

RACCOLTA DEGLI ESAMI SCRITTI DI ANALISI FUNZIONALE 2011-21

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

FRANCESCA PRINARI
Dipartimento di Matematica
Università di Ferrara

Gli esercizi sulla prima parte del programma (fino al Teorema di Banach-Steinhaus incluso) e utili per prepararsi al primo parziale sono:

- (1) 19.05.2011 Esercizio 2, Esercizio 3
- (2) 06.06.2011 Esercizio 2, Esercizio 3
- (3) 06.07.2011 Esercizio 1, Esercizio 4
- (4) 08.09.2011 Esercizio 1, Esercizio 3
- (5) 24.11.2011 Esercizio 1
- (6) 25.01.2012 Esercizio 1, Esercizio 2 (a)
- (7) 15.05.2012 Tutto
- (8) 13.06.2012 Esercizio 1 (a e b)
- (9) 09.07.2012 Esercizio 1 (a e b), Esercizio 2
- (10) 16.07.2012 Esercizio 2
- (11) 17.09.2012 Esercizio 1
- (12) 11.01.2013 Tutto
- (13) 22.01.2013 Esercizio 3 (esame scritto)
- (14) 28.05.2013 Esercizio 2
- (15) 25.06.2013 Esercizio 1 (tutto tranne la parte (e)), Esercizio 2
- (16) 18.07.2013 Esercizio 2
- (17) 10.10.2013 Esercizio 1
- (18) 26.11.2013 Tutto
- (19) 16.01.2014 Primo parziale: Esercizio 1,2
- (20) 04.02.2014 Esercizio 1, Esercizio 2
- (21) 25.03.2014 Esercizio 1, Esercizio 2
- (22) 27-11-2014 tutto
- (23) 22-01-2015 Esercizio 2, Esercizio 4
- (24) 11-02-2015 Esercizio 1
- (25) 17-03-2015 Esercizio 1
- (26) 11-06-2015 Esercizio 1
- (27) 7-07-2015 Esercizio 1
- (28) 6-5-2015 tutto
- (29) 7-6-2015 tutto
- (30) 21-06-2016 Esercizio 1
- (31) 8-7-2016 Esercizio 1
- (32) 20-07-2016 Esercizio 1, Esercizio 2
- (33) 23-09-2016 Esercizio 1
- (34) 2-12-2016 Tutto
- (35) 20-01-2017 Esercizio 1, Esercizio 2
- (36) 21-02-2017 Esercizio 1, Esercizio 2
- (37) 18-07-2017 Esercizio 1
- (38) 12-09-2017 Esercizio 1
- (39) 27.11.2017 Tutto
- (40) 16.01.2018 Esercizio 1, Esercizio 2
- (41) 20.02.2018 Esercizio 1
- (42) 03.07.2018 Esercizio 1
- (43) 12.03.2019 Esercizio 1
- (44) 19.07.2018 12.03.2019 Esercizio 1
- (45) 23 novembre 2018 Tutto
- (46) 18.01.2019 Esercizio 1 e 2
- (47) 30.01.2019 Esercizio 1 e 2

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 19.5.2011

- (1) (8/12 punti) Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ lineare, continuo e iniettivo. Provare che $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ e' continuo se e solo se $T(X)$ e' chiuso in Y .
- (2) (8/10 punti) Sia $X = L^p(0, 1)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) e sia $T : X \rightarrow X$ definito da $T(u)(t) = tu(t)$. Verificare che T e' lineare, continuo e di norma 1.
- (3) (6/8 punti) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X' . Definiamo
- $$M^0 := \{f \in X' : |f(x)| \leq 1 \forall x \in M\}$$
- e
- $$N^0 := \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \forall f \in N\}.$$
- Provare che
- (a) se $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ e $B_{X'} = \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ allora $B_X^0 = B_{X'}$ e $B_{X'}^0 = B_X$.
- (b) se M e' un sottospazio allora $M^0 = \{f \in X' : f(x) = 0 \forall x \in M\}$.
- (4) (9 crediti)(8 punti) Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ lineare. Allora T e' continuo se e solo se per ogni $(x_n)_n \subset X$ tale che $x_n \rightarrow x_0$ in X vale che $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ in Y .

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 6.6.2011

- (1) **(9 crediti)(8 punti)** Sia X uno spazio di Banach e Y un suo sottoinsieme denso e $(F_n)_n$ una successione in X' . Dimostrare che:
 $(F_n)_n$ converge debolmente * in $X' \iff (F_n)_n$ é limitata in X' e $(F_n(y))_n$ converge per ogni $y \in Y$.

- (2) Sia $T : c_0 \rightarrow c_0$ (dove c_0 denota lo spazio di Banach delle successioni infinitesime, dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$) l'operatore lineare definito da

$$T(x) = (x_n - x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$.

- (a) **(6/8 punti)** Provare che T é continuo e calcolarne la norma;

- (b) **(3/4 punti)** Per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ sia

$$\|x\|_T = \|Tx\|_\infty + \|x\|_\infty.$$

Si verifichi che $\|\cdot\|_T$ é una norma equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

- (c) **(3/5 punti)** dimostrare che T é iniettivo;

- (d) **(4/5 punti)** stabilire se T é un isomorfismo topologico;

- (3) **(6/8 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare tale che $f \circ T \in X'$ per ogni $f \in Y'$. Provare che T é continuo.

