cui vive T^* è sempre uno spazio di Banach.

Vediamo un esempio di calcolo di un operatore aggiunto in un caso concreto.

Esempio 3.3. Consideriamo l'operatore $T: \ell^1 \rightarrow \ell^1$ che ad una successione assolutamente sommabile $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associa la successione ottenuta estraendo la sottosuccessione delle coordinate di ordine pari definita da $(Tx)_k := x_{2k}$, ovvero la k -esima coordinata di Tx è la $2k$ -esima coordinata di x ,

$$Tx = (x_2, x_4, x_6, x_8, \dots, x_{2k}, \dots).$$

Abbiamo

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |(Tx)_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}| \leq \|x\|_1,$$

e quindi T è continuo, con $\|T\|_{\ell^1 \rightarrow \ell^1} \leq 1$.

L'aggiunto T^* di T opera sul duale di ℓ^1 . Possiamo identificare il duale di ℓ^1 con lo spazio ℓ^∞ (vedi esempio 2.5) e dunque di fatto possiamo pensare a T^* come un operatore da ℓ^∞ a ℓ^∞ . Data una successione $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, ad essa corrisponde il funzionale lineare continuo $\psi \in (\ell^1)'$ definito dalla relazione di dualità

$$(12) \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$$

Abbiamo allora, per $x \in \ell^1$

$$T^*\psi(x) = \psi(Tx) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (Tx)_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{2k} = \sum_{j=1}^n b_j x_j,$$

dove b_j è la successione definita da $b_j = 0$ quando j è dispari e $b_j = a_{j/2}$ quando j è pari. Siccome b è una sottosuccessione di a abbiamo che anche $b \in \ell^\infty$ e $\|b\|_\infty \leq \|a\|_\infty$. La successione b corrisponde al funzionale $T^*\psi$, tramite l'identificazione tra $(\ell^1)'$ e ℓ^∞ data dalla dualità (12). Possiamo allora identificare l'operatore aggiunto T^* con l'operatore da ℓ^∞ a ℓ^∞ che alla successione $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associa la successione $b = T^*a$ definita da

$$(T^*a)_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j \text{ è dispari,} \\ a_{j/2}, & \text{se } j \text{ è pari.} \end{cases}$$

4. ESERCIZI

4.1. Lo spazio degli operatori lineari continui tra due spazi normati.

Esercizio 4.1. Dimostra che la norma operatoriale su $\mathcal{L}(V, W)$ si può anche scrivere come

$$\|T\|_{V \rightarrow W} = \sup\{\|Tv\|_W : \|v\|_V \leq 1\}.$$

Esercizio 4.2. Sia S un sottospazio denso di uno spazio normato V ; S può essere esso stesso considerato uno spazio normato con la norma di V . Sia W uno spazio di Banach. Sia $L: S \rightarrow W$ un operatore lineare e continuo. Dimostra che esiste un unico operatore lineare continuo $\tilde{L}: V \rightarrow W$ che prolunga L su V , ovvero tale che la restrizione di \tilde{L} a S coincide con L . Dimostra inoltre che si ha

$$\|\tilde{L}\|_{V \rightarrow W} = \|L\|_{S \rightarrow W}.$$

Esercizio 4.3. Nell'esempio 1.3 si è osservato che le norme $\|\cdot\|_{\text{op}}$ e $\|\cdot\|_2$ definite in (3) e (4) sono due norme equivalenti sullo spazio delle matrici $\mathcal{M} := M_{\mathbb{K}}(n, m)$.

- Determina esplicitamente due costanti A e B per le quali si ha che

$$\|M\|_{\text{op}} \leq A \|M\|_2, \quad \|M\|_2 \leq B \|M\|_{\text{op}}, \quad \forall M \in \mathcal{M}.$$

- Determina le norme operatoriali dell'operatore identità $\text{id}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, definito da $\text{id}(M) = M$, sia come operatore da $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\text{op}})$ in $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_2)$ e sia come operatore da $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_2)$ in $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\text{op}})$.

4.2. Duale di uno spazio normato.

Esercizio 4.4. Sia S un sottospazio denso di uno spazio normato V . Spiega come possiamo identificare il duale S' con il duale V' . [Puoi usare quanto ottenuto nell'esercizio 4.2.]

Esercizio 4.5. Dimostra che lo spazio $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ può essere identificato con il suo duale, facendo vedere che la relazione di dualità espressa dalla formula

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2,$$

descrive un isomorfismo che fa corrispondere ad ogni successione $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ un funzionale $\psi \in (\ell^2)'$.

Esercizio 4.6. Dimostra che il duale dello spazio $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ può essere identificato con lo spazio $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, facendo vedere che la relazione di dualità espressa dalla formula

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0,$$

descrive un isomorfismo che fa corrispondere ad ogni successione $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ un funzionale $\psi \in (c_0)'$.

Esercizio 4.7. Identifica i duali degli spazi

$$(c_{00}, \|\cdot\|_1), \quad (c_{00}, \|\cdot\|_2), \quad (c_{00}, \|\cdot\|_{\infty}).$$

4.3. Operatore aggiunto.

Esercizio 4.8. Considera gli operatori lineari continui $R, L: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ che agiscono su $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Rx &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots), & [\text{Right shift}] \\ Lx &:= (x_2, x_3, x_4, x_5, \dots), & [\text{Left shift}]. \end{aligned}$$

Determina i loro operatori aggiunti, identificando il duale di ℓ^2 con ℓ^2 stesso (usando la relazione di dualità indicata nell'esercizio 4.5).

Esercizio 4.9. Considera l'operatore lineare continuo $T: (\ell^1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ che ad una successione sommabile $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associa la successione delle serie dei resti Tx , definita da $(Tx)_k := \sum_{j=k}^{\infty} x_j$. Determina una rappresentazione dell'operatore aggiunto di T .