ANALISI FUNZIONALE (A.A. 2023-2024)
INTRODUZIONE
PRINCIPIO DI DIRICHLET

DAMIANO FOSCHI

Molti problemi matematici hanno come oggetto di studio delle funzioni; ad esempio: nelle equazioni differenziali le incognite sono funzioni, nel calcolo delle variazioni si cercano minimi di funzionali definiti su insiemi di funzioni, in meccanica quantistica lo stato di una particella è rappresentato da una funzione che descrive in termini probabilistici posizione e momento della particella.

Valutando proprietà di regolarità (continuità, differenziabilità, analiticità) e di sommabilità (integrabilità, decadimento all'infinito) si possono creare diverse classi di funzioni che solitamente formano degli spazi vettoriali di dimensione infinita.

In ogni spazio vettoriale di dimensione finita esiste un'unica topologia compatibile con la struttura lineare, che è poi quella indotta dalla struttura euclidea. In uno spazio vettoriale di dimensione infinita invece è possibile definire diverse strutture topologiche e diverse strutture metriche non equivalenti tra loro. In spazi vettoriali di funzioni succede dunque che nozioni topologiche o metriche, come la convergenza di successioni, la continuità di funzionali, la compattezza di sottoinsiemi, non possono essere date per scontate, ma dipendono dalla struttura topologica che si sceglie sullo spazio. L'Analisi Funzionale (lineare) è il campo della matematica che si occupa di studiare la struttura degli spazi vettoriali di dimensione infinita dotati di una struttura topologica compatibile con la struttura lineare e delle applicazioni lineari tra tali spazi.

1. Equazione di Poisson con dati al bordo di Dirichlet

Per comprendere come si possano manifestare i problemi a cui l'Analisi Funzionale cerca di dare risposta o ai quali cerca di offrire strumenti di indagine consideriamo ad esempio il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

1.1. **Principio di Dirichlet.** Sia Ω un dominio aperto e limitato in $\mathbb{R}^d$, con frontiera $\partial\Omega$ "sufficientemente regolare". Date una funzione continua $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definita su Ω e una funzione continua $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definita sul bordo $\partial\Omega$, ci poniamo il problema di determinare una funzione $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definita sulla chiusura $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ che risolva l'equazione di Poisson,

$$\Delta u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1}$$

e che assuma come valori al bordo quelli di g,

$$u(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Problemi di questo tipo si incontrano ad esempio nella determinazione del potenziale gravitazionale nella teoria Newtoniana della gravitazione, oppure nella determinazione del potenziale del campo elettrico in elettrostatica.

Con il simbolo Δ indichiamo il *Laplaciano* su $\mathbb{R}^d$, ovvero l'operatore differenziale del secondo ordine che si ottiene componendo l'operatore gradiente con l'operatore

Date: ultimo aggiornamento, 19 settembre 2023.

di divergenza:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_d}^2}.$$

Ricordiamo anche che il *gradiente* di un campo scalare u è il campo vettoriale formato dalle derivate parziali di u,

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right);$$

mentre la *divergenza* di un campo vettoriale $V = (V_1, V_2, \dots, V_d)$ è il campo scalare ottenuto come traccia della matrice jacobiana di V,

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial V_d}{\partial x_d}.$$

Riguardo al problema (1)-(2), le tipiche domande a cui si può cercare di dare risposta possono riguardare: l'esistenza e l'unicità per la soluzione u; il legame tra le proprietà di regolarità della soluzione e quelle dei dati del problema Ω, f, g; la dipendenza della soluzione da piccole variazioni dei dati.

Proviamo ad occuparci del problema dell'esistenza di soluzioni. Siccome l'equazione (1) è una equazione differenziale del secondo ordine è naturale cercare soluzioni di classe C^2. Consideriamo allora l'insieme delle funzioni C^2 la cui traccia sul bordo di Ω coincide con la funzione g,

$$X_g := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \colon v(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \right\}; \tag{3}$$

supponiamo anche che questo insieme X_g non risulti vuoto, ovvero assumiamo che esista almeno un prolungamento continuo di g che sia di classe C^2 su Ω. Definiamo anche l'analogo insieme delle funzioni a traccia nulla,

$$X_0 := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \colon v(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \right\}.$$

Se $u \in X_g$ è una soluzione dell'equazione di Poisson (1) per ogni funzione $h \in X_0$ avremo che

$$0 = \int_\Omega h(f - \Delta u)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega hf\, \mathrm{d}x - \int_\Omega h \Delta u\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Per capire come manipolare l'ultimo integrale, apriamo una parentesi per ricordare cosa dice il teorema della divergenza e come da esso si può ottenere una formula di integrazione per parti per integrali multipli.

