ANALISI FUNZIONALE
A.A. 2025–2026 (FOSCHI)
ESERCIZI E PROBLEMI

1. Parte prima: esercizi riguardanti i teoremi fondamentali dell'analisi funzionale lineare.

1.1. **Mappa di dualità.** Sia X uno spazio normato reale. Definiamo la *mappa di dualità* di X come l'applicazione F che ad ogni elemento $x \in X$ associa il sottoinsieme del duale X' definito da

$$F(x) := \left\{ \phi \in X' \colon \|\phi\|_{X'} = \|x\|, \phi(x) = \|x\|^2 \right\}.$$

Esercizio 1.1. Verifica che vale anche

$$F(x) := \left\{ \phi \in X' \colon \|\phi\|_{X'} \leqslant \|x\|, \phi(x) = \|x\|^2 \right\}.$$

e dimostra che $F(x)$ è sempre non vuoto, chiuso e convesso.

Esercizio 1.2. Verifica che vale anche

$$F_X(x) := \left\{ \phi \in X' \colon \forall y \in X, \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|x\|^2 \geqslant \phi(y - x) \right\}.$$

e dimostra che si ha $(\phi - \psi)(x - y) \geqslant 0$ quando $x, y \in X$ e $\phi \in F(x)$ e $\psi \in F(y)$. Dimostra che in effetti si ha

$$(\phi - \psi)(x - y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2, \quad \forall x, y \in X, \forall \phi \in F(x), \forall \psi \in F(y).$$

Lo spazio X si dice *strettamente convesso* quando la sua palla unitaria chiusa è strettamente convessa, ovvero quando per ogni coppia $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ e $x \neq y$ e per ogni t c on $0 < t < 1$ si ha $\|(1 - t)x + ty\| < 1$.

Esercizio 1.3. Dimostra che se X è strettamente convesso allora $F_X(x)$ contiene sempre un solo elemento.

Esercizio 1.4. Siano X strettamente convesso, $x, y \in X$, $F(x) = \{\phi\}$, $F(y) = \{\psi\}$. Verifica che se $(\phi - \psi)(x - y) = 0$ allora $\phi = \psi$.

Esercizio 1.5. Considera lo spazio $X := \{u \in C([0, 1]; \mathbb{R}) \colon u(0) = 0\}$ dotato della norma uniforme $\|u\| := \max_{[0,1]} |u(t)|$. Sia $\phi \colon X \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da

$$\phi(u) := \int_0^1 u(t) \, \mathrm{d}t.$$

Verifica che $\phi \in X'$ e calcola la norma $\|\phi\|_{X'}$. Esiste una funzione $u \in X$ tale che $\|u\| = 1$ e $\phi(u) = \|\phi\|_{X'}$?

1.2. **Convessità.**

Esercizio 1.6. Sia X uno spazio normato e sia $C \subseteq X$ un convesso.

- Verifica che l'interno topologico di C è convesso.
- Verifica che la chiusura topologica di C è convessa.
- Dimostra che se $x \in C$ e y è interno a C e $0 < t < 1$ allora il punto $(1 - t)x + ty$ è interno a C.
- Dimostra che se C ha interno non vuoto allora la chiusura dell'interno di C coincide con la chiusura di C.

Esercizio 1.7. Sia $X := C([0,1]$ dotato della norma uniforme $\|u\| := \max_{[0,1]} |u(t)|$. Considera il sottoinsieme

$$C := \left\{ u \in X \colon \int_0^1 |u(t)|^2 \, \mathrm{d}t < 1 \right\},$$

e sia $p \colon X \to \mathbb{R}$ il funzionale di Minkowki associato a C.

- Verifica che C è convesso, simmetrico e che $0 \in C$.
- L'insieme C è limitato in X?
- Dimostra che p è una norma su X.
- La norma p è equivalente alla norma uniforme?

Esercizio 1.8 (Brezis, exercise 1.22, pag. 26). Sia X uno spazio normato e sia A un sottoinsieme chiuso e non vuoto di X. Consideriamo la funzione $d_A \colon X \to \mathbb{R}$ che calcola la distanza di un punto da A,

$$d_A(x) := \operatorname{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|, \quad \forall x \in X.$$

- Dimostra che d_A è Lipschitziana con costante di Lipschitz 1, ovvero che
$$|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$
- Dimostra che d_A è una funzione convessa se e solo se A è un insieme convesso.

Esercizio 1.9 (Continuità delle funzioni convesse, [Brezis, exercise 2.1, pag. 49]). Sia X uno spazio di Banach. Sia $f \colon X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente. Sia $p \in X$ tale che $f(p) < +\infty$.

- Dimostra che esistono due costanti $R > 0$ e $M \in \mathbb{R}$ tali che
$$\|x - p\| \leqslant R \implies f(x) \leqslant M.$$
[Suggerimento: per un appropriato $\rho > 0$ considera gli insiemi
$$F_n := \{x \in X \colon \|x - p\| \leqslant \rho, \varphi(x) \leqslant n\}.]$$
- Dimostra che per ogni $r \in]0, R[$ la funzione f è Lipschitziana sulla palla chiusa $\overline{B(p,r)}$ (con costante di Lipschitz $L := 2(M - f(p))/(R - r)$).