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 6.7.2011

- (1) (**8 punti**) Sia $X = C^0[0, 1]$ munito della norma del massimo. Sia

$$T(u) = \int_0^1 u(x)dx + u(1).$$

Verificare che T e' un funzionale lineare e continuo di norma 2.

- (2) (**6 punti**) Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \rightarrow Z$ un operatore lineare, continuo e iniettivo e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che T e' continuo.

- (3) (**6 punti**) Sia X spazio di Banach riflessivo. Provare che
 (a) ogni $f \in X'$ assume minimo sulla palla chiusa unitaria di X ;
 (b) dedurre dal punto precedente che ogni $f \in X'$ assume massimo sulla sfera unitaria di X .

- (4) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X' . Definiamo

$$M^0 := \{f \in X' : |f(x)| \leq 1 \forall x \in M\}$$

e

$$N^0 := \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \forall f \in N\}.$$

Provare che

- (a) (**4 punti**) se per ogni $r > 0$ $B_r^X := \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ e $B_r^{X'} = \{f \in X' : \|f\| \leq r\}$ allora $(B_r^X)^0 = B_{1/r}^{X'}$ e $(B_r^{X'})^0 = B_{1/r}^X$.

- (b) (**4 punti**) Sia M un sottospazio. Sapendo che in tal caso $M^0 = \{f \in X' : f(x) = 0 \forall x \in M\}$, provare che

$$M \text{ e' denso} \iff M^0 = \{0_{X'}\}$$

Soluzione

- (1) Banalmente si verifica che $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in X$. Inoltre

$$|T(u)| \leq \|u\|_\infty + \|u\|_\infty = 2\|u\|_\infty$$

per ogni $u \in X$. Infine scelta $u \equiv 1$ si ha che $\|u\|_\infty = 1$ e $T(u) = 2$. Possiamo quindi concludere che T ha norma 2.

- (2) Essendo $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare, per provare che T e' continuo e' sufficiente verificare che T ha grafico chiuso. Sia $x_n \rightarrow x$ in X e $Tx_n \rightarrow y$ in Y . Dobbiamo provare che $y = Tx$. Essendo S un operatore continuo vale che $Sx_n \rightarrow Sx$ ossia

$$J(Tx_n) \rightarrow J(Tx).$$

Inoltre anche J e' continuo. Quindi $J(Tx_n) \rightarrow J(y)$. Da cui

$$J(Tx) = J(y)$$

ed essendo J iniettivo otteniamo che

$$Tx = y.$$

- (3) (a) Verifichiamo le ipotesi del teorema di Weirstrass (vedi Corollario III.19 del Brezis). La palla chiusa unitaria di X e' convessa, chiusa e limitata e ogni $f \in X'$ e' convessa (in quanto lineare) e continua e quindi semicontinua. Quindi f raggiunge il suo minimo sulla palla chiusa unitaria.
 (b) Se consideriamo la funzione $-f$, ragionando come sopra, possiamo dire che $-f$ ammette minimo sulla palla B_1 . In particolare segue che f assume massimo sulla palla B_1 in quanto

$$\max_{B_1} f = -\min_{B_1}(-f).$$

Infine e' facile provare che per una funzione lineare

$$\max_{B_1} f = \max_{S_1} f$$

dove S_1 e' la sfera unitaria.

- (4) (a) Sia $f \in (B_r^X)^0$. Allora $|f(x)| \leq 1 \forall x \in B_r^X$. Se $x \in B_1^X$ allora $rx \in B_r^X$ e quindi $|f(rx)| \leq 1$ ossia $|f(x)| \leq \frac{1}{r} \forall x \in B_1^X$. In particolare $|f| \leq \frac{1}{r}$ ossia $f \in B_{1/r}^{X'}$. Viceversa sia $f \in B_{1/r}^{X'}$. Allora $|f(x)| \leq \frac{1}{r} \forall x \in B_1^X$. Per ogni $x \in B_r^X$ vale che $\frac{1}{r}x \in B_1^X$ e quindi $|f(\frac{1}{r}x)| \leq \frac{1}{r}$ ossia $|f(x)| \leq 1$. Segue che $f \in (B_r^X)^0$.
 (b) Sia $x \in (B_r^{X'})^0$. Allora $|f(x)| \leq 1 \forall f \in B_r^{X'}$. Se $g \in B_1^{X'}$ allora $rg \in B_r^{X'}$ e quindi $|rg(x)| \leq 1$ da cui $|g(x)| \leq \frac{1}{r}$. In particolare segue che $\|x\| = \sup_{g \in X', \|g\| \leq 1} |g(x)| \leq \frac{1}{r}$ ossia $x \in B_{1/r}^X$. Viceversa se $x \in B_{1/r}^X$ allora $\|x\| = \sup_{g \in X', \|g\| \leq 1} |g(x)| \leq \frac{1}{r}$. Questo implica che $|g(x)| \leq \frac{1}{r}$ per ogni $g \in B_1^{X'}$. In particolare per ogni $f \in B_r^{X'}$ (poiche' $\frac{1}{r}f \in B_1^{X'}$) vale che $|\frac{1}{r}f(x)| \leq \frac{1}{r}$ ossia $|f(x)| \leq 1$ da cui $x \in (B_r^{X'})^0$.
 (c) Se M e' denso e $f \in X'$ e' tale che $f \equiv 0$ su M allora per continuita' $f \equiv 0$ su X . In particolare otteniamo che $M^0 = \{0_{X'}\}$. Viceversa supponiamo che $M^0 = \{0_{X'}\}$. Quindi se $f \in X'$ e' tale che $f \equiv 0$ su M , allora $f \equiv 0$ su X . Da un corollario del Teorema di Hanh Banach (confronta Corollario 1.8 del Brezis) possiamo concludere che M e' denso.