Teorema 1.1 (Teorema della divergenza)**.** *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Sia $V \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale di classe C^1. Allora*

$$\int_\Omega \nabla \cdot V\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} V \cdot n\, \mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

dove $n \colon \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ descrive il versore normale esterno ad Ω e $\mathrm{d}\sigma$ indica la misura $d-1$ dimensionale sull'ipersuperficie $\partial\Omega$.

Tale teorema si può anche estendere al caso in cui la frontiera sia C^1 a tratti, come ad esempio succede quando Ω è un dominio semplice o un dominio semplicemente decomponibile; più in generale si può estendere al caso in cui Ω sia un insieme misurabile con perimetro finito.

Se V è un campo vettoriale e h una funzione scalare, entrambi di classe C^1, dalla formula di Leibniz per la derivata del prodotto ricaviamo che

$$\nabla \cdot (hV) = (\nabla h) \cdot V + h \nabla \cdot V.$$

Mettendo il campo vettoriale hV al posto del campo V nella formula (5), usando la formula per la derivata del prodotto e usando la linearità dell'integrale, possiamo

facilmente ricavare la seguente generalizzazione della formula di integrazione per parti
$$\int_\Omega h\nabla\cdot V \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} hV\cdot n \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega (\nabla h)\cdot V \,\mathrm{d}x.$$
Quando $h \in X_0$ è una funzione che si annulla sulla frontiera del dominio e $V = \nabla u$ è il gradiente di una funzione scalare, abbiamo $\nabla\cdot V = \Delta u$ e la formula di integazione per parti diventa

$$\int_\Omega h\Delta u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u) \,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Torniamo ai nostri calcoli, se utilizziamo (6) la formula (4) diventa

$$\int_\Omega hf \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u) \,\mathrm{d}x = 0, \tag{7}$$

e vale per ogni funzione $h \in X_0$. Scegliamo ora $h = u - w$, dove w è una qualsiasi funzione in X_g; la differenza di due funzioni in X_g appartiene a X_0 e dunque $h \in X_0$. La formula (7) diventa

$$\int_\Omega uf \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega wf \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla w)\cdot(\nabla u) \,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

e vale per ogni $w \in X_g$. Ora utilizziamo il fatto che un prodotto è sempre minore della media dei quadrati dei due fattori, e quindi in particolare
$$(\nabla w)\cdot(\nabla u) \leqslant \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2;$$
sostituendo questa disuguaglianza nell'ultimo integrale in (8) otteniamo
$$\int_\Omega uf \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega wf \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x.$$
Introduciamo il *funzionale di Dirichlet* definito da

$$E(v) := \int_\Omega vf \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

I calcoli che abbiamo svolto ci dicono che se u è soluzione del problema (1)-(2) allora abbiamo $E(u) \leqslant E(w)$ per ogni $w \in X_g$ e dunque u è un punto di minimo in X_g per il funzionale E,
$$E(u) = \min_{w\in X_g} E(w).$$

Proviamo ora a fare il percorso inverso, supponiamo che ora u sia un punto di minimo in X_g per il funzionale di Dirichlet E. Abbiamo che
$$E(u) \leqslant E(u+th), \quad \forall h \in X_0,\, t \in \mathbb{R},$$
in quanto $u + th \in X_g$. Una volta fissato $h \in X_0$ la quantità $E(u + th)$ è un polinomio di secondo grado in t,
$$\begin{aligned} E(u+th) &= \int_\Omega (u+th)f \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + t\nabla h|^2 \,\mathrm{d}x = \\ &= E(u) + t\left(\int_\Omega hf \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u) \,\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}t^2\int_\Omega |\nabla h|^2 \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$
che assume il valore minimo $E(u)$ quando $t = 0$; dunque la derivata di tale polinomio si deve annullare per $t = 0$. Questo significa che
$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} E(u+th) = \int_\Omega hf \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega h(f - \Delta u) \,\mathrm{d}x,$$

per ogni $h \in X_0$. Questo implica che la funzione continua $f - \Delta u$ deve essere identicamente nulla, e quindi u è una soluzione dell'equazione di Poisson. Ciò segue applicando a $f - \Delta u$ la seguente proposizione.

