ANALISI 3 - L03:
OPERATORI LINEARI CONTINUI

Uno spazio normato possiede una struttura metrica-topologica compatibile con la struttura lineare. Vogliamo esaminare ora le trasformazioni che preservano queste strutture, ovvero le applicazioni tra spazi normati che sono lineari e continue.

1. Funzioni continue tra spazi metrici

Ricordiamo la caratterizzazione della continuità per funzioni tra spazi metrici.
Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra due spazi metrici X e Y.

Definizione 1.1. L'applicazione f si dice *continua nel punto* $p \in X$ quando la controimmagine di un intorno di $f(p)$ è un intorno di p, ovvero quando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall q \in X,\ \mathrm{dist}(q,p) < \delta \implies \mathrm{dist}(f(q), f(p)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Questa scrittura equivale a dire che per ogni palla $B := B(f(p), \varepsilon)$ in Y con centro in $f(p)$ esiste una palla $\widetilde{B} := B(p, \delta)$ in X con centro in p tale che $f(\widetilde{B}) \subseteq B$. L'applicazione f si dice continua su X quando è continua in ogni punto di X.

La continuità in un punto può essere espressa anche tramite l'analisi del comportamento sequenziale:

Proposizione 1.2. *L'applicazione f è continua nel punto p se e solo se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a p in X si ha che la successione delle immagini $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(p)$ in Y.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in p, e che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga a p. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che quando $\mathrm{dist}(x,p) < \delta$ si ha $\mathrm{dist}(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Ma se n è sufficientemente grande $\mathrm{dist}(x_n, p) < \delta$, e dunque $\mathrm{dist}(f(x_n), f(p)) < \varepsilon$. Questo prova che $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(p)$.

Viceversa se f non è continua in p allora esisterà un $\varepsilon_\star > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste un $x \in X$ con $\mathrm{dist}(x,p) < \delta$ e $\mathrm{dist}(f(x), f(p)) \geqslant \varepsilon_\star$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, scegliendo $\delta = 1/n$ possiamo allora trovare un punto $x_n \in X$ tale che $\mathrm{dist}(x_n, p) < 1/n$ e $\mathrm{dist}(f(x_n), f(p)) \geqslant \varepsilon_\star$. Dunque la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto p ma la successione delle sue immagini $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge al valore $f(p)$. $\square$

Il valore di δ in (1) può dipendere sia dal valore di ε che dal punto p in considerazione. Quando δ può essere scelto in modo indipendente dal punto p la continuità si dice uniforme.

Definizione 1.3. L'applicazione f si dice *uniformemente continua* quando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall p, q \in X,\ \mathrm{dist}(q,p) < \delta \implies \mathrm{dist}(f(q), f(p)) < \varepsilon.$$

Ogni funzione uniformemente continua è ovviamente continua; ma non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue, ad esempio $f(x) = x^2$ è continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, ma non è uniformemente continua.

Definizione 1.4. L'applicazione f si dice *Lipschitziana* quando

$$\exists L \geqslant 0 : \forall p, q \in X,\ \mathrm{dist}(f(q), f(p)) \leqslant L\, \mathrm{dist}(q,p).$$

Date: ultimo aggiornamento, 20 novembre 2021.

Ogni funzione Lipschitziana è anche uniformemente continua (basta ad esempio scegliere $\delta < \varepsilon/L$). Non tutte le funzioni uniformemente continue sono Lipschitziane, ad esempio $f(x) = \sqrt{|x|}$ è uniformemente continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, ma non è Lipschitziana.

2. Operatori lineari

Definizione 2.1. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un'applicazione $T\colon V \to W$ si dice *operatore lineare* da V a W quando preserva la struttura lineare degli spazi vettoriali, ovvero quando:

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$ per ogni coppia di vettori $u, v \in V$;
- $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ per ogni vettore $u \in V$ e ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$.

Segue facilmente dalla definizione che se T è lineare allora T mappa opposti in opposti, $T(-v) = -T(v)$, e zero in zero $T(0) = 0$, infatti

$$T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v),$$
$$T(0) = T(v + (-v)) = T(v) + T(-v) = T(v) - T(v) = 0.$$

Definizione 2.2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un operatore lineare $T\colon V \to \mathbb{K}$ si dice *funzionale (lineare)* su V.