Scritto totale di Analisi Funzionale (3 crediti)**Ferrara, 6.7.2011**

- (1) Sia $X = C^1[0, 1]$ munito della norma $|u| := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$T_n(u) = \int_0^1 u(x)dx + u\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (a) **(10 punti)** Verificare che T_n e' un funzionale lineare e continuo di norma 2.
 (b) **(3 punti)** Dimostrare che $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ (in $L(X)$) dove

$$T(u) = \int_0^1 u(x)dx + u(0).$$

- (2) **(7 punti)** Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \rightarrow Z$ un operatore lineare, continuo e iniettivo e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che T e' continuo.

- (3) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X' . Definiamo

$$M^0 := \{f \in X' : |f(x)| \leq 1 \forall x \in M\}$$

e

$$N^0 := \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \forall f \in N\}.$$

Provare che

- (a) **(5 punti)** se per ogni $r > 0$ $B_r^X := \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ e $B_r^{X'} = \{f \in X' : \|f\| \leq r\}$ allora $(B_r^X)^0 = B_{1/r}^{X'}$ e $(B_r^{X'})^0 = B_{1/r}^X$.

- (b) **(5 punti)** Sia M un sottospazio. Sapendo che in tal caso $M^0 = \{f \in X' : f(x) = 0 \forall x \in M\}$, provare che

$$M \text{ e' denso} \iff M^0 = \{0_{X'}\}$$

Soluzione

- (1) Banalmente si verifica che $T_n(au + bv) = aT_n(u) + bT_n(v)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in X$. Inoltre

$$|T_n(u)| \leq \|u\|_\infty + \|u\|_\infty \leq 2\|u\|$$

per ogni $u \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine scelta $u \equiv 1$ si ha che $|u| = 1$ e $T_n(u) = 2$. Possiamo quindi concludere che T_n ha norma 2.

- (2) Grazie al teorema di Lagrange, per ogni $u \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\xi_n \in [0, 1]$ tale che

$$|(T_n - T)(u)| = |u(\frac{1}{n}) - u(0)| = |u'(\xi_n)|(\frac{1}{n}).$$

In particolare se $|u| = 1$ si ha che

$$|(T_n - T)(u)| \leq \frac{1}{n}.$$

Questo implica che

$$\|T_n - T\| \leq \frac{1}{n}$$

da cui $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Oppure si puo' arrivare alle stesse conclusioni usando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$|(T_n - T)(u)| = |u(\frac{1}{n}) - u(0)| = |\int_0^{\frac{1}{n}} u'(x) dx| \leq |u| \int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n}|u|.$$

Da cui segue, per definizione di norma, che

$$\|T_n - T\| \leq \frac{1}{n}.$$

Scritto totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 8.9.2011**

- (1) **(10 punti)** Sia $X = C^0[0, 1]$ munito della norma del massimo. Sia

$$T(u) = \int_0^1 u(x)dx - u(1).$$

Verificare che T e' un funzionale lineare e continuo di norma 2.

- (2) **(8 punti)** Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \rightarrow Z$ un operatore lineare e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare, continuo e biiettivo. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che J e' continuo.

- (3) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X' . Definiamo

$$M^0 := \{f \in X' : |f(x)| \leq 1 \forall x \in M\}$$

e

$$N^0 := \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \forall f \in N\}.$$

Per ogni $r > 0$ sia $B_r^X := \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ e $B_r^{X'} = \{f \in X' : \|f\| \leq r\}$. Sia $0 < r < R$. Provare che

(a) **(4 punti)** $(B_R^X \setminus B_r^X)^0 = (B_R^X)^0$;

(b) **(4 punti)** $(B_R^{X'})^0 = B_{\frac{1}{R}}^X$;

(c) **(4 punti)** $(B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0 = (B_R^{X'})^0$.

Soluzione

- (1) si verifica facilmente che T e' un funzionale lineare. Inoltre per ogni $u \in C^0[0, 1]$ $|T(u)| \leq \|u\|_\infty + |u(1)| \leq 2\|u\|_\infty$. Quindi $\|T\| \leq 2$. Per dimostrare che $\|T\| = 2$ proviamo che esiste una successione $u_n \in C^0[0, 1]$ tale che $\|u_n\|_\infty = 1$ e $\lim_n |T(u_n)| = 2$. Sia

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ -nx + n - 1 & \text{se } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Allora

$$\begin{aligned} T(u_n) &= 1 - \frac{1}{n} + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (-nx + n - 1) dx + 1 \\ &= 2 - \frac{1}{n} - n \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1-\frac{1}{n}}^1 + (n-1) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

che tende a 2 per $n \rightarrow \infty$.

- (2) Da un corollario al teorema della mappa aperta segue che l'operatore lineare $T^{-1} : Y \rightarrow X$ e' anche continuo. Componendo allora con l'operatore continuo $J \circ T$ otteniamo che $J = J \circ T \circ T^{-1}$ e' continuo.

- (3) Si osservi preliminarmente che se $B \subset C$ allora $C^0 \subset B^0$.

