Analisi Funzionale - (Foschi) - esame del 10.2.2023

nome e cognome:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Considera gli spazi normati $X := (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ e $Y := (C[0,1], \|\cdot\|_1)$, con le norme date da
$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,, \qquad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$
Dimostra che la mappa biettiva $I\colon X \to Y$, data da $I(f) = f$, è continua ma non è una mappa aperta. *Suggerimento: puoi provare a procedere per assurdo.*

2. (8 punti) Siano X e Y due spazi normati e sia $T\colon X \to Y'$ un operatore lineare e continuo da X al duale di Y. Dimostra che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che converge debolmente a x in X allora $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che converge a Tx rispetto alla topologia debole-$\star$ su Y'. *[Suggerimento: ad ogni $y \in Y$, tramite T puoi far corrispondere un funzionale lineare e continuo su X.]*

3. (8 punti) [Teorema del punto di minima distanza per spazi riflessivi.] Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia V un suo sottospazio chiuso. Dato $q \in X$, consideriamo la funzione $\varphi(x) := \|x - q\|$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $K_\lambda := \{x \in V : \varphi(x) \leqslant \lambda\}$.
   - Verifica che φ è continua, convessa e coerciva.
   - Spiega perché gli insiemi K_λ sono limitati e debolmente chiusi.
   - Spiega perché K_λ è debolmente compatto.
   - Osserva che esiste un $\lambda_\star \in \mathbb{R}$ tale che $K_{\lambda_\star}$ non è vuoto.
   - Deduci che esiste un $p \in K_{\lambda_\star}$ tale che $\varphi(p) = \min_{x\in K_{\lambda_\star}} \varphi(x)$.
   - Verifica che tale p è un punto di V con minima distanza da q,
   $$\|p - q\| = \min_{x\in V} \|x - q\|\,.$$

4. (8 punti) Considera la funzione $f(x) := |x|^{1/2} \log|x|$ definita su $]-1,1[$.
   - Determina la derivata debole di f.
   - Determina per quali p si ha che $f \in W^{1,p}(]-1,1[)$.
   - Per i p per cui si ha $f \in W^{1,p}(]-1,1[)$ è vero che il prolungamento a zero di f su tutto $\mathbb{R}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R})$?