Esercizio 1.10 (Brezis, exercise 1.15, pag. 24). Sia X uno spazio vettoriale normato reale. Sia C un sottoinsieme convesso di X contenente l'origine, $0 \in X$. Definiamo

$$C^\star := \{f \in X' \colon f(x) \leqslant 1, \forall x \in C\}, \qquad C^{\star\star} := \{x \in X \colon f(x) \leqslant 1, \forall f \in C^\star\}.$$

Dimostra che $C^{\star\star} = \overline{C}$. Che cosa è $C^\star$ nel caso in cui C sia un sottospazio lineare di X?

1.3. **Esercizi intorno al Teorema di Hahn-Banach.**

Esercizio 1.11 (Brezis, exercise 1.3, pag. 20). Considera lo spazio

$$X := \{f \colon [0,1] \to \mathbb{C} \colon f \text{ è continua}, f(0) = 0\}.$$

dotato della norma uniforme $\|f\|_X := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Sia $T \colon X \to \mathbb{C}$ il funzionale definito da $T(f) := \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$.

- Verifica che $T \in X'$ e calcola la norma $\|T\|_{X'}$.
- Esiste una funzione $f \in X$ tale che $\|f\|_X = 1$ e $T(f) = \|T\|_{X'}$?

Esercizio 1.12. Nello spazio di Banach $X = \ell^1$ (reale) considera i due sottoinsiemi A e B definiti da

$$A = \left\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1 \colon x_{2k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}\right\},$$
$$B = \left\{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1 \colon y_{2k} = 2^{-k} y_{2k-1} \forall k \in \mathbb{N}\right\}.$$

- Dimostra che la somma $A+B$ è densa in X.
- Verifica che la successione $z=(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da
$$z_{2k-1}=0, \quad z_{2k}=2^{-k}, \quad \forall k\in\mathbb{N};$$
non appartiene a $A+B$.
- Poniamo $D:=A-z$; verifica che l'intersezione $B\cap D$ è vuota. Esiste un iperpiano chiuso in X che separa B da D?

Esercizio 1.13. Si ripeta l'esercizio 1.12 usando come spazio X lo spazio di Banach ℓ^p con $1<p<\infty$ (con norma ℓ^p) oppure lo spazio di Banach c_0 delle successioni infinitesime (con norma uniforme).

Esercizio 1.14. Sia X uno spazio normato. Sia S un sottospazio di X. Sia $\psi\in S'$ Considera gli insiemi
$$\begin{aligned} A &:= \{\varphi\in X' \colon\ \varphi|_S=\psi|_S\,,\ \|\varphi\|_{X'}\leqslant\|\psi\|_{S'}\}\,,\\ B &:= \{\varphi\in X' \colon\ \varphi|_S=\psi|_S\,,\ \|\varphi\|_{X'}=\|\psi\|_{S'}\}\,,\\ C &:= \{\varphi\in X' \colon\ \varphi|_S=\psi|_S\,,\ \|\varphi\|_{X'}\geqslant\|\psi\|_{S'}\}\,,\end{aligned}$$
dove $\varphi|_S$ e $\psi|_S$ indicano le restrizioni dei funzionali al sottospazio S.

- Verifica che A e B sono convessi.
- Spiega perché se S è denso in X allora $A=B=C$.
- Spiega perché se S non è denso in X allora $B\neq C$.

1.4. **Operatore aggiunto.**

Esercizio 1.15. Siano X e Y due spazi normati e sia $T\colon X\to Y$ un operatore lineare e continuo. Definiamo l'*operatore aggiunto* $T^*\colon Y'\to X'$ ponendo
$$T^*[\psi](x):=\psi(Tx), \quad \forall\psi\in Y',\forall x\in X.$$

- Verifica che per ogni $\psi\in Y'$, l'applicazione lineare $x\mapsto T^*[\psi](x)$ è un funzionale continuo su X (e dunque T^* è ben definito).
- Verifica che T^* è continuo e $\|T^*\|_{Y'\to X'}\leqslant\|T\|_{X\to Y}$.
- Verifica che vale l'uguaglianza $\|T^*\|_{Y'\to X'}=\|T\|_{X\to Y}$.

1.5. **Esercizi intorno ai teoremi di Banach-Steinhaus, mappa aperta e grafico chiuso.**

Esercizio 1.16. Sia c_{00} lo spazio delle successioni numeriche definitivamente nulle,
$$c_{00}:=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \exists m\in\mathbb{N},\forall n>m, x_n=0\}\,.$$
Sia $\|\cdot\|$ una *qualsiasi norma* su c_{00}. Per ogni $m\in\mathbb{N}$ sia $V_m:=\operatorname{span}\{e_1,\dots e_m\}$ lo spazio vettoriale generato dai primi m elementi della base canonica,
$$e_k:=(0,\dots,0,\underset{k\text{-esima posizione}}{1},0,\dots)$$

- Spiega perché V_m è chiuso in $(c_{00},\|\cdot\|)$.
- Dimostra che V_m ha interno vuoto in $(c_{00},\|\cdot\|)$.
- Dimostra che $(c_{00},\|\cdot\|)$ non può essere uno spazio di Banach.

Esercizio 1.17 (Brezis, exercise 1.4, pag. 21). Considera lo spazio X delle successioni a valori scalari infinitesime
$$X:=c_o:=\left\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon \lim_{n\to\infty}x_n=0\right\}.$$
dotato della norma uniforme $\|x\|_{c_0}:=\max_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Sia $T\colon X\to\mathbb{C}$ il funzionale definito da $T(x):=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}x_n$.

