ANALISI FUNZIONALE
ESERCIZI TRATTI DAL LIBRO DI H.BREZIS "FUNCTIONAL ANALYSIS, SOBOLEV SPACE AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS" (EDIZIONE DEL 2011)"

1. Funzionali lineari, Operatori Lineari, Teoremi Fondamentali (Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, mappa aperta, grafico chiuso)

Esercizio 1.1 (Brezis, exercise 1.3, pag. 20). Considera lo spazio

$$X := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : f \text{ è continua}, f(0) = 0\}.$$

dotato della norma uniforme $\|f\|_X := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Sia $T : X \to \mathbb{C}$ il funzionale definito da $T(f) := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Verifica che $T \in X'$ e calcola la norma $\|T\|_{X'}$.
- Esiste una funzione $f \in X$ tale che $\|f\|_X = 1$ e $T(f) = \|T\|_{X'}$?

Esercizio 1.2 (Brezis, exercise 1.4, pag. 21). Considera lo spazio X delle successioni a valori scalari infinitesime

$$X := c_o := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}.$$

dotato della norma uniforme $\|x\|_{c_0} := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Sia $T : X \to \mathbb{C}$ il funzionale definito da $T(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$.

- Verifica che $T \in X'$ e calcola la norma $\|T\|_{X'}$.
- Esiste una successione $x \in X$ tale che $\|x\|_X = 1$ e $T(x) = \|T\|_{X'}$?

Esercizio 1.3 (Brezis, exercise 1.5, pag. 21). Sia X uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita.

- Dimostra (utilizzando il lemma di Zorn) che esiste una base algebrica (base di Hamel) di X i cui elementi hanno tutti norma 1.
- Utilizzando la base di Hamel del punto precedente, costruisci un funzionale lineare $T : X \to \mathbb{C}$ che non sia continuo.
- Dimostra che se X è Banach la base di Hamel non può essere numerabile. *[Suggerimento: usa il lemma di Baire.]*

Esercizio 1.4 (Sottospazi ortogonali, [Brezis, proposition 1.9, pag. 9]). Sia X uno spazio di Banach. Dato un sottoinsieme S di X indichiamo l'*ortogonale* di S come il sottoinsieme $S^\perp$ dello spazio duale X' definito da

$$S^\perp := \{f \in X' : f(x) = 0, \forall x \in S\}.$$

Dato un sottoinsieme T del duale X' indichiamo l'*ortogonale* di T come il sottoinsieme $T^\perp$ dello spazio X definito da

$$T^\perp := \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in T\}.$$

Dimostra che:

- $S^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale chiuso di X' per ogni sottoinsieme S di X e si ha

$$(S^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span} S};$$

- $T^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale chiuso di X per ogni sottoinsieme T di X' e si ha
$$(T^\perp)^\perp \supseteq \overline{\operatorname{span} T}.$$

Esercizio 1.5 (Brezis, exercise 1.16, pag.24). Considera lo spazio $X = \ell^1$ e il suo duale $X' = \ell^\infty$. Sia $V = c_0$ il sottospazio di X' formato dalle successioni infinitesime. Calcola esplicitamente chi sono $V^\perp$ e $(V^\perp)^\perp$. Verifica che $(V^\perp)^\perp \neq V$.

Esercizio 1.6 (Brezis, exercise 1.15, pag. 24). Sia X uno spazio vettoriale normato reale. Sia C un sottoinsieme convesso di X contenente l'origine, $0 \in X$. Definiamo
$$C^\star := \{f \in X' \colon f(x) \leqslant 1, \forall x \in C\}, \qquad C^{\star\star} := \{x \in X \colon f(x) \leqslant 1, \forall f \in C^\star\}.$$
Dimostra che $C^{\star\star} = \overline{C}$. Che cosa è $C^\star$ nel caso in cui C sia un sottospazio lineare di X?