(a) Dall'osservazione sopra segue che

$$(B_R^X)^0 \subset (B_R^X \setminus B_r^X)^0.$$

Poi, se $f \in (B_R^X \setminus B_r^X)^0$ allora per ogni $x \in B_R^X \setminus B_r^X$ vale che $|f(x)| \leq 1$. Sia $x \in B_R^X$. Se $x = 0$ allora $f(x) = 0$. Se $x \neq 0$ allora $R \frac{x}{\|x\|} \in B_R^X \setminus B_r^X$. Da cui segue che $|f(R \frac{x}{\|x\|})| \leq 1$ ossia $|f(x)| \leq \frac{\|x\|}{R} \leq 1$. In entrambi i casi $|f(x)| \leq 1$ ossia $f \in (B_R^X \setminus B_r^X)^0$.

(b) vedi compito del 6-7-2011.

(c) Dall'osservazione sopra segue che

$$(B_R^{X'})^0 \subset (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0.$$

Poi, se $x \in (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0$ allora per ogni $f \in (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0$ vale che $|f(x)| \leq 1$. Sia $f \in B_R^{X'}$. Se $f = 0$ allora $f(x) = 0$. Se $f \neq 0$ allora $R \frac{f}{\|f\|} \in B_R^{X'} \setminus B_r^{X'}$. Da cui segue che $|\frac{R}{\|f\|} f(x)| \leq 1$ ossia $|f(x)| \leq \frac{\|f\|}{R} \leq 1$. In entrambi i casi $|f(x)| \leq 1$ ossia $f \in (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0$.

Scritto totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 24.11.2011**

- (1) **(15 punti)** Sia $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua non identicamente nulla e sia $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ l'operatore definito da

$$Tu(x) := u(x)m(x).$$

Dimostrare che

- (a) **(5 punti)** T e' lineare e continuo;
(b) **(5 punti)** supponiamo che $\bar{x} \in (0, 1)$ sia tale che $M = |m(\bar{x})| = \max_{[0,1]} |m(x)|$. Per ogni $\epsilon > 0$ sia $u_\epsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{m(x)}{M} \chi_{[\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]}(x)$. Provare che $\|Tu_\epsilon\|_{L^2} \rightarrow \|m\|_\infty$ per $\epsilon \rightarrow 0$.
(c) **(5 punti)** Dedurre che $\|T\| = \|m\|_\infty$.
- (2) **(15 punti)** Sia $C^1[0, 1]$ munito della norma $\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ e $C[0, 1]$ sia munito della norma $\|\cdot\|_\infty$.
Sia $I : C^0[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = \int_0^t u(x)dx$. Verificare che I ha grafico chiuso. E' continuo?

Soluzioni.(1) **(15 punti)**(a) La linearita' segue facilmente. Inoltre per ogni $u \in X$

$$\|Tu\|_2 \leq \|u\|_2 \|m\|_\infty,$$

da cui segue che T e' continuo con norma $\|T\| \leq \|m\|_\infty$.(b) Supponiamo $M > 0$ (altrimenti segue facilmente che $\|T\| = \|m\|_\infty = 0$). Per ogni $\epsilon > 0$

$$\|Tu_\epsilon\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\epsilon} \int_{\bar{x}-\epsilon}^{\bar{x}+\epsilon} \left(\frac{m(x)}{M}\right)^2 \cdot (m(x))^2 dx = \frac{1}{M^2} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\bar{x}-\epsilon}^{\bar{x}+\epsilon} (m(x))^4 dx \rightarrow \frac{M^4}{M^2} = M^2$$

per $\epsilon \rightarrow 0$ essendo m continua in \bar{x} .(c) **(5 punti)** Si osservi che $\|u_\epsilon\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\epsilon} \int_{\bar{x}-\epsilon}^{\bar{x}+\epsilon} \left(\frac{m(x)}{M}\right)^2 dx \rightarrow 1$ per $\epsilon \rightarrow 0$. Quindi, usando la definizione di norma di un operatore, segue che

$$\|T\| \geq \frac{\|Tu_\epsilon\|_{L^2}^2}{\|u_\epsilon\|_{L^2}^2} \rightarrow M = \|m\|_\infty.$$

(2) **(15 punti)** Sia $u_n, u \in C^0[0, 1]$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $C[0, 1]$ e $Iu_n \rightarrow v \in C^1[0, 1]$. Proviamo che $v = Iu$. Poiche' $u_n \rightarrow u$ uniformemente, si puo' passare al limite sotto in segno di integrale e quindi per ogni $t \in (0, 1)$ vale che $v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Iu_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t u_n(x) dx = \int_0^t u(x) dx$ ossia

$$v(t) = \int_0^t u(x) dx.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che per ogni $t \in (0, 1)$ $v'(t) = u(t)$ ossia per ogni $t \in (0, 1)$

$$I(u)(t) = \int_0^t u(x) dx = \int_0^t v'(x) dx = v(t).$$

Infine I e' continuo per il teorema del grafico chiuso essendo $C[0, 1]$ e $C^1[0, 1]$ spazi di Banach con le norme considerate.

Scritto totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 25.01.2012**

- (1) **(15 punti)** Sia $X = l^2$ e sia $F_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ la successione di funzionali così definiti:

$$F_n(x) = x_n$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.

- (a) Calcolare $\|F_n\|$;
- (b) Dimostrare che $F_n(x) \rightarrow 0$, per ogni $x \in X$ ma F_n non converge a zero in X' .
- (2) **(15 punti)** Per ogni $u \in C^1[0, 1]$ sia $\|u\| = |u(0)| + \|u'\|_\infty$.
- (a) Verificare che $\|\cdot\|$ è una norma su $C^1[0, 1]$ che rende lo spazio uno spazio di Banach.
- (b) Sia $C[0, 1]$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e sia $I : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = u'(t)$. Verificare che I ha grafico chiuso. È continuo?