Esempio 2.3 (Operatori lineari tra spazi di dimensione finita)**.** Sia $L\colon V \to W$ un operatore lineare tra due spazi vettoriali V e W di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Sia $A = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base per V e sia $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base per W. Per ogni $k = 1, \dots, m$ il vettore $L(v_k)$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare degli n vettori in B, dunque esisteranno dei coefficienti $m_{jk} \in \mathbb{K}$ tali che

$$L(v_k) = \sum_{j=1}^{n} m_{jk} w_j.$$

Dato un generico vettore $v \in V$ esso può essere scritto in modo unico come combinazione lineare degli m vettori in A, dunque esiste un unico $\lambda \in \mathbb{K}^m$ tale che $v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k$; e analogamento il vettore $L(v) \in W$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare degli n vettori in B, dunque esiste un unico $\mu \in \mathbb{K}^n$ tale che $L(v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$. Applicando la proprietà di linearità dell'operatore L otteniamo anche che

$$L(v) = L\Big(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k L(v_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{j=1}^{n} m_{jk} w_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} m_{jk} \lambda_k\Big) w_j;$$

per l'unicità dei coefficienti ne deduciamo che $\mu_j = \sum_{k=1}^{m} m_{jk} \lambda_k$ per $j = 1, \dots, n$, ovvero μ non è altro che il prodotto di λ con la matrice M,

$$\mu = M\lambda,$$

dove μ e λ sono da intendere come vettori colonna e $M := (m_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}$ è una matrice con n righe e m colonne. Questo significa che l'applicazione lineare L, letta tramite coordinate nelle basi A su V e B su W corrisponde all'applicazione lineare da $\mathbb{K}^m$ a $\mathbb{K}^n$ che mappa $\lambda \mapsto M\lambda$. Di fatto tutti gli operatori lineari tra spazi di dimensione finita, una volta fissato un opportuno sistema di coordinate, hanno la forma di un prodotto matriciale. La corrispondenza tra L e M risulta essere una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle applicazioni lineari da V a W e l'insieme delle matrici a coefficienti in $\mathbb{K}$ con n righe e m colonne.

Vediamo qualche esempio di operatori lineari definiti su spazi di dimensione infinita.

Esempio 2.4. L'operatore S che ad una successione numerica $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associa la successione delle sue somme parziali $Sx := (\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ è un operatore lineare da $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

$$S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1,\, x_1 + x_2,\, x_1 + x_2 + x_3, \dots).$$

La linearità di S è una conseguenza diretta delle proprietà di linearità delle sommatorie:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k, \qquad \sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Ad ogni successione assolutamente sommabile, $x \in \ell^1$, corrisponde una successione convergente, $Sx \in c$. Infatti, sappiamo che se $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è convergente. Quindi restringendo il dominio possiamo considerare S come un operatore lineare da ℓ^1 a c.

Esempio 2.5. L'operatore L che ad una successione convergente $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associa il suo limite $Lx := \lim_{n\to\infty} x_n$ è un funzionale lineare su c.

Esempio 2.6. L'operatore di derivazione D che ad una funzione derivabile f associa la sua derivata $Df := f'$ può essere considerato un operatore lineare che mappa $C^1[a, b]$ in $C[a, b]$.

Esempio 2.7. L'operatore che ad una funzione continua a valori reali f associa il valore dell'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è un funzionale lineare che mappa $C[a, b]$ in $\mathbb{R}$.

3. Linearità, continuità e limitatezza

Gli operatori lineari tra spazi normati sono continui? La linearità già da sola implica una certa dose di continuità. Sia $T\colon V \to W$ un operatore lineare tra due spazi normati V e W. Dati $u, v \in V$ consideriamo la retta che passa per il punto u nella direzione v, i punti di tale retta sono descritti dalla parametrizzazione $t \mapsto u + tv$ al variare di $t \in \mathbb{K}$. Per linearità abbiamo che

$$T(u + tv) - T(u) = tT(v),$$

e dunque

$$\lim_{t\to 0}\big\|T(u + tv) - T(u)\big\| = \lim_{t\to 0} |t|\, \|T(v)\| = 0.$$

Ciò significa che $T(u + tv)$ converge a $T(u)$ per t to 0.

Dunque T è sempre continua quando ristretta ad una generica retta. (In generale abbiamo che la restrizione di un operatore lineare ad un qualsiasi sottospazio affine di dimensione finita è sempre continua.) Ma essere continui lungo ogni retta passante per un punto non significa necessariamente essere continui in quel punto. Esistono infatti operatori lineari tra spazi normati che non sono continui.