- Verifica che $T\in X'$ e calcola la norma $\|T\|_{X'}$.
- Esiste una successione $x\in X$ tale che $\|x\|_X=1$ e $T(x)=\|T\|_{X'}$?

Esercizio 1.18 (Brezis, exercise 1.5, pag. 21). Sia X uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita.

- Dimostra (utilizzando il lemma di Zorn) che esiste una base algebrica (base di Hamel) di X i cui elementi hanno tutti norma 1.
- Utilizzando la base di Hamel del punto precedente, costruisci un funzionale lineare $T\colon X \to \mathbb{C}$ che non sia continuo.
- Dimostra che se X è Banach la base di Hamel non può essere numerabile. *[Suggerimento: usa il lemma di Baire.]*

Esercizio 1.19 (Brezis, exercise 2.8, pag. 50). Sia X uno spazio di Banach. Sia $T\colon X \to X'$ un operatore lineare tale che $T(x)(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in X$. Dimostra che T è continuo. *[Suggerimento: applica il teorema del grafico chiuso]*.

Esercizio 1.20 (Brezis, exercise 2.9, pag. 50). Sia X uno spazio di Banach. Sia $T\colon X \to X'$ un operatore lineare tale che $T(x)(y) = T(y)(x)$ per ogni $x, y \in X$. Dimostra che T è continuo.

Esercizio 1.21. Siano X e Y spazi di Banach e $T\colon X \to Y$ un operatore lineare, continuo e suriettivo.

- Sia A un qualsiasi sottoinsieme di X. Dimostra che $T(A)$ è chiuso in Y se e solo se $A + \ker T$ è chiuso in X.
- Sia V un sottospazio chiuso di X e supponiamo che il nucleo $\ker T$ abbia dimensione finita. Domostra che $T(V)$ è chiuso in Y.

Esercizio 1.22. Siano X, Y, Z spazi di Banach e siano $S \in \mathcal{L}(X; Z)$, $T \in \mathcal{L}(Y; Z)$. Supponiamo che

$$\ker S \cap \ker T = \varnothing, \qquad \ker S + \ker T = X.$$

Dimostra che $\ker S$ e $\ker T$ sono chiusi.

Esercizio 1.23. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia E un suo sottoinsieme tale che:

- se $x, y \in E$ allora $x + y \in E$;
- se $x \in E$ e $\lambda > 0$ allora $\lambda x \in E$;
- se $x, -x \in E$ allora $x = 0$.

Definiamo su V la relazione $\lesssim$ ponendo $x \lesssim y$ se e solo se $x - y \in E$.

- Verifica che $\lesssim$ è una relazione d'ordine su V.
- Sia S un sottospazio di V tale che per ogni $x \in V$ esiste $y \in S$ con $x \lesssim y$. Sia $g\colon S \to \mathbb{R}$ lineare e tale che $g(y) \geqslant 0$ per ogni $y \in S \cap E$. Dimostra che esiste una funzione lineare $f\colon V \to \mathbb{R}$ che estende g a tutto V tale che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in E$.

Esercizio 1.24. Sia $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$ e sia $X = L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Sia $w\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}_+$ si ha che $y \mapsto w(x, y) \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Per ogni $f \in X$ definiamo

$$Tf(x) := \int_0^{+\infty} w(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Supponiamo che w sia tale per cui l'operatore T mappa X in X.

- Dimostra che T è continuo da X in X. [Suggerimento: usa il teorema di uniforme limitatezza]
- Verifica che

$$\|T\|_{X \to X} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \int_0^{+\infty} |w(x, y)|\, \mathrm{d}y.$$

Esercizio 1.25 (Brezis, exercise 2.3, pag. 49). Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di operatori lineari e continui $T_n\colon X\to Y$. Supponiamo che per ogni $x\in X$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converga per $n\to\infty$ in Y ad un limite che indichiamo con $T(x)$. Dimostra che se la successione (x_n) converge al punto x in X allora la successione $(T_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $T(x)$ in Y.

Esercizio 1.26 (Bresiz, exercise 2.4, pag. 49). Siano X e Y due spazi di Banach reali. Sia $B\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ una forma bilineare tale che:

- per ogni $x\in X$ fissato, la mappa $y\mapsto B(x,y)$ è continua;
- per ogni $y\in Y$ fissato, la mappa $x\mapsto B(x,y)$ è continua.

Dimostra che esiste una costante $C\geqslant 0$ tale che

$$|B(x,y)|\leqslant C\,\|x\|\,\|y\|\,.$$

[Suggerimento: alla forma bilineare B corrisponde in modo canonico un operatore lineare $T\colon X\to Y'$ che risulta (localmente) limitato.]

Esercizio 1.27. Siano X e Y due spazi di Banach e sia $S\colon X\to Y$ un operatore lineare e continuo. Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Esiste una costante $C>0$ tale che $\|x\|_X\leqslant C\,\|Sx\|_Y$ per ogni $x\in X$.
- S è iniettivo e l'immagine $S(X)$ è un sottospazio chiuso di Y.