Proposizione 1.2 (Lemma di annullamento)**.** *Sia $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^d$. Se $\int_\Omega f h \, \mathrm{d}x = 0$ per ogni funzione test $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$ che sia continua e con supporto compatto contenuto in Ω, allora f è identicamente nulla su Ω.*

Dimostrazione. Se in un punto $p \in \Omega$ avessimo $f(p) > 0$, essendo f continua per il principio di permanenza del segno avremmo che esiste un intorno U di p e contenuto in Ω nel quale si ha $f(x) > 0$. Scegliamo ora una funzione h che sia continua, non negativa, con supporto compatto contenuto in U e con $h(p) > 0$, avremmo allora una contraddizione in quanto risulterebbe

$$0 = \int_\Omega f h \, \mathrm{d}x = \int_U f h \, \mathrm{d}x > 0.$$

Una cosa analoga si verifica se si suppone $f(p) < 0$. □

Riassumiamo nella seguente proposizione quello che abbiamo ottenuto dai calcoli effettuati in questa sezione.

Proposizione 1.3 (Principio di Dirichlet)**.** *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare e sia $u \in X_g = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) \colon u(x) = g(x), \, \forall x \in \partial\Omega\}$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(A) *u è soluzione dell'equazione di Poisson su Ω,*

$$\Delta u = f;$$

(B) *per ogni $h \in X_0$ si ha che*

$$\int_\Omega h f \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h) \cdot (\nabla u) \, \mathrm{d}x = 0; ,$$

(C) *u è un punto di minimo per il funzionale di Dirichlet su X_g,*

$$E(u) = \min_{w \in X_g} E(w), \quad E(v) := \int_\Omega v f \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Abbiamo così mostrato come lo studio di un'equazione differenziale sia equivalente allo studio di un problema di minimo di un funzionale. Osserviamo inoltre che nella formulazione dei punti (B) e (C) le derivate seconde di u non appaiono da nessuna parte; questo fatto ci permette di formulare un concetto più *debole* di soluzione dell'equazione del punto (A). Per esprimere le proposizioni (B) o (C) ci basta infatti imporre condizioni solo sulle derivate prime, richiedendo che $u, \nabla u \in L^2(\Omega)$, ovvero che u sia una funzione appartenente allo *spazio di Sobolev* $H^1(\Omega)$.

1.2. **Problemi di minimo e proprietà topologiche.** Uno strumento elementare e fondamentale per ottenere l'esistenza soluzioni a problemi di minimo ci è offerto dal Teorema di Weierstrass.

Teorema 1.4 (Weierstrass)**.** *Sia $E \colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su uno spazio topologico compatto X. Allora esiste un punto dello spazio X in cui la funzione E assume il suo valore minimo,*

$$\exists p \in X : E(p) = \min_X E.$$

Osservazione 1.5. Anche se il dominio X non è compatto, per avere l'esistenza di un punto di minimo per E è sufficiente che esista un insieme di sottolivello $X(\alpha) := \{x \in X \colon E(x) \leqslant \alpha\}$ che sia compatto, per almeno un $\alpha > \inf_X E$. In tal caso basta applicare il teorema di Weierstrass alla restrizione di E al sottoinsieme $X(\alpha)$.

Le nozioni di spazio compatto e di funzione continua sono proprietà topologiche. Per poter utilizzare il teorema di Weierstrass è necessario aver chiaro quale topologia si assume sul dominio X della funzione.

Quando X è un dominio contenuto in uno spazio vettoriale V di dimensione finita il problema non si pone, in quanto su V esiste un'unica topologia compatibile con la struttura lineare, ovvero una topologia rispetto alle quali le operazioni di somma di vettori e di prodotto di uno scalare per un vettore risultano essere continue. In tal caso sappiamo che gli insiemi compatti coincidono con gli insiemi chiusi e limitati (teorema di Heine-Borel).