Primo Parziale di Analisi Funzionale**Ferrara, 15.5.2012**

- (1) Sia $X = L^p(0,1)$ ($1 \leq p < +\infty$) e sia $T : X \rightarrow X$ definito da $T(u)(t) = (1-t)u(t)$. Verificare che T e' ben posto, e' lineare, continuo e di norma 1.
- (2) Sia $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale lineare e continuo definito da

$$T_k(a) = \sum_{j=1}^k a_j b_j$$

dove $a = (a_n)_{n \geq 1}$.

- (a) Calcolare la norma di T_k ;
- (b) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia limitata. Dimostrare che $(b_k)_k \in l^1$.
- (3) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T_n : X \rightarrow Y$ una successione di funzionali lineari e continui tali che per ogni $f \in Y'$ la successione $(f \circ T_n)_n$ sia limitata in X' . Dimostrare che la successione $(T_n)_n$ e' limitata in $\mathcal{L}(X, Y)$.

Soluzioni

- (1) Sia $u \in L^p(0, 1)$, Allora $|T(u)|^p(t) = (1-t)^p|u(t)|^p \leq |u(t)|^p \in L^1(0, 1)$ e quindi $|T(u)|^p$ (che e' una funzione misurabile) appartiene allo spazio $L^1(0, 1)$, ossia $T(u) \in L^p(0, 1)$. Quindi T e' ben posto. Inoltre

$$\|Tu\|_p \leq \|u\|_p$$

per ogni $u \in L^p(0, 1)$, ossia $\|T\| \leq 1$. Per provare che $\|T\| = 1$ sia $u_n(x) = \sqrt[p]{n}\chi_{(0, \frac{1}{n})}$. Allora

$$\|u_n\|_p = \sqrt[p]{n} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

e

$$\begin{aligned} \|Tu_n\|_p &= \sqrt[p]{n} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[p]{p+1}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\equiv \frac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[p]{p+1}} \sqrt[p]{\frac{p+1}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

- (2) Per ogni $a \in X$ si ha che $|T_k(a)| \leq \|a\|_\infty \sum_{j=1}^k |b_j|$. Quindi

$$\|T_k\| \leq \sum_{j=1}^k |b_j|.$$

D'altra parte definito

$$a_h^k = \begin{cases} \text{segno}(b_h) = \frac{b_h}{|b_h|} & \text{se } b_h \neq 0 \quad h \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $\bar{a}_k := (a_h^k)_h$ si ha che $\|\bar{a}_k\|_\infty = 1$ e $T_k(\bar{a}_k) = \sum_{h=1}^k |b_h|$. Quindi

$$\|T_k\| \leq \sum_{j=1}^k |b_j|$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiche' c_0 e' chiuso rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ nello spazio l^∞ (che e' uno spazio di Banach) si ha che c_0 e' uno spazio di Banach. Essendo la famiglia di funzionali lineari e continui $(T_k)_k$ puntualmente limitata, per il Teorema di B.S., esiste $M \geq 0$ tale che

$$\sup_k \|T_k\| = \sup_k \sum_{h=1}^k |b_h| \leq M.$$

Cio' implica che la serie $\sum_{h=1}^\infty |b_h|$ converge al $\sup_k \|T_k\|$.

- (3) Si osservi che $(T_n)_n$ e' limitata in $\mathcal{L}(X, Y)$
 \iff esiste $M \geq 0$ tale che $\sup_n \|T_n\| \leq M$
 \iff esiste $M \geq 0$ tale che

$$\sup_n \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|T_n(x)\|_Y \leq M$$

\iff l'insieme

$$B = \{T_n(x) : x \in X, \|x\|_X \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$$

e' limitato in Y .

Da un corollario del teorema di B.S. sappiamo che un insieme B e' limitato in uno spazio di Banach Y se e solo se $f(B)$ e' limitato in \mathbb{R} per ogni $f \in Y'$. Ora, nel nostro caso,

$$f(B) = \{f(T_n(x)) : x \in X, \|x\|_X \leq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Essendo $(f \circ T_n)_n$ limitata in X' , vale che esiste $C \geq 0$ tale che

$$\|f \circ T_n\|_{X'} \leq C$$

e quindi per ogni $x \in X$, $\|x\|_X \leq 1$ vale che $|f(T_n(x))| \leq C$ da cui $f(B) \subset [-C, C]$.

Scritto totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 13.6.2012**

Per il **compito totale**: svolgere almeno un esercizio a scelta tra (1) e (2). Ciascuno vale 15 punti.

Per il **secondo parziale**: limitandosi agli esercizi (2) e (3), svolgere al massimo 3 implicazioni con al più una "a \implies b". Una implicazione corretta vale 12 punti, due valgono 24 punti, tre valgono 30.

- (1) Sia X uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ un'applicazione tale che $f \circ \alpha \in C[0, 1]$ per ogni $f \in X'$. Provare che
- (6 punti) α è limitata (ossia $\sup_{t \in [0, 1]} \|\alpha(t)\|_X \in \mathbb{R}$);
 - (6 punti) il funzionale $\psi : X' \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$\psi(f) := \int_0^1 f \circ \alpha(t) dt$$

è lineare e continuo.