Esercizio 1.7 (Bresiz, proposition 2.14, corollary 2.15, theorem 2.16, pag. 40–42). Sia X uno spazio di Banach e siano V, W due sottospazi chiusi di X. Dimostra che valgono i seguenti risultati:

- $V \cap W = (V^\perp + W^\perp)^\perp$;
- $V^\perp \cap W^\perp = (V + W)^\perp)$;
- $(V \cap W)^\perp \supseteq \overline{V^\perp + W^\perp}$;
- $(V^\perp \cap W^\perp)^\perp = \overline{V + W}$;
- $V + W$ chiuso in $X \iff V^\perp + W^\perp$ chiuso in $X' \iff V + W = (V^\perp \cap W^\perp)^\perp \iff V^\perp + W^\perp = (V \cap W)^\perp$.

Esercizio 1.8 (Bresiz, exercise 1.22, pag. 26). Sia X uno spazio vettoriale normato e sia C un sottoinsieme chiuso e non vuoto di X. Sia $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$\varphi(x) := \operatorname{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

- Verifica che φ è Lipschitziana con costante 1.
- Dimostra che se C è convessa allora φ è una funzione convessa.
- Dimostra che se φ è convessa allora C è un insieme convesso.

Esercizio 1.9 (Continuità delle funzioni convesse, [Brezis, exercise 2.1, pag. 49]). Sia X uno spazio di Banach. Sia $f \colon X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente. Sia $p \in X$ tale che $f(p) < +\infty$.

- Dimostra che esistono due costanti $R > 0$ e $M \in \mathbb{R}$ tali che
$$\|x - p\| \leqslant R \implies f(x) \leqslant M.$$
[Suggerimento: per un appropriato $\rho > 0$ considera gli insiemi
$$F_n := \{x \in X \colon \|x - p\| \leqslant \rho, \varphi(x) \leqslant n\}.]$$
- Dimostra che per ogni $r \in]0, R[$ la funzione f è Lipschitziana sulla palla chiusa $\overline{B(p, r)}$ (con costante di Lipschitz $L := 2(M - f(p))/(R - r)$).

Esercizio 1.10 (Brezis, exercise 2.3, pag. 49). Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di operatori lineari e continui $T_n \colon X \to Y$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converga per $n \to \infty$ in Y ad un limite che indichiamo con $T(x)$. Dimostra che se la successione (x_n) converge al punto x in X allora la successione $(T_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto $T(x)$ in Y.

Esercizio 1.11 (Bresiz, exercise 2.4, pag. 49). Siano X e Y due spazi di Banach reali. Sia $B \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineare tale che:

- per ogni $x \in X$ fissato, la mappa $y \mapsto B(x, y)$ è continua;
- per ogni $y \in Y$ fissato, la mappa $x \mapsto B(x, y)$ è continua.

Dimostra che esiste una costante $C \geqslant 0$ tale che

$$|B(x,y)| \leqslant C \|x\| \|y\| .$$

[Suggerimento: alla forma bilineare B corrisponde in modo canonico un operatore lineare $T\colon X \to Y'$ che risulta (localmente) limitato.]

Esercizio 1.12 (Brezis, exercise 2.8, pag. 50). Sia X uno spazio di Banach. Sia $T\colon X \to X'$ un operatore lineare tale che $T(x)(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in X$. Dimostra che T è continuo. *[Suggerimento: applica il teorema del grafico chiuso].*

Esercizio 1.13 (Brezis, exercise 2.9, pag. 50). Sia X uno spazio di Banach. Sia $T\colon X \to X'$ un operatore lineare tale che $T(x)(y) = T(y)(x)$ per ogni $x, y \in X$. Dimostra che T è continuo.

2. Topologie deboli

Esercizio 2.1 (Bresiz, exercise 3.1, pag. 79). Sia X uno spazio di Banach e sia K un sottoinsieme di X compatto rispetto alla topologia debole di X. Dimostra che K è limitato.