1.6. **Sottospazi ortogonali.** Sia X uno spazio di Banach. Dato un sottoinsieme S di X indichiamo l'*ortogonale* di S come il sottoinsieme $S^\perp$ dello spazio duale X' definito da

$$S^\perp:=\{f\in X'\colon f(x)=0,\forall x\in S\}\,.$$

Dato un sottoinsieme T del duale X' indichiamo l'*ortogonale* di T come il sottoinsieme $T^\perp$ dello spazio X definito da

$$T^\perp:=\{x\in X\colon f(x)=0,\forall f\in T\}\,.$$

Esercizio 1.28 (Brezis, proposition 1.9, pag. 9). Dimostra che:

- $S^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale chiuso di X' per ogni sottoinsieme S di X e si ha
$$(S^\perp)^\perp=\overline{\operatorname{span}S};$$
- $T^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale chiuso di X per ogni sottoinsieme T di X' e si ha
$$(T^\perp)^\perp\supseteq\overline{\operatorname{span}T}.$$

Esercizio 1.29 (Brezis, exercise 1.16, pag.24). Considera lo spazio $X=\ell^1$ e il suo duale $X'=\ell^\infty$. Sia $V=c_0$ il sottospazio di X' formato dalle successioni infinitesime. Calcola esplicitamente chi sono $V^\perp$ e $(V^\perp)^\perp$. Verifica che $(V^\perp)^\perp\neq V$.

Esercizio 1.30 (Bresiz, proposition 2.14, corollary 2.15, theorem 2.16, pag. 40–42). Sia X uno spazio di Banach e siano V,W due sottospazi chiusi di X. Dimostra che valgono i seguenti risultati:

- $V\cap W=(V^\perp+W^\perp)^\perp$;
- $V^\perp\cap W^\perp=(V+W)^\perp)$;
- $(V\cap W)^\perp\supseteq\overline{V^\perp+W^\perp}$;
- $(V^\perp\cap W^\perp)^\perp=\overline{V+W}$;
- $V+W$ chiuso in X $\iff$ $V^\perp+W^\perp$ chiuso in X' $\iff$ $V+W=(V^\perp\cap W^\perp)^\perp$ $\iff$ $V^\perp+W^\perp=(V\cap W)^\perp$.

2. Parte seconda: esercizi riguardanti topologie deboli

2.1. **Topologie deboli.**

Esercizio 2.1 (Brezis, exercise 3.1, pag. 79). Sia X uno spazio di Banach e sia K un sottoinsieme di X compatto rispetto alla topologia debole di X. Dimostra che K è limitato.

Esercizio 2.2 (Brezis, exercise 3.3, pag. 80). Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio di Banach. Dimostra che la chiusura di C nella topologia forte coincide con la chiusura di C nella topologia debole.

Esercizio 2.3 (Brezis, exercise 3.5, pag. 80). Sia K un sottoinsieme compatto rispetto alla topologia forte di uno spazio di Banach. Dimostra che se una successione in K converge in senso debole allora converge anche in senso forte.

Esercizio 2.4 (Brezis, exercise 3.7, pag. 80). In uno spazio di Banach, sia A un sottoinsieme chiuso rispetto alla topologia debole e sia B un sottoinsieme compatto rispetto alla topologia debole. Dimostra che $A + B$ è chiuso rispetto alla topologia debole. Se assumiamo inoltre che A e B siano convessi non vuoti e disgiunti, dimostra che A e B sono strettamente separati da un iperpiano chiuso.

Esercizio 2.5 (Bresiz, exercise 3.10, pag. 81). Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $T\colon X \to Y$ un operatore lineare e continuo. Considera l'operatore aggiunto $T^\star\colon Y' \to X'$ definito da

$$T^\star(g)(x) := g(Tx), \quad \forall g \in Y', \forall x \in X.$$

- Verifica che $T^\star$ è continuo da Y' dotato della topologia forte a X' dotato della topologia forte.
- Verifica che $T^\star$ è continuo da Y' dotato della topologia debole a X' dotato della topologia debole.

2.2. **Convergenza debole.**
Ricordiamo che l'*inviluppo convesso* di un sottoinsieme E di uno spazio normato X è il più piccolo sottoinsieme convesso di X che contiene E, ovvero coincide con l'intersezione di tutti i convessi che contengono E.

Esercizio 2.6 (Brezis, exercise 3.13, pag. 82). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio di Banach. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia C_n la chiusura dell'inviluppo convesso dell'insieme $\{x_k : k \geqslant n\}$.

- Dimostra che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente al punto p allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{p\}$.
- Supponendo che lo spazio sia riflessivo, dimostra che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{p\}$ allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente al punto p.

Esercizio 2.7 (Brezis, exercise 3.16, pag. 83). Sia X uno spazio di Banach.

- Dimostra che se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in X' tale che per ogni $x \in X$ la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, allora esiste un funzionale $f \in X'$ tale che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\star$-debolmente ad f.
- Supponendo che X sia riflessivo, dimostra che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in X tale che per ogni $f \in X'$ la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, allora esiste un punto $x \in X$ tale che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente ad x.
- Costruisci un esempio in uno spazio di Banach non riflessivo di una successione per la quale la conclusione del punto precedente è falsa. *[Suggerimento: puoi provare con $X = c_0$ e x_n la successione formata da n volte 1 e poi tutti 0.]*

Esercizio 2.8 (Somme di Cesaro e convergenza debole [Brezis, exercise 3.2, pag. 79]). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio di Banach debolmente convergente ad un punto p. Considera la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme di Cesaro definite da

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Dimostra che anche $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente al punto p.

Esercizio 2.9 (Brezis, exercise 3.4, pag. 80). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio di Banach debolmente convergente ad un punto p. Sia C l'inviluppo convesso dell'insieme dei punti della successione. Dimostra che esiste una successione di punti di C che converge fortemente a p.

Esercizio 2.10. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio di Banach X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo l'insieme C_n definito come la chiusura (in senso forte) dell'inviluppo convesso dell'insieme $\{x_k : k \geqslant n\}$.