- (3 punti) Se X è uno spazio di Hilbert munito di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dimostrare che esiste un unico $\bar{x} \in X$ tale

$$\langle \bar{x}, x \rangle = \int_0^1 \langle x, \alpha(t) \rangle dt \quad \forall x \in X.$$

- (2) Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach. Sia $T : X \rightarrow Y$ lineare e iniettivo, sia $Z = T(X)$ e sia

$$\|y\|_Z = \|y\|_Y + \|T^{-1}y\|_X.$$

Dimostrare che sono equivalenti le seguenti proprietà:

- $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ è continuo;
 - $(Z, \|\cdot\|_Z)$ è uno spazio di Banach e $T^{-1} : (Z, \|\cdot\|_Z) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ è continuo.
- (3) Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \rightarrow H$ un operatore lineare. Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni
- esiste $S : H \rightarrow H$ lineare tale che $(Sx, y) = (x, Ty)$
 - T è continuo.

Soluzioni

- (1) (a) Sia $f \in X'$. Poiché $f \circ \alpha \in C[0, 1]$, per il teorema di Weirstrass esiste il $\max_{t \in [0, 1]} |f(\alpha(t))| \in \mathbb{R}$. Applicando uno dei corollari al Teorema di Banach-Steinhaus (con $B = \{\alpha(t) : t \in [0, 1]\}$) segue che B è limitato ossia α è limitata;
- (b) facilmente si prova che il funzionale $\psi : X' \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare. Proviamo che è continuo, ossia che esiste $C > 0$ tale che

$$|\psi(f)| \leq C \|f\|_{X'}$$

per ogni $f \in X'$. Sia $C = \sup_{t \in [0, 1]} \|(\alpha(t))\|_X (\in \mathbb{R})$ e $f \in X'$. Essendo f un funzionale lineare e continuo, si ha che

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 |f \circ \alpha(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_{X'} |\alpha(t)| dt \leq C \|f\|_{X'}.$$

- (c) Si noti che $\psi \in X''$. Essendo X uno spazio di Hilbert, si ha che X è riflessivo e pertanto esiste un unico $\bar{x} \in X$ tale che

$$\int_0^1 \langle f, \alpha(t) \rangle dt = \psi(f) = \langle f, \bar{x} \rangle \quad \forall f \in X'.$$

In particolare applicando tale uguaglianza sui funzionali del tipo $f_x(y) = \langle x, y \rangle$ si ha che

$$\int_0^1 \langle f_x, \alpha(t) \rangle dt = \langle f_x, \bar{x} \rangle \quad \forall x \in X$$

ossia

$$\int_0^1 \langle x, \alpha(t) \rangle dt = \langle x, \bar{x} \rangle \quad \forall x \in X.$$

- (2) " \implies " Facilmente si prova che $\|\cdot\|_Z$ è una norma. Proviamo che $(Z, \|\cdot\|_Z)$ è uno spazio di Banach. Sia $(z_n)_n \in Z$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_Z$. Allora, dalla definizione di tale norma, si ha che $(z_n)_n$ è una successione di Cauchy in Y rispetto alla norma $\|\cdot\|_Y$ e $T^{-1}(z_n)$ è una successione di Cauchy in X rispetto alla norma $\|\cdot\|_X$. Essendo tali spazi completi, si ha che esiste $z \in Y$ e $x \in X$ tali che

$$\|z_n - z\|_Y \rightarrow 0, \quad \|T^{-1}(z_n) - x\|_X \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Essendo $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ continuo, si ha che

$$\|T(T^{-1}(z_n)) - Tx\|_Y \rightarrow 0$$

ossia

$$\|z_n - Tx\|_Y \rightarrow 0.$$

Segue allora che $Tx = z$ ossia che $z \in T(X) = Z$ e $x = T^{-1}z$. In particolare

$$\begin{aligned} \|z_n - z\|_Z &= \|z_n - z\|_Y + \|T^{-1}(z_n) - T^{-1}z\|_X \\ &= \|z_n - z\|_Y + \|T^{-1}(z_n) - x\|_X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$. Quindi $(Z, \|\cdot\|_Z)$ è uno spazio di Banach.

Proviamo ora che $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Z, \|\cdot\|_Z)$ è continuo: infatti essendo $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ continuo esiste $C > 0$ tale che

$$|T(x)|_Y \leq C|x|_X$$

e quindi

$$|T(x)|_Z = |T(x)|_Y + |x|_X \leq (C + 1)|x|_X.$$

Applicando il teorema della mappa aperta a $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Z, \|\cdot\|_Z)$ (che e' un operatore continuo tra spazi di Banach) segue che $T^{-1} : (Z, \|\cdot\|_Z) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ e' continuo.

" \Leftarrow " Dimostriamo che $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ e' chiuso: sia $x_n \rightarrow 0$ in X e sia $Tx_n \rightarrow y$ in Y . Proviamo che $y = 0$. Per ipotesi $T^{-1} : (Z, \|\cdot\|_Z) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ e' continuo. Quindi applicando il teorema della mappa aperta segue che $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Z, \|\cdot\|_Z)$ e' continuo. In particolare poiche' $x_n \rightarrow 0$ in X segue che

$$Tx_n \rightarrow 0$$

in Z ossia $|Tx_n|_Y + |x_n|_X \rightarrow 0$ in X . Dall'unicita' del limite cio' implica che $y = 0$.