Esercizio 2.2 (Somme di Cesaro e convergenza debole [Brezis, exercise 3.2, pag. 79]). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio di Banach debolmente convergente ad un punto p. Considera la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme di Cesaro definite da

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Dimostra che anche $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente al punto p.

Esercizio 2.3 (Brezis, exercise 3.3, pag. 80). Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio di Banach. Dimostra che la chiusura di C nella topologia forte coincide con la chiusura di C nella topologia debole.

Esercizio 2.4 (Brezis, exercise 3.4, pag. 80). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio di Banach debolmente convergente ad un punto p. Sia C l'inviluppo convesso dell'insieme dei punti della successione. Dimostra che esiste una successione di punti di C che converge fortemente a p.

Esercizio 2.5 (Brezis, exercise 3.5, pag. 80). Sia K un sottoinsieme compatto rispetto alla topologia forte di uno spazio di Banach. Dimostra che se una successione in K converge in senso debole allora converge anche in senso forte.

Esercizio 2.6 (Brezis, exercise 3.7, pag. 80). In uno spazio di Banach, sia A un sottoinsieme chiuso rispetto alla topologia debole e sia B un sottoinsieme compatto rispetto alla topologia debole. Dimostra che $A + B$ è chiuso rispetto alla topologia debole. Se assumiamo inoltre che A e B siano convessi non vuoti e disgiunti, dimostra che A e B sono strettamente separati da un iperpiano chiuso.

Esercizio 2.7 (Bresiz, exercise 3.10, pag. 81). Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $T\colon X \to Y$ un operatore lineare e continuo. Considera l'operatore aggiunto $T^\star\colon Y' \to X'$ definito da

$$T^\star(g)(x) := g(Tx), \quad \forall g \in Y', \forall x \in X.$$

- Verifica che $T^\star$ è continuo da Y' dotato della topologia forte a X' dotato della topologia forte.
- Verifica che $T^\star$ è continuo da Y' dotato della topologia debole a X' dotato della topologia debole.

Esercizio 2.8 (Brezis, exercise 3.13, pag. 82). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio di Banach. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia C_n la chiusura dell'inviluppo convesso dell'insieme $\{x_k : k \geqslant n\}$.

- Dimostra che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente al punto p allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{p\}$.
- Supponendo che lo spazio sia riflessivo, dimostra che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{p\}$ allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente al punto p.

Esercizio 2.9 (Brezis, exercise 3.16, pag. 83). Sia X uno spazio di Banach.

- Dimostra che se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in X' tale che per ogni $x \in X$ la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, allora esiste un funzionale $f \in X'$ tale che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\star$-debolmente ad f.
- Supponendo che X sia riflessivo, dimostra che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in X tale che per ogni $f \in X'$ la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, allora esiste un punto $x \in X$ tale che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente ad x.
- Costruisci un esempio in uno spazio di Banach non riflessivo di una successione per la quale la conclusione del punto precedente è falsa. *[Suggerimento: puoi provare con $X = c_0$ e x_n la successione formata da n volte* 1 *e poi tutti* 0.*]*

Esercizio 2.10 (Bresiz, exercise 3.26, pag. 85). Sia X uno spazio di Banach separabile. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i cui punti formano un sottoinsieme denso in X. Considera l'operatore lineare $T : \ell^1 \to X$ definito da

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k, \quad \forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

Dimostra che T è continuo e suriettivo.

Esercizio 2.11 (Brezis, exercise 3.29, pag. 86). Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso. Dimostra che per ogni $M > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta$$

per ogni coppia di vettori $x, y \in X$ tali che $\|x\| \leqslant M$, $\|y\| < M$ e con $\|x - y\| > \varepsilon$.