- Dimostra che se x_n converge debolmente a p allora si ha che

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{p\}\,. \tag{1}$$

- Supponendo che X sia riflessivo, dimostra che se la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e vale la condizione (1) allora x_n converge debolmente a p.
- Supponendo che X abbia dimensione finita, dimostra che la condizione (1) implica che x_n converge a p (anche senza supporre che la successione sia limitata).
- Costruisci un esempio esplicito di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2 che non sia limitata e per la quale si ha che vale la condizione (1) con $p = 0$.

Esercizio 2.11. Una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *debolmente di Cauchy* quando per ogni funzionale lineare e continuo $\varphi \in X'$ si ha che la successione $(\varphi(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy nel campo degli scalari. Dimostra che:

- Ogni successione debolmente di Cauchy è limitata;
- In uno spazio di Banach riflessivo, ogni successione debolmente di Cauchy è debolmente convergente.

2.3. **Questioni di riflessività, separabilità, metrizzabilità.**

Esercizio 2.12. Sia $T : X \to Y$ una isometria suriettiva tra due spazi di Banach. Dimostra che X è riflessivo se e solo se Y è riflessivo.

Esercizio 2.13. Siano (M_1, d_1) e (M_2, d_2) due spazi metrici e sia $f : M_1 \to M_2$ è una funzione continua. Dimostra che se M_1 è separabile allora $(f(M_1), d_2)$ è separabile.

Esercizio 2.14. Considera l'applicazione $f : [0, 1] \to L^\infty([0, 1])$ che ad ogni $t \in [0, 1]$ associa $f(t) := \chi_{[0,t]}$, la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, t]$. Dimostra che lo spazio metrico $\big(f([0, 1]), \|\cdot\|_\infty\big)$ non è separabile.

Esercizio 2.15. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita. Dimostra che X con la topologia debole non è metrizzabile. Ecco di seguito una traccia che puoi provare a seguire.

- Supponiamo per assurdo che esista una metrica d su X che genera la stessa topologia della topologia debole, e quindi per ogni $n \in N$ la palla metrica $\{x \in X : d(x, 0) < 1/n\}$ contiene un intorno debole basico di 0.
- Dimostra che allora esiste una successione $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nel duale X' tale che ogni funzionale $\psi \in X'$ è combinazione lineare finita di funzionali ϕ_n.
- Dedurre dal punto precedente che il duale X' ha dimensione finita e quindi X non può avere dimensione infinita.

Esercizio 2.16. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita. Dimostra che:

- Se il duale X' è separabile allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tale che

$$\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{e } x_n \text{ converge debolmente a } 0. \tag{2}$$

  [Suggerimento: pensa a come è fatta la chiusura debole della sfera unitaria $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ e usa uno dei teoremi che legano separabilità e metrizzabilità delle palle unitarie.]
- Se X è riflessivo allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X che verifica le condizioni in (2). [Suggerimento: osserva che puoi restringerti ad un sottospazio separabile di X e ciò ti permette di ricollegarti al punto precedente.]

Esercizio 2.17 (Brezis, exercise 3.26, pag. 85). Sia X uno spazio di Banach separabile. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i cui punti formano un sottoinsieme denso in X. Considera l'operatore lineare $T\colon \ell^1 \to X$ definito da

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k, \quad \forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

Dimostra che T è continuo e suriettivo.

Esercizio 2.18 (Teorema del punto di minima distanza per spazi riflessivi.). Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia V un suo sottospazio chiuso. Dato $q \in X$, consideriamo la funzione $\varphi(x) := \|x - q\|$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $K_\lambda := \{x \in V : \varphi(x) \leqslant \lambda\}$.

- Verifica che φ è continua, convessa e coerciva.
- Spiega perché gli insiemi K_λ sono limitati e debolmente chiusi.
- Spiega perché K_λ è debolmente compatto.
- Osserva che esiste un $\lambda_\star \in \mathbb{R}$ tale che $K_{\lambda_\star}$ non è vuoto.
- Deduci che esiste un $p \in K_{\lambda_\star}$ tale che $\varphi(p) = \min_{x\in K_{\lambda_\star}} \varphi(x)$.
- Verifica che tale p è un punto di V con minima distanza da q,

$$\|p - q\| = \min_{x\in V} \|x - q\|.$$

2.4. **Questioni di uniforme convessità.**

Esercizio 2.19 (Brezis, exercise 3.29, pag. 86). Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso. Dimostra che per ogni $M > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta$$

per ogni coppia di vettori $x, y \in X$ tali che $\|x\| \leqslant M$, $\|y\| < M$ e con $\|x - y\| > \varepsilon$.

Esercizio 2.20. Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso e sia $\overline{B}$ la sua palla unitaria chiusa.

- Dimostra che per ogni $\varepsilon > 0$ e $0 < \alpha < 1/2$ esiste $\delta > 0$ (che puo dipendere da ε e α) tale che: per ogni $x, y \in B$ con $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ e ogni $t \in [\alpha, 1-\alpha]$ si ha $\|(1-t)x + ty\| \leqslant 1 - \delta$. [Suggerimento: quando $t \in [\alpha, 1/2]$ può essere utile considerare il punto z per il quale si ha $(1-t)x + ty = \frac{1}{2}(x + z)$.]
- Deduci dal punto precedente che X è strettamente convesso.