- (3) " \Rightarrow " Essendo T lineare, per provare che e' continuo, dimostriamo che T e' chiuso: sia $x_n \rightarrow x$ e $Tx_n \rightarrow y$. Allora

$$(z, Tx_n) = (Sz, x_n)$$

per ogni $z \in H$ da cui

$$(z, y) = (Sz, x) = (z, Tx)$$

per ogni $z \in H$. In particolare $y = Tx$.

" \Leftarrow " Per ogni $y \in H$ sia $f_y : H \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$f_x(y) = (x, Ty).$$

E' facile provare che f_x e' lineare. Proviamo che e' continuo. Infatti, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e la continuita' di T si ha che

$$|f_x(y)| = |(x, Ty)| \leq |x| |Ty| \leq |x| \cdot \|T\| |y|.$$

Dal teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su uno spazio di Hilbert segue che esiste un elemento $Sx \in H$ tale che

$$(x, Ty) = f_x(y) = (Sx, y).$$

Proviamo che S e' lineare: per ogni $x, z \in H$ si ha che

$$\begin{aligned} (S(x+z), y) &= (x+z, Ty) \\ &= (x, Ty) + (z, Ty) = (Sx, y) + (Sz, y) = (Sx + Sz, y) \end{aligned}$$

per ogni $y \in H$ ossia $S(x+z) = Sx + Sz$. (analogamente procedere per provare che $S(\lambda x) = \lambda S(x)$).

Scritto totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 09.07.2012**

- (1) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e sia $T^* : Y' \rightarrow X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

Provare che

- (a) **(8 punti)** T e' continuo se e solo se T^* e' continuo;
(b) **(4 punti)** Dimostrare che se T e' continuo, allora

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(Y',X')}.$$

- (c) **(8 punti)** Dimostrare che se T e' continuo e biiettivo, allora T^* e' continuo e biiettivo.

- (2) **(10 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tale che valga la seguente proprieta': se $(x_n)_n \subset [0, 1]$ e' convergente, allora per ogni $f \in X'$ la successione reale $f(\alpha(x_n))$ e' limitata. Provare che α e' limitata su $[0, 1]$.

Scritto totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 16.7.2012**

- (1) **(14 punti)** Siano $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach. Sia $T : X \rightarrow Y$ lineare, sia

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y.$$

Dimostrare che sono equivalenti le seguenti proprietà:

- (a) $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ è continuo;
- (b) $(X, \|\cdot\|_T)$ è uno spazio di Banach.
- (2) Siano X, Y, Z spazi di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $K_n \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Provare che
- (a) **(6 punti)** se $T_n(x) \rightarrow T(x)$ per ogni $x \in X$, allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e se $x'_n \rightarrow x'$ in X allora $T_n(x'_n) \rightarrow T(x')$;
- (b) **(10 punti)** se $T_n(x) \rightarrow T(x)$ per ogni $x \in X$ e se $K_n(y) \rightarrow K(y)$ per ogni $y \in Y$ allora $K \circ T \in \mathcal{L}(X, Z)$ e $K_n \circ T_n(x) \rightarrow K \circ T(x)$ per ogni $x \in X$.

Esame scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 17.9.2012**

- (1) **(15 punti)** Sia X spazio di Banach, $T_n : X \rightarrow X$ una famiglia di operatori lineari e continui e $\mathcal{D} \subset X$ un sottoinsieme denso tale che:

$$T_n x \rightarrow x \text{ per } n \rightarrow \infty, \forall x \in \mathcal{D}$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (a) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} < \infty$
- (b) $T_n x \rightarrow x, \forall x \in X$
- (2) **(15 punti)** Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach. Sia $T : X \rightarrow Y$ lineare, biiettivo e sia

$$\|y\|_T = \|y\|_Y + \|T^{-1}y\|_X.$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (a) $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ e' continuo;
- (b) $(Y, \|\cdot\|_T)$ e' uno spazio di Banach e $T^{-1} : (Y, \|\cdot\|_T) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ e' continuo.

Primo parziale di Analisi Funzionale**Ferrara, 11.1.2013**

(1) Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ e sia $1 \leq p \leq \infty$. Per ogni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia

$$T_k((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{k^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dimostrare che:

- (a) **(2 punti)** se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ allora $T_k((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in l^1$;
 (b) **(4 punti)** l'operatore $T_k : l^p \rightarrow l^1$ è lineare e continuo;
 (c) **(4 punti)** per $p = 1$ si ha che

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(l^1, l^1)} = \frac{1}{k};$$

(d) **(4 punti)** per $p = +\infty$ si ha che

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(l^\infty, l^1)} = \frac{1}{k-1};$$

(e) **(4 punti)** per ogni $1 < p < \infty$ si ha che

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \left(\frac{1}{k^{p'} - 1} \right)^{\frac{1}{p'}};$$

(f) **(2 punti)** per $k \rightarrow \infty$ la successione di operatori $(T_k)_k$ tende a 0 in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$.

(2) **(10 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $\alpha : X \rightarrow Y$ una funzione. Dimostrare che α ha immagine limitata se e solo se per ogni $f \in Y'$ si ha che $f \circ \alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ ha immagine limitata.