3. Spazi L^p e spazi di Hilbert

Esercizio 3.1 (Brezis, exercise 2.7, pag. 50). Sia $p \in [1, +\infty]$ e sia p' l'epsonente coniugato di p. Sia $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di valori scalari. Supponiamo che $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n x_n| < \infty$ per ogni successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Dimostra che $\alpha \in \ell^{p'}$.

Esercizio 3.2 (Brezis, exercise 3.18, pag. 83). Per ogni $n \in N$ sia e^n la successione con $e^n_k = 0$ se $k \neq n$ e $e^n_n = 1$,

$$e^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad \text{con l'1 nella } n\text{-esima posizione.}$$

- Dimostra che e^n converge debolmente a 0 in ℓ^p per ogni $p \in]1, \infty]$.
- Dimostra che nessuna sottosuccessione di (e^n) converge debolmente in ℓ^1.

Esercizio 3.3 (Brezis, exercise 3.19, pag. 83). Siano $p, q \in]1, \infty[$. Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$|a(t)| \leqslant |t|^{p/q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sia A l'operatore (non lineare) che alla successione $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ associa la successione

$$A(x) := \big(a(x_1), a(x_2), a(x_3), \dots\big).$$

- Dimostra che A è una mappa continua da ℓ^p (con topologia forte) in ℓ^q (con topologia forte).
- Dimostra che se $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $x^n \in \ell^p$ debolmente convergente alla successione x allora $(A(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in ℓ^q debolmente convergente alla successione $A(x)$.
- Deduci che A è continua come funzione dalla palla chiusa unitaria di ℓ^p dotata della topologia indotta dalla topologia debole allo spazio ℓ^q dotato della topologia debole.

Esercizio 3.4 (Brezis, exercise 4.7, pag. 119). Siano $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Sia $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Supponiamo che per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ si ha che $af \in L^q(\mathbb{R})$. Dimostra che $a \in L^r(\mathbb{R})$ dove r è determinato dalla formula

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

[Suggerimento: usa il teorema del grafico chiuso.]

Esercizio 3.5 (Brezis, exercise 4.8, pag. 119). Sia V un sottospazio chiuso di $L^1(\mathbb{R})$. Supponiamo anche che

$$V \subseteq \bigcup_{q>1} L^q(\mathbb{R}).$$

- Dimostra che esiste un esponente $p > 1$ tale che $V \subseteq L^p(\mathbb{R})$. *[Suggerimento: per ogni $n \in \mathbb{N}$ considera l'insieme*
$$V_n := \left\{ f \in V \cap L^{1+1/n}(\mathbb{R})\colon \ \|f\|_{1+1/n} \leqslant n \right\}.]$$
- Dimostra che esiste una costante $C \geqslant 0$ tale che $\|f\|_p \leqslant C\|f\|_1$ per ogni $f \in V$.

Esercizio 3.6 (Brezis, exercise 4.15, pag. 122). Considera l'intervallo $I :=]0,1[$.

(1) Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definite su I da $f_n(x) := n\mathrm{e}^{-nx}$. Dimostra che tale successione:
  - converge a zero quasi ovunque su I;
  - è limitata in $L^1(I)$;
  - non converge in norma $L^1(I)$;
  - non converge debolmente in $L^1(I)$.

(2) Sia $p \in]1,\infty[$ e sia $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definite su I da $f_n(x) := n^{1/p}\mathrm{e}^{-nx}$. Dimostra che tale successione:
  - converge a zero quasi ovunque su I;
  - è limitata in $L^p(I)$;
  - non converge in norma $L^p(I)$;
  - converge debolmente in $L^p(I)$.

Esercizio 3.7 (Brezis, exercise 4.19-1, pag. 124). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $L^p(\mathbb{R})$ e sia $f \in {}^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$. Supponiamo che f_n converga debolmente in L^p ad f e che $\|f_n\|_p$ converga a $\|f\|_p$ per $n \to \infty$. Dimostra che f_n converge ad f in norma L^p.