3. Parte terza: esercizi su spazi L^p e spazi di Hilbert

3.1. **Uniforme convessità di L^p.**

Esercizio 3.1. Ecco una traccia per una dimostrazione diretta della uniforme convessità di L^p quando $1 < p < 2$.

- Verifica che per ogni $p > 1$ si ha che esiste una costante positiva C_p tale che
$$0 < C_p \leqslant \frac{(|t|-1)^{1-\frac{p}{2}}\left(|t|^p + 1 - 2^{1-p}\,|t+1|^p\right)^{\frac{p}{2}}}{|1-t|^p}, \quad \forall t \in]-1,1[.$$
[Suggerimento: studia il comportamento asintotico per $t \to 1^-$ della funzione $\frac{\frac{t^p+1}{2} - \left(\frac{t+1}{2}\right)^p}{(t-1)^2}$.]
- Deduci dal punto precedente la seguente disuguaglianza:

$$(3) \qquad |z-w|^p \leqslant \frac{1}{C_p}\left(|z|^p + |w|^p\right)^{1-\frac{p}{2}} \left(|z|^p + |w|^p - 2\left|\frac{z+w}{2}\right|^p\right)^{\frac{p}{2}}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

- Utilizzando la disuguaglianza (3) e la disuguaglianza di Hölder verifica che L^p è uniformemente convesso.

3.2. **Dualità per L^p.**

Esercizio 3.2. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Sia a una funzione misurabile sull'aperto Ω di $\mathbb{R}^d$. Supponiamo che $au \in L^1(\Omega)$ per ogni $u \in L^p(\Omega)$. Dimostra che $a \in L^{p'}(\Omega)$ con p' esponente coniugato di p.

Esercizio 3.3 (Brezis, exercise 2.7, pag. 50). Sia $p \in [1, +\infty]$ e sia p' l'esponente coniugato di p. Sia $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di valori scalari. Supponiamo che $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n x_n| < \infty$ per ogni successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Dimostra che $\alpha \in \ell^{p'}$.

Esercizio 3.4. Considera gli spazi vettoriali
$$X := L^{3/2}(\mathbb{R}) \cap L^3(\mathbb{R}), \quad Y := L^{3/2}(\mathbb{R}) + L^3(\mathbb{R}).$$
Definiamo
$$\|f\|_X := \|f\|_{L^{3/2}} + \|f\|_{L^3}\,, \qquad \|f\|_X := \inf_{\substack{f_1 \in L^{3/2} \\ f_2 \in L^3 \\ f_1 + f_2 = f}} \|f_1\|_{L^{3/2}} + \|f_2\|_{L^3}\,.$$
Verifica che:

- $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi di Banach.
- Y si immerge in modo naturale in X'.
- X si immerge in modo naturale in Y'.

[Le immersioni naturali degli ultimi due punti possono essere realizzate tramite l'identificazione di una funzione f con il funzionale lineare T_f definito (quando possibile) dalla forma canonica di dualità, $T_f(g) := \int fg$.]

3.3. **Successioni di funzioni in L^p.**

Esercizio 3.5. Considera la successione di funzioni
$$f_n(x) := \sin(nx), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1].$$
Sia $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

- Verifica che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^p([0,1])$.
- Verifica che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in senso debole a 0 in $L^p([0,1])$.
- Verifica che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in senso debole-$\star$ a 0 in $L^\infty([0,1])$.

Esercizio 3.6. Siano $1 < p < \infty$ e $\alpha > 0$. Considera la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p([0,1])$ definita da $f_n = n^\alpha \chi_{[0,1/n]}$. Verifica che:

- Per quali α e p si ha che f_n converge fortemente a 0 in $L^p([0,1])$?
- Per quali α e p si ha che f_n converge fortemente debolmente a 0 in $L^p([0,1])$?

Esercizio 3.7. Considera la successione di funzioni $f_n(x) := \mathrm{e}^{-x^2}\big(\cos(nx)\big)^2$, definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Sia $1 < p < +\infty$.

- Verifica che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge in norma in $L^p(\mathbb{R})$.
- La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possiede sottosuccessioni che convergono in norma in $L^p(\mathbb{R})$?
- Verifica che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $L^p(\mathbb{R})$.
- Qual'è il limite debole della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mathbb{R})$?

Esercizio 3.8 (Brezis, exercise 4.19-1, pag. 124)*.* Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $L^p(\mathbb{R})$ e sia $f \in {}^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$. Supponiamo che f_n converga debolmente in L^p ad f e che $\|f_n\|_p$ converga a $\|f\|_p$ per $n \to \infty$. Dimostra che f_n converge ad f in norma L^p.

Esercizio 3.9 (Brezis, exercise 4.19-2, pag. 124)*.* Costruisci una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R})$ tale che:

- $f_n(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (f_n) converge debolmente in L^1 ad una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$;
- $\|f_n\|_1$ converge a $\|f\|_1$;
- (f_n) non converge in norma L^1 ad f.

Esercizio 3.10. Sia $1 < p < \infty$. Considera la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p([0,1])$ definita da

$$f_n(x) = n^{\frac{1}{p}}\mathrm{e}^{-nx}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1].$$

Verifica che:

- $f_n(x)$ converge puntualmente a 0 quasi ovunque su $[0,1]$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $L^p([0,1])$;
- f_n non è convergente in senso forte in $L^p([0,1])$;
- dato $g \in L^{p'}([0,1])$, la successioni degli integrali $\int_0^1 f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ converge a zero per ogni $g \in L^{p'}([0,1])$;
- f_n converge debolmente a 0 in $L^p([0,1])$.