Soluzioni

- (1) Osserviamo che per ogni $1 \leq p \leq \infty$ si ha che $(\frac{1}{k^n})_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$. Infatti basta provare che $(\frac{1}{k^n})_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ in quanto $l^1 \subset l^p$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} - 1 = \frac{1}{k-1}$$

se e solo se

$$\frac{1}{k} < 1$$

e tale condizione e' soddisfatta in quanto $k \geq 2$. (In alternativa, se $1 \leq p < \infty$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{k^n})^p = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{k^p})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{k^p}} - 1 = \frac{1}{k^p - 1}$$

se e solo se

$$\frac{1}{k^p} < 1$$

ossia se $k^p > 1$, condizione soddisfatta in quanto $k \geq 2$. Se $p = \infty$ e $k \geq 2$ la successione $(\frac{1}{k^n})_n$ e' ovviamente limitata.) Così se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$, applicando la disuguaglianza di Holder, si ottiene che la successione $T_k(x) = (x_n \cdot \frac{1}{k^n}) \in l^1$. Inoltre banalmente si dimostra che l'operatore T_k e' lineare e, applicando la disuguaglianza di Holder, si ha che

- se $1 < p \leq \infty$

$$\|T_k(x)\|_1 \leq \|(\frac{1}{k^n})_n\|_{p'} \cdot \|x\|_p = (\frac{1}{k^{p'} - 1})^{\frac{1}{p'}} \|x\|_p$$

- se $p = 1$

$$\|T_k(x)\|_1 \leq \|(\frac{1}{k^n})_n\|_{\infty} \cdot \|x\|_1 = \frac{1}{k} \cdot \|x\|_1$$

Quindi l'operatore $T_k : l^p \rightarrow l^1$ e' lineare e continuo e

- per $p = 1$

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(l^1, l^1)} \leq \frac{1}{k}$$

- per ogni $1 < p \leq \infty$

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \left(\frac{1}{k^{p'} - 1}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

In particolare per $k \rightarrow \infty$ la successione di operatori $(T_k)_k$ tende a 0 in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$. Infine

$$\begin{aligned} \|T_k\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} &= \sup_{x \in l^p \setminus \{0\}} \frac{\|T_k(x)\|_1}{\|x\|_p} = \sup_{x \in l^p \setminus \{0\}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{k^n}}{\|x\|_p} \geq \sup_{x \in l^p \setminus \{0\}} \frac{|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k^n}|}{\|x\|_p} \\ &= \|(\frac{1}{k^n})_n\|_{p'} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } p = 1 \\ (\frac{1}{k^{p'} - 1})^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

- (2) La funzione α ha immagine limitata in Y se e solo se l'insieme

$$\alpha(X) := \{\alpha(x) : x \in X\}$$

e' limitato in Y . Da un corollario al teorema di Banach-Steinhaus questo e' equivalente a richiedere che per ogni $f \in Y'$ l'insieme $f(\alpha(X))$ sia limitato in \mathbb{R} ossia che per ogni $f \in Y'$ la funzione $f \circ \alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ abbia immagine limitata.

Secondo parziale di di Analisi Funzionale**Ferrara, 22.1.2013**

(1) **(14 punti)** Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti

(a) $T \in X'$;

(b) per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$

$$x_n \rightharpoonup x \implies (Tx_n)_n \text{ limitata in } \mathbb{R}.$$

(2) Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach e Y, Z sottospazi chiusi di X tali che $Y \cap Z = \{0_X\}$. Si consideri su $Y \times Z$ la norma

$$\|(y, z)\| = |y|_X + |z|_X$$

e su $Y + Z$ la norma $|\cdot|_X$. Sia $I : Y \times Z \rightarrow Y + Z$ il funzionale definito da

$$I(y, z) = y + z.$$

Provare che

(a) **(4 punti)** I e' continua e iniettiva;

(b) **(12 punti)** I^{-1} e' continua se e solo se $Y + Z$ e' chiuso in X .

Esame scritto di di Analisi Funzionale

Ferrara, 22.1.2013

- (1) (**7 punti**) Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che se $(x_n)_n$ e' debolmente convergente in X allora $(Tx_n)_n$ e' limitata in \mathbb{R} . Provare che $T \in X'$.
- (2) Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach e Y, Z sottospazi chiusi di X tali che $Y \cap Z = \{0_X\}$. Si consideri su $Y \times Z$ la norma

$$|(y, z)| = |y|_X + |z|_X$$

e su $Y + Z$ la norma indotta da X . Sia $I : Y \times Z \rightarrow Y + Z$ definita da

$$I(y, z) = y + z.$$

Provare che

- (a) (**2 punti**) I e' continua e iniettiva;
- (b) (**6 punti**) I^{-1} e' continua se e solo se $Y + Z$ e' chiuso in X .
- (3) (**15 punti**) Sia $X = l^p$ con $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $\{x_n\}_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = \sum_{n=1}^k x_n a_n \quad \forall a \in X.$$

- (a) Provare che se $1 < p \leq +\infty$ allora T_k e' un funzionale lineare e continuo con

$$\|T_k\| = \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}};$$

- (b) provare che se $p = 1$ allora T_k e' un funzionale lineare e continuo con

$$\|T_k\| = \sup_{1 \leq n \leq k} |x_n|.$$

- (c) Supponendo che per ogni $a \in X$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ abbia limite finito si provi che la successione $\{x_n\}_n \in l^{p'}$.

Soluzioni

- (1) "⇒" Supponiamo che $T \in X'$ e sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una successione debolmente convergente. Allora e' noto (vedere Proposizione III.5 (iii) del Brezis) che la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e' limitata in X ossia esiste M tale che $\|x_n\| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare

$$|T(x_n)| \leq \|T\| \cdot \|x_n\| \leq \|T\|M$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ ossia la successione $(T(x_n))_n$ e' limitata in \mathbb{R} .

"⇐" Per