Esercizio 3.8 (Brezis, exercise 4.19-2, pag. 124). Costruisci una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R})$ tale che:

- $f_n(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (f_n) converge debolmente in L^1 ad una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$;
- $\|f_n\|_1$ converge a $\|f\|_1$;
- (f_n) non converge in norma L^1 ad f.

Esercizio 3.9 (Brezis, exercise 4.23, pag. 125). Sia $1 \leqslant p < \infty$. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Considera l'insieme

$$C := \{u \in L^p(\mathbb{R})\colon u(x) \geqslant f(x) \text{ quasi ovunque}\}.$$

Dimostra che:

- C è convesso;
- C è chiuso nella topologia forte;
- C è chiuso nella topologia debole.

Esercizio 3.10 (Brezis, exercise 5.9, pag. 148). Siano A e B due sottoinsiemi chiusi, non vuoti, convessi e disgiunti di uno spazio di Hilbert e supponiamo inoltre che B sia limitato. Considera l'insieme $C = A - B$ delle differenze tra punti di A e punti di B.

- Dimostra che C è chiuso e convesso.
- Sia $p_\star$ il punto di C con norma minima, che possiamo scrivere come $p_\star = a_\star - b_\star$ per qualche punto $a_\star \in A$ e $b_\star \in B$. Dimostra che
$$\|a_\star - b_\star\| = \operatorname{dist}(A, B) := \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \|a - b\|,$$
e determina il punto di A di minima distanza da $b_\star$ e il punto di B di minima distanza da $a_\star$.
- Supponiamo che $\left\|\widetilde{a} - \widetilde{b}\right\| = \operatorname{dist}(A, B)$ per una coppia di punti $\widetilde{a} \in A$ e $\widetilde{b} \in B$. Dimostra che $p_\star = \widetilde{a} - \widetilde{b}$.
- Fai un esempio esplicito di insiemi A e B per i quali la coppia $(a_\star, b_\star)$ è unica.
- Fai un esempio esplicito di insiemi A e B per i quali la coppia $(a_\star, b_\star)$ non è unica.
- Trova una dimostrazione semplice della seconda forma geometrica del teorema di Hahn-Banach per il caso di uno spazio di Hilbert.

Esercizio 3.11 (Brezis, exercise 5.28, pag. 154). Sia V un sottospazio vettoriale denso in uno spazio di Hilbert H separabile. Dimostra che V contiene una base ortonormale di H.

4. Spazi di Sobolev

Esercizio 4.1 (Brezis, exercise 8.1, pag. 235). Sia $0 < \alpha < 1$. Considera la funzione

$$f(x) := \frac{1}{(1 + x^2)^{\alpha/2} \log(2 + x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Verifica che $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ per ogni $p \geqslant 1/\alpha$ e che $f \notin L^q(\mathbb{R})$ per ogni $q < 1/\alpha$.

Esercizio 4.2 (Brezis, corollary 9.13, pag. 283). Siano $m, d \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant q < p < \infty$ tali che

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}.$$

Dimostra che si ha l'immersione $W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$, e che vale una stima della forma

$$\|f\|_{L^q(|R^d)} \leqslant C \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Esercizio 4.3 (Soluzioni deboli per il problema di Neumann per l'equazione di Poisson [Brezis, proposition 9.24, pag. 296]). Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ con frontiera regolare (di classe C^1). Sia $f \in L^2(\Omega)$. Considera il problema di determinare una soluzione dell'equazione

$$-\Delta u + u = f \quad \text{su } \Omega$$

soggetta a condizioni al bordo della forma

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove $\frac{\partial u}{\partial n}$ indica la derivata di u calcolata sul bordo di Ω nella direzione normale esterna,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \operatorname{grad} u,$$

con n versone normale esterno al bordo di Ω.

Leggi e studia l'esempio 4 a pagina 296 fino alla proposizione 9.24 e spiega in dettaglio come dimostrare l'esistenza di una soluzione debole del problema.