Esercizio 3.11. Discuti le varie proprietà di convergenza (puntuale, debole, forte) della successione di funzioni $f_n(x) = ne^{nx}$ in $L^1([0,1])$.

Esercizio 3.12. Sia $1 < p < \infty$ e sia $g \in L^p(\mathbb{R})$. Considera la successione delle traslate $g_n(x) := g(x-n)$, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Verifica che $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a 0 in $L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.13. Sia $g \in C(\mathbb{R})$ tale che $g(x) \to 0$ per $|x| \to 0$. Considera la successione delle traslate $g_n(x) := g(x-n)$, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Verifica che $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 nella topologia debole-$\star$ di $L^\infty(\mathbb{R}) = (L^1(\mathbb{R}))'$.

Esercizio 3.14. Considera la successione $g_n = \chi_{[n,n+1]}$ in $L^1(\mathbb{R})$. Dimostra che $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non possiede sottosuccessioni debolmente convergenti in $L^1(\mathbb{R})$. [Suggerimento: prova a testare una generica sottosuccessione $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con il funzionale corrispondente alla funzione $h := \sum_k g_{n_k} \in L^\infty$.]

Esercizio 3.15. Considera la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty([-1,1])$ definita da

$$f_n(x) := \mathrm{e}^{-nx^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in [-1,1].$$

- Verifica che f_n converge a zero nella topologia debole-$\star$ di $L^\infty([-1,1])$.
- Verifica che f_n non converge a zero nella topologia debole di $L^\infty([-1,1])$. [Suggerimento: puoi testare la successione con un funzionale su $L^\infty([-1,1])$ che estende il funzionale su $C([-1,1])$ definito da $\phi(f) = f(0)$.]

Esercizio 3.16 (Brezis, exercise 3.18, pag. 83). Per ogni $n \in N$ sia e^n la successione con $e^n_k = 0$ se $k \neq n$ e $e^n_n = 1$,

$$e^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad \text{con l'1 nella } n\text{-esima posizione.}$$

- Dimostra che e^n converge debolmente a 0 in ℓ^p per ogni $p \in]1, \infty]$.
- Dimostra che nessuna sottosuccessione di (e^n) converge debolmente in ℓ^1.

Esercizio 3.17. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni $x_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ che converge debolmente alla successione $x_\star = (x_{\star,k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Dimostra che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ delle coordinate k-esime converge a $x_{\star,k}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.18. Considera la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di successioni $x_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ definita da

$$x_{n,k} = \begin{cases} 1/k & \text{se } 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{se } 1 \leqslant n < k. \end{cases}$$

- Verifica che (x_n) converge in senso forte in ℓ^2.
- Verifica che (x_n) non converge in senso debole in ℓ^1.

[Suggerimento: può tornare utile l'esercizio 3.17.]

Esercizio 3.19. Sia $T\colon L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ un operatore lineare con la seguente proprietà: quando una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di $L^p(\mathbb{R})$ converge puntualmente quasi ovunque ad una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$ allora la successione $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente quasi ovunque alla funzione $Tf \in L^p(\mathbb{R})$. Dimostra che T è un operatore continuo.

3.4. **Lo spazio delle successioni convergenti.** Considera in ℓ^∞ il sottospazio c delle successioni convergenti,

$$c := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \exists \lim_{n\to\infty} x_n \right\}.$$

Esercizio 3.20. Verifica che:

- c è chiuso in ℓ^∞;
- c non è riflessivo;
- c è separabile.

Esercizio 3.21. Lo scopo di questo esercizio è di far vedere che il duale di $(c, \|\cdot\|_\infty)$ si può identificare con $(\ell^1 \times \mathbb{R})$. Dati $y \in \ell^1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ possiamo costruire un funzionale $\phi_{y,\lambda}\colon c \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\phi_{y,\lambda}(x) := \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Dimostra le seguenti affermazioni:

- $T_{y,\lambda} \in c'$;
- $\|T_{y,\lambda}\|_{c'} = |\lambda| + \|y\|_{\ell^1}$;
- L'applicazione $\Phi\colon \ell^1 \times \mathbb{R} \to c'$ che alla coppia (y, λ) associa il funzionale $\Phi(y, \lambda) := \phi_{y,\lambda}$ è suriettiva.

4. Proprietà topologiche in L^p

Esercizio 4.1. Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua a supporto compatto non identicamente nulla e a valori non negativi. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Considera gli insiemi

$$A := \{f \in L^p(\mathbb{R})\colon\ |f(x)| \leqslant g(x) \text{ quasi ovunque}\},$$
$$B := \{f \in L^p(\mathbb{R})\colon\ |f(x)| \geqslant g(x) \text{ quasi ovunque}\}.$$

Determina se A e B sono chiusi, debolmente chiusi, compatti, debolmente compatti in $L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 4.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ con misura di Lebesgue finita. Sia $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostra le seguenti proposizioni:

- Se $A \subseteq L^p(\Omega)$ è chiuso rispetto alla topologia debole di $L^p(\Omega)$ allora $A \cap L^\infty(\Omega)$ è chiuso rispetto alla topologia debole-$\star$ di $L^\infty(\Omega)$.
- Sia $B \subseteq L^\infty(\Omega)$ un convesso e limitato in $L^\infty(\Omega)$. Una funzione $f \in L^\infty(\Omega)$ sta nella chiusura debole-$\star$ di B se e solo se esiste una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n \in B$ che converge ad f in norma L^p.

4.1. **Altri esercizi tratti dal Brezis.**

Esercizio 4.3 (Brezis, exercise 3.19, pag. 83). Siano $p, q \in]1, \infty[$. Sia $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$|a(t)| \leqslant |t|^{p/q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sia A l'operatore (non lineare) che alla successione $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ associa la successione

$$A(x) := \big(a(x_1), a(x_2), a(x_3), \dots\big).$$

- Dimostra che A è una mappa continua da ℓ^p (con topologia forte) in ℓ^q (con topologia forte).
- Dimostra che se $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $x^n \in \ell^p$ debolmente convergente alla successione x allora $(A(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in ℓ^q debolmente convergente alla successione $A(x)$.
- Deduci che A è continua come funzione dalla palla chiusa unitaria di ℓ^p dotata della topologia indotta dalla topologia debole allo spazio ℓ^q dotato della topologia debole.

Esercizio 4.4 (Brezis, exercise 4.7, pag. 119). Siano $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Sia $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Supponiamo che per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ si ha che $af \in L^q(\mathbb{R})$. Dimostra che $a \in L^r(\mathbb{R})$ dove r è determinato dalla formula

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

[Suggerimento: usa il teorema del grafico chiuso.]

Esercizio 4.5 (Brezis, exercise 4.8, pag. 119). Sia V un sottospazio chiuso di $L^1(\mathbb{R})$. Supponiamo anche che

$$V \subseteq \bigcup_{q>1} L^q(\mathbb{R}).$$

- Dimostra che esiste un esponente $p > 1$ tale che $V \subseteq L^p(\mathbb{R})$. *[Suggerimento: per ogni $n \in \mathbb{N}$ considera l'insieme*
$$V_n := \Big\{ f \in V \cap L^{1+1/n}(\mathbb{R})\colon \|f\|_{1+1/n} \leqslant n \Big\}.]$$
- Dimostra che esiste una costante $C \geqslant 0$ tale che $\|f\|_p \leqslant C\|f\|_1$ per ogni $f \in V$.

Esercizio 4.6 (Brezis, exercise 4.23, pag. 125). Sia $1 \leqslant p < \infty$. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Considera l'insieme

$$C := \{u \in L^p(\mathbb{R})\colon u(x) \geqslant f(x) \text{ quasi ovunque}\}.$$

Dimostra che:

- C è convesso;
- C è chiuso nella topologia forte;
- C è chiuso nella topologia debole.

4.2. **Problemi in spazi di Hilbert.**

Esercizio 4.7. Sia $T\colon H \to H$ un operatore lineare che agisce su uno spazio di Hilbert H complesso. Supponiamo che

$$\langle Tx, y\rangle = \mathrm{i}\langle x, Ty\rangle, \qquad \forall x, y \in H,$$

dove i è l'unità immaginaria. Dimostra che T è continuo.

Esercizio 4.8 (Brezis, exercise 5.9, pag. 148). Siano A e B due sottoinsiemi chiusi, non vuoti, convessi e disgiunti di uno spazio di Hilbert e supponiamo inoltre che B sia limitato. Considera l'insieme $C = A - B$ delle differenze tra punti di A e punti di B.

- Dimostra che C è chiuso e convesso.
- Sia $p_\star$ il punto di C con norma minima, che possiamo scrivere come $p_\star = a_\star - b_\star$ per qualche punto $a_\star \in A$ e $b_\star \in B$. Dimostra che
$$\|a_\star - b_\star\| = \operatorname{dist}(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \|a - b\|,$$
e determina il punto di A di minima distanza da $b_\star$ e il punto di B di minima distanza da $a_\star$.
- Supponiamo che $\left\|\widetilde{a} - \widetilde{b}\right\| = \operatorname{dist}(A, B)$ per una coppia di punti $\widetilde{a} \in A$ e $\widetilde{b} \in B$. Dimostra che $p_\star = \widetilde{a} - \widetilde{b}$.
- Fai un esempio esplicito di insiemi A e B per i quali la coppia $(a_\star, b_\star)$ è unica.
- Fai un esempio esplicito di insiemi A e B per i quali la coppia $(a_\star, b_\star)$ non è unica.
- Trova una dimostrazione semplice della seconda forma geometrica del teorema di Hahn-Banach per il caso di uno spazio di Hilbert.

Esercizio 4.9 (Brezis, exercise 5.28, pag. 154). Sia V un sottospazio vettoriale denso in uno spazio di Hilbert H separabile. Dimostra che V contiene una base ortonormale di H.

Esercizio 4.10. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi chiusi, convessi e non vuoti di H tale che

- ogni sottoinsieme contiene il successivo, $C_{n+1} \subseteq C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- la loro intersezione è non vuota, $C_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$.

Dato un punto $x \in H$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in C_n$ il punto di C_n che ha minima distanza da x,

$$\|x_n - x\| = \operatorname{dist}(C_n, x) := \min_{y \in C_n} \|y - x\|.$$

Dimostra che:

- l'intersezione C_∞ è chiusa e convessa;
- la successione numerica $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente e superiormente limitata;
- la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in H;
- ogni sottosuccessione della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente ad un punto di C_∞;
- se una sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente ad un punto allora tale punto è necessariamente il punto x_∞ di C_∞ con minima distanza da x;
- tutta la successione (x_n) converge fortemente al punto x_∞.