Esempio 3.1. Consideriamo ad esempio sullo spazio $C^{\infty}([0, 1])$, dotato della norma uniforme $\|f\|_{\infty} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$, l'operatore di derivazione

$$D\colon C^{\infty}([0, 1]) \to C^{\infty}([0, 1]), \quad D(f) := f',$$

che ad ogni funzione infinitamente derivabile associa la sua derivata prima. Si tratta di un operatore lineare. Consideriamo ora la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}, \quad \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}.$$

La successione delle sue derivate è

$$f_n'(x) := -\mathrm{e}^{-nx}, \quad \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si verifica facilmente che $\|f_n\|_{\infty} = 1/n$ e $\|f_n'\|_{\infty} = 1$, e dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero in norma, ma la successione $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a zero in norma. Dunque l'operatore D non risulta essere continuo nell'origine.

Ricordiamo che un sottoinsieme E di uno spazio normato è *limitato* se e solo se esiste $R > 0$ tale che la palla $B(0, R)$ con centro nell'origine e raggio R contiene l'insieme E.

Osservazione 3.2. Se un operatore lineare $T\colon V \to W$ è continuo allora la controimmagine tramite T di un palla centrata nell'origine di W contiene una palla centrata nell'origine di V, e ciò significa che esistono palle di V la cui immagine tramite T in W risulta essere limitata; per la linearità possiamo riscalare e traslare questo risultato e concludere che l'immagine tramite T di qualsiasi palla di V risulta essere limitata.

Definizione 3.3. Un operatore lineare tra spazi normati si dice *limitato* quando è una funzione *loclmente limitata*, ovvero quando trasforma insiemi limitati in insiemi limitati.

L'osservazione 3.2 ci fa notare che per essere continuo un operatore lineare deve essere limitato, in realtà la limitatezza non è solo necessaria, ma anche sufficiente. Il seguente teorema prova che, grazie alla linearità, continuità e limitatezza sono equivalenti.

Teorema 3.4. *Sia $T\colon V \to W$ un operatore lineare tra spazi normati. Le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:*

(a) *l'operatore T è limitato;*
(b) *esiste una costante $C \geqslant 0$ tale che $\|Tv\|_W \leqslant C \|v\|_V$ per ogni $v \in V$;*
(c) *l'operatore T è Lipschitziano;*
(d) *l'operatore T è uniformemente continuo;*
(e) *l'operatore T è continuo su V;*
(f) *l'operatore T è continuo in un punto;*
(g) *l'operatore T è continuo nell'origine.*

Dimostrazione. Ogni affermazione implica la successiva e l'ultima implica la prima, vediamo come.

(a) $\implies$ (b): La sfera unitaria $U := \{u \in V\colon \|u\|_V = 1\}$ è un insieme limitato di V e dunque la sua immagine $T(U)$ sarà contenuta in una palla $B(0, C)$ di W per qualche $C > 0$, ovvero quando $\|u\|_V = 1$ abbiamo $\|T(u)\|_W < C$. Dato un vettore $v \in V \setminus \{0\}$, consideriamo $u := \frac{1}{\|v\|_V} v \in U$. Abbiamo $v = \|v\|_V u$ e per linearità $T(v) = \|v\|_V T(u)$. Passando alle norme otteniamo

$$\|T(v)\|_W = \|v\|_V \|T(u)\|_W < C \|v\|_V .$$

(b) $\implies$ (c): Scelta una coppia di vettori $u, v \in V$ per linearità abbiamo che $T(u) - T(v) = T(u - v)$ e dunque

$$\|T(u) - T(v)\|_W = \|T(u - v)\|_W \leqslant C \|u - v\|_V .$$

(c) $\implies$ (d): Ogni funzione lipschitziana tra spazi metrici è sempre uniformemente continua.

(d) $\implies$ (e): Immediato.

(e) $\implies$ (f): Ovvio.

(f) $\implies$ (g): Supponiamo che T sia continua nel punto $v \in V$. Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente a 0. La successione $v + u_n$ converge a v e quindi per la continuità di T in v abbiamo che $T(v + u_n)$ converge a $T(v)$. Per linearità abbiamo $T(u_n) = T(v + u_n) - T(v)$ che dunque converge a $T(v) - T(v) = 0 = T(0)$. Per la proposizione 1.2 ciò significa che T è continua nell'origine.

(g) $\implies$ (a): (Qui dettagliamo il contenuto dell'osservazione 3.2.) La continuità nell'origine implica che esiste un $\delta > 0$ per il quale se $\|v\|_V < \delta$ si ha che $\|T(v)\|_W < 1$. Sia ora $A \subseteq V$ un sottoinsieme limitato di V, ciò significa che esiste un $R > 0$ tale che $A \subseteq B(0, R)$. Preso un punto $v \in A$, sia $x := \frac{\delta}{R}v$; abbiamo $\|x\|_V = \frac{\delta}{R}\|v\|_V < \delta$, e dunque $\|T(x)\|_W < 1$. Ma per linearità $\|T(x)\|_W = \frac{\delta}{R}\|T(v)\|_W$ e quindi $\|Tv\|_W < \frac{R}{\delta}$. Ne deduciamo che $T(A) \subseteq B(0, R/\delta)$, ovvero $T(A)$ è un sottoinsieme limitato di W.

