Analisi Funzionale - (Foschi) - esame del 20.1.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Sia $T\colon \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ la mappa di dualità definita da

$$T(x)(y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty.$$

Sia $L\colon c \to \mathbb{C}$ il funzionale che ad ogni successione convergente associa il suo limite,

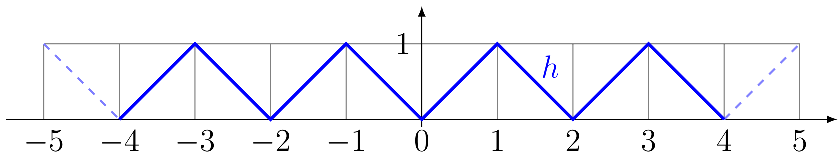
$$L(x) := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n, \quad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c.$$

- Verifica che T è una isometria: $\|T(x)\|_{(\ell^\infty)'} = \|x\|_{\ell^1}$.
- Dimostra che esiste $\widetilde{L} \in (\ell^\infty)'$ che prolunga L da c a tutto ℓ^∞. *[Sugg.: Usa Hahn-Banach in modo opportuno.]*
- Verifica che $\widetilde{L} \notin T(\ell^1)$ (e dunque l'isometria T non è suriettiva).
- Spiega come si può identificare il duale di ℓ^1 con ℓ^∞.
- Spiega come si deduce dai punti precedenti che ℓ^1 non è riflessivo.

2. (8 punti) Sia $I := [0,1]$. Considera lo spazio $X := \{f\colon I \to \mathbb{R}\colon f \text{ continua}\}$ munito della norma uniforme $\|f\| := \max_{x\in I} |f(x)|$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia E_n il sottoinsieme di X definito da:

$$E_n := \{f \in X\colon \exists x \in I : \forall y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant n\,|x - y|\}\,.$$

Considera inoltre la funzione triangolare periodica $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descritta dal seguente grafico,



e per ogni $M \in \mathbb{N}$ considera le sue riscalate h_M ristrette a I secondo la formula

$$h_M(x) := \frac{1}{M} h(M^2 x), \quad \forall x \in I.$$

- Dimostra che E_n è chiuso in X.
- Per ogni $M \in \mathbb{N}$ verifica che $\|h_M\| = \dfrac{1}{M}$ e che per $M > n$ si ha $h_M \notin E_n$.
- Scelti $f \in X$ e $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in X$ Lipschitziana tale che $\|f - g\| < \varepsilon$. *[Sugg.: segue facilmente dall'uniforme continuità di f che f si può approssimare con funzioni continue lineari (affini) a tratti.]*
- Se $g \in X$ è Lipschitziana allora per M sufficientemente grande si ha che $g + h_M \notin E_n$.
- Deduci dai punti precedenti che il complementare di E_n è denso in X.
- Spiega perché se $f \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ allora f non è derivabile in alcun punto.
- Usa il lemma di Baire per concludere dai punti precedenti che esiste una funzione continua che non è derivabile in nessun punto.

3. (8 punti) Sia H uno spazio di Hilbert. Sia $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi chiusi, convessi e non vuoti di H tale che

   - ogni sottoinsieme contiene il successivo, $C_{n+1} \subseteq C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
   - la loro intersezione è non vuota, $C_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$.

   Dato un punto $x \in H$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in C_n$ il punto di C_n che ha minima distanza da x,

   $$\|x_n - x\| = \operatorname{dist}(C_n, x) := \min_{y\in C_n} \|y - x\| .$$

   Dimostra che:

   - l'intersezione C_∞ è chiusa e convessa;
   - la successione numerica $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente e superiormente limitata;
   - la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in H;
   - ogni sottosuccessione della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente ad un punto di C_∞;
   - se una sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente ad un punto allora tale punto è necessariamente il punto x_∞ di C_∞ con minima distanza da x;
   - tutta la successione (x_n) converge fortemente al punto x_∞.

4. (8 punti) Sia Ω un aperto limitato con frontiera regolare di $\mathbb{R}^d$. Dimostra che:

$$f \in W^{1,p}(\Omega) \implies |f| \in W^{1,p}(\Omega).$$

[Sugg.: puoi usare la seguente approssimazione della funzione modulo:

$$|t| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varphi_\varepsilon(t), \quad \varphi_\varepsilon(t) := \sqrt{\varepsilon^2 + |t|^2} - \varepsilon.$$

Osserva che:

$$\varphi_\varepsilon \in C^\infty, \quad \varphi_\varepsilon(0) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi_\varepsilon(t) \leqslant |t|, \quad |\varphi'_\varepsilon(t)| \leqslant 1.]$$