Analisi Funzionale - (Foschi) - esame del 13.1.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Siano X e Y due spazi di Banach e sia $S\colon X \to Y$ un operatore lineare e continuo. Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   - Esiste una costante $C > 0$ tale che $\|x\|_X \leqslant C\,\|Sx\|_Y$ per ogni $x \in X$.
   - S è iniettivo e l'immagine $S(X)$ è un sottospazio chiuso di Y.

2. (8 punti) Sia $T\colon H \to H$ un operatore lineare che agisce su uno spazio di Hilbert H complesso. Supponiamo che
   $$\langle Tx, y\rangle = \mathrm{i}\langle x, Ty\rangle, \qquad \forall x, y \in H,$$
   dove i è l'unità immaginaria. Dimostra che T è continuo.

3. (8 punti) Una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *debolmente di Cauchy* quando per ogni funzionale lineare e continuo $\varphi \in X'$ si ha che la successione $(\varphi(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy nel campo degli scalari. Dimostra che:
   - Ogni successione debolmente di Cauchy è limitata;
   - In uno spazio di Banach riflessivo, ogni successione debolmente di Cauchy è debolmente convergente.

4. (8 punti) Siano A e B due intervalli aperti di $\mathbb{R}$ con intersezione non nulla, $A \cap B \neq \varnothing$. Sia $I := A \cup B$ e sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Supponiamo che f ristretta ad A possieda derivata debole $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ e che f ristretta ad B possieda derivata debole $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(B)$. Dimostra che:
   - g e h coincidono (quasi ovunque) su $A \cap B$;
   - f possiede derivata debole su tutto I data da g su A e da h su B.