□

4. Norma di un operatore

Alla luce del teorema 3.4, verificare la continuità di un operatore lineare $T\colon V \to W$ equivale a verificare la validità di una stima operatoriale della forma

$$\exists C \geqslant 0 : \forall v \in V,\ \|T(v)\|_W \leqslant C \|v\|_V .$$

ovvero che

$$\sup_{\substack{v \in V:\\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} < \infty.$$

Definition 4.1. La *norma operatoriale* di un'operatore lineare e continuo $T\colon V \to W$ tra due spazi normati, è data dalla quantità

$$\|T\|_{V\to W} := \sup_{\substack{v \in V:\\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{u \in V:\\ \|u\|_V = 1}} \|Tu\|_W .$$

Vedremo nella prossima lezione come la norma operatoriale è effettivamente una norma sullo spazio vettoriale formato dagli operatori lineari. Ora occupiamoci di fare alcune considerazioni e alcuni esempi su come determinare o stimare la norma di un operatore.

Esempio 4.2. Riprendiamo l'operatore S definito nell'esempio 2.4 e consideriamolo come un operatore lineare da $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ a $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Abbiamo che

$$\|Sx\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|x\|_1 .$$

Dunque S è continuo e

$$\|S\|_{\ell^1\to\ell^\infty} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|_\infty}{\|x\|_1} \leqslant 1.$$

Scegliendo $x_\star = (1, 0, 0, 0, \dots)$ abbiamo $Sx_\star = (1, 1, 1, 1, \dots)$, con norme $\|x_\star\|_1 = 1$ e $\|Sx_\star\|_\infty = 1$, e dunque

$$\|S\|_{\ell^1\to\ell^\infty} \geqslant \frac{\|Sx_\star\|_\infty}{\|x_\star\|_1} = 1.$$

Otteniamo così che la norma dell'operatore è $\|S\|_{\ell^1\to\ell^\infty} = 1$.

Esempio 4.3. Consideriamo il funzionale $T\colon (C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ definito da

$$Tf := \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(f(x) - f(-x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

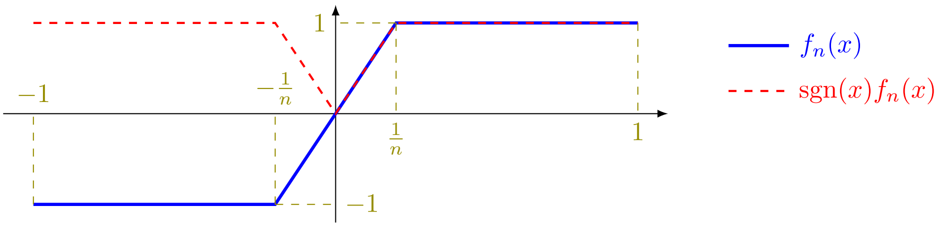
Abbiamo che

$$|Tf| \leqslant \int_{-1}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2 \max_{x\in[-1,1]} |f(x)| = 2\|f\|_\infty ,$$

e dunque T è continuo e $\|T\|_{C[-1,1]\to\mathbb{R}} \leqslant 2$.

Per stimare la norma di T dal basso andiamo a testare l'operatore su una particolare sequenza f_n di funzioni continue, scelte in modo da cercare di rendere il valore di $|Tf_n|$ il più grande possibile, mantenendo costante la norma $\|f_n\|_\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo le funzioni

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ nx, & \text{se } -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ -1, & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}. \end{cases}$$



Si calcola facilmente che

$$\|f_n\|_\infty = 1, \qquad Tf_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Dunque abbiamo che

$$\|T\|_{C[-1,1]\to\mathbb{R}} \geqslant \frac{|Tf_n|}{\|f_n\|_\infty} = 2 - \frac{1}{n},$$

e facendo tendere $n \to \infty$ otteniamo $\|T\|_{C[-1,1]\to\mathbb{R}} \geqslant 2$.

Quindi $\|T\|_{C[-1,1]\to\mathbb{R}} = 2$.