L'insieme X_g, definito in (3) e sul quale ci interessa minimizzare il funzionale di Dirichlet definito in (9), è un sottoinsieme dello spazio vettoriale di dimensione infinita $C^2(\Omega)$. In uno spazio di dimensione infinita ci possono essere modi diversi, non equivalenti, di definire distanze tra punti e modi diversi di definire topologie sullo spazio. Più una topologia su uno spazio è ricca di aperti e più è facile che siano continue le funzioni che hanno come dominio tale spazio, d'altra parte più è grande la famiglia degli aperti e meno compatti ci sono sullo spazio. Quindi per poter applicare il teorema di Weierstrass è cruciale avere una topologia sufficientemente ricca di aperti per avere continuità dei funzionali che si vuole minimizzare e sufficientemente povera di aperti per avere compattezza del domini sui quali si vogliono considerare tali funzionali.

La compattezza di uno spazio richiede necessariamente anche completezza metrica o topologica, e spesso capita, come ad esempio nel caso di X_g, che la norma più adeguata per misurare le distanze tra punti produca una struttura metrica rispetto alla quale lo spazio non risulta essere completo, mancano punti limite di successioni che dovrebbero essere convergenti. Risulta necessario allora trovare ambienti più completi in cui immergere il problema di partenza. Ecco così che emergono spazi funzionali nuovi: ad ogni maniera di "misurare" le proprietà di regolarità o di integrabilità delle funzioni corrisponderà uno spazio funzionale nuovo, completo e adattato a quel tipo di misura.

Uno degli scopi principali del corso di Analisi Funzionale sarà proprio quello di esaminare le proprietà metriche e topologiche che vengono determinate su uno spazio vettoriale dalla scelta di una norma o dalla scelta di una famiglia di seminorme, facendo particolare attenzione alle proprietà di compattezza e completezza dello spazio e alle proprietà di continuità dei funzionali definiti su tale spazio.

1.3. **Esistenza di soluzioni tramite dualità.** Consideriamo il problema (1)-(2) con dati al bordo nulli, $g(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. In tal caso $X_g = X_0$ risulta essere un sottospazio vettoriale di $C^2(\overline{\Omega})$. Il punto (B) della proposizione 1.3 ci dice che $u \in X_0$ è una soluzione se e solo se per ogni $h \in X_0$ abbiamo

$$-\int_\Omega f h \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \,\mathrm{d}x.$$

L'applicazione bilineare che alla coppia (u, h) associa $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \,\mathrm{d}x$ risulta essere un prodotto scalare su X_0, che indichiamo con

$$\langle u, h\rangle_{X_0} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Il punto cruciale per dimostrare che si tratta effettivamente di un prodotto scalare è quello di verificare che il prodotto sia non degenere, e ciò viene garantito come conseguenza della seguente disuguaglianza.

Proposizione 1.6 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$. Esiste una costante positiva $C_\Omega > 0$ tale che per ogni $g \in C^1(\overline{\Omega})$ che si annulla sulla frontiera, $g(x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$, si ha che*

$$\int_\Omega |g|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant C_\Omega \int_\Omega |\nabla g|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Ogni prodotto scalare induce una norma, e quindi X_0 risulta essere uno spazio normato con norma data da

$$\|g\|_{X_0} := \sqrt{\langle g, g\rangle_{X_0}} = \left(\int_\Omega |\nabla g|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

L'applicazione $L\colon X_0 \to \mathbb{R}$, definita da

$$L(h) := -\int_\Omega fh \, \mathrm{d}x,$$

è un funzionale *lineare* su X_0, e sempre per la disuguaglianza di Poincaré risulta essere *continuo*; infatti, applicando prima la disuguaglianza di Hölder e poi quella di Poincaré, troviamo che

$$|L(h)| \leqslant \int_\Omega |fh| \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |h|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega \left(\int_\Omega |\nabla h|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} = C \|h\|_{X_0},$$

con $C = C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Il problema di Dirichlet con dati al bordo nulli per l'equazione di Poisson diventa allora equivalente a quello di determinare un elemento $u \in X_0$ tale che