Osservazione 4.4. Il fatto che un operatore lineare sia o non sia continuo non dipende solamente dalla definizione dell'operatore, ma anche dalle norme scelte per misurare gli elementi degli spazi su cui opera. Ad esempio, consideriamo l'operatore identità $I(f) := f$ che agisce sullo spazio $C[0,1]$. Se lo consideriamo come un operatore da $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ a $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ si vede facilmente che si tratta di un operatore continuo, in quanto abbiamo

$$\|I(f)\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \max_{[0,1]} |f| = \|f\|_\infty .$$

Viceversa, se lo consideriamo come un operatore da $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ a $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ si vede facilmente che si tratta di un operatore non continuo, infatti se lo valutiamo sulle funzioni $f_n(x) := x^n$ abbiamo

$$\|I(f_n)\|_\infty = \max_{[0,1]} x^n = 1, \qquad \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

e dunque

$$\sup_{f\neq 0} \frac{\|I(f)\|_\infty}{\|f\|_1} \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|I(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \sup_{n\in\mathbb{N}} n+1 = +\infty.$$

5. Esercizi

5.1. **Funzioni continue tra spazi metrici.**

Esercizio 5.1. Spiega perché $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.2. Spiega perché $f(x) = \sqrt{|x|}$ è uniformemente continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, ma non è Lipschitziana.

Esercizio 5.3. Sia V uno spazio normato. Definiamo l'applicazione $f\colon V \to V$ ponendo

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{se } \|x\| \leqslant 1, \\ \frac{1}{\|x\|}x, & \text{se } \|x\| \geqslant 1. \end{cases}$$

Verifica che f è Lipschitziana e determina la migliore (minima) costante di Lipschitzianità per f.

5.2. **Operatori lineari.**

Esercizio 5.4. Dimostra che la composizione di due operatori lineari, quando è definita, è un operatore lineare.

Esercizio 5.5. Determina quali tra le seguenti applicazioni da $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sono operatori lineari:

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{2n-1} + x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_5 + x_6, x_7 + x_8, \dots)$;
(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\prod_{k=1}^n x_k)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, x_1x_2x_3x_4, \dots)$;
(3) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (n + x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 + x_1, 2 + x_2, 3 + x_3, 4 + x_4, \dots)$;
(4) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4, \dots)$;
(5) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$;
(6) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$;
(7) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$.

Esercizio 5.6. Determina quali tra le seguenti applicazioni da $C[0,1]$ a $C[0,1]$ sono operatori lineari:

(1) $Tf(x) = 2f(x) - \frac{1}{2}f(1-x)$;
(2) $Tf(x) = f(x^2)$;
(3) $Tf(x) = x + f(x)$;
(4) $Tf(x) = x(f(x))^2$;
(5) $Tf(x) = x^2 f(x)$;
(6) $Tf(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$;
(7) $Tf(x) = \int_0^{x} f(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$;
(8) $Tf(x) = \int_0^{x} \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$;

Esercizio 5.7. Sia P_3 lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Considera l'operatore lineare $T\colon P_3 \to P_3$ definito da

$$Tp(x) = p(2x) + xp'(x).$$

Determina la matrice che rappresenta T rispetto al sistema di coordinate lineari relative alla base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Esercizio 5.8. Sia $k(x)$ una funzione continua su $[a,b]$. Sia $T\colon C[a,b] \to C[a,b]$ l'operatore che ad ogni funzione continua $f(x)$ definita su $[a,b]$ associa la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = k(x)y + f(x), \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Verifica che T è un operatore lineare.

5.3. **Linearità, continuità e limitatezza.**

Esercizio 5.9. Dimostra che se $T\colon V \to W$ è un operatore lineare tra spazi normati e V è uno spazio di dimensione finita allora T è continuo.

Esercizio 5.10. Costruisci degli esempi di operatori lineari NON continui definiti tra le seguenti coppie di spazi normati:

(1) da $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ a $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$;

(2) da $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ a $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$;
(3) da $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ a $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Esercizio 5.11. Sia $C_c(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto in $\mathbb{R}$ munito della norma uniforme $\|f\|_\infty := \max|f|$. Determina se i seguenti funzionali lineari sono continui.

$$f \mapsto f(1); \qquad f \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f(k);$$
$$f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x; \qquad f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.4. **Norma di un operatore.**

Esercizio 5.12. Considera l'operatore $T\colon (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ che alla successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associa la successione $Tx = ((Tx)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove

$$(Tx)_n := \frac{n}{1+n^2} x_n.$$

Dimostra che T è continuo e calcola la sua norma.

Esercizio 5.13. Considera l'operatore lineare $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ definito da

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Verifica che T è continuo utilizzando la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sia sul dominio che sul codominio e calcola la norma dell'operatore.

Esercizio 5.14. Verifica che l'operatore T definito nell'esercizio 5.8 è continuo se si utilizza la norma uniforme su $C[a,b]$ e prova a ottenere delle stime per la sua norma operatoriale.