$$L(h) = \langle u, h\rangle_{X_0}, \quad \forall h \in X_0. \tag{11}$$

Per ogni $v \in X_0$ l'applicazione $h \mapsto \langle v, h\rangle_{X_0}$ è sempre un funzionale lineare e continuo da X_0 a $\mathbb{R}$, ovvero un elemento dello spazio X_0' duale (topologico) di X_0. Se tutti i funzionali lineari e continui su X_0 avessero questa forma allora il funzionale lineare e continuo $h \mapsto L(h)$ sarebbe rappresentato nella forma (11) per una soluzione u del problema. Un importante risultato della teoria degli spazi di Hilbert ci dice che se X_0 fosse completo allora tutti i funzionali lineari e continui su X_0 sarebbero rappresentati da prodotti scalari

Teorema 1.7 (Teorema di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e $L \in H'$ un funzionale lineare e continuo su H. Allora esiste, ed è unico, un elemento $u \in H$ tale che*

$$L(h) = \langle h, u\rangle, \quad \forall h \in H.$$

Purtroppo lo spazio X_0 con il prodotto scalare (10) non è uno spazio completo. Il completamento di X_0 rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare (10) non è altro che lo *spazio di Sobolev* $H^1_0(\Omega)$, ed esso, grazie al teorema di Riesz, rappresenta lo spazio più adatto per trovare la soluzione cercata al nostro problema. Gli spazi di Sobolev e le loro applicazioni per la risoluzione di problemi di equazioni alle derivate parziali saranno l'oggetto di studio della parte finale del corso.

Osservazione 1.8. Facciamo notare come in questo approccio l'attenzione si sia spostata dallo spazio X_0 allo spazio duale X_0' dei funzionali lineari e continui su X_0. E la chiave di volta per la risoluzione del problema formulato in certo spazio è data da una buona rappresentazione degli elementi dello spazio duale. Possiamo riassumere sinteticamente il *principio di dualità* dell'analisi funzionale lineare dicendo che "possiamo conoscere completamente un elemento di un certo spazio leggendolo attraverso l'azione dei funzionali lineari (continui) su di esso".

1.4. **Esercizi.**

Esercizio 1.9. Sia $]a,b[$ un intervallo aperto e limitato. Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano $A, B \in \mathbb{R}$. Ricava delle formule esplicite che descrivano la soluzione $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson in dimensione 1 descritto da:

$$u''(x) = f(x),\ \forall x \in]a,b[, \quad u(a) = A,\ u(b) = B.$$

Esercizio 1.10. Dimostra il teorema della divergenza, e quindi la formula (5), nei casi di dimensione $d = 1, 2, 3$, per domini di integrazione sufficientemente semplici e regolari. *[Si tratta di andare a ripassare cose già viste nei corsi di analisi matematica dei primi due anni.]*

Esercizio 1.11. Sia $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione *lipschitziana* definita sul bordo dell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con costante di Lipschitz L,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant L\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in \partial\Omega.$$

Considera la funzione $G\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(x) := \inf\left\{g(y) + L\,|x - y| : y \in \partial\Omega\right\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dimostra che G è una estensione lipschitziana di g a tutto $\overline{\Omega}$.

Esercizio 1.12. Dimostra che la soluzione del problema (1)-(2), se esiste, è unica. *[Prova a studiare prima il caso in cui $f = 0$.]*

Esercizio 1.13. Prova a riformulare il principio di Dirichlet per per il problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta u + \lambda u = f$. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ è possibile mostrare l'equivalenza con un problema di minimo? Quale forma assume il funzionale di Dirichlet in questo caso?

Esercizio 1.14. Scrivi una dimostrazione del teorema di Weierstrass nella generalità enunciata nel Teorema 1.4.

Esercizio 1.15. Dimostra la disuguaglianza di Poincaré nel caso unidimensionale in cui $\Omega =]a,b[$ è un intervallo limitato della retta reale. *[Si dimostra facilmente utilizzando il teorema fondamentale del calcolo.]*

Esercizio 1.16. Dimostra la disuguaglianza di Poincaré nel caso bidimensionale in cui Ω è un dominio semplice della forma

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\right\},$$

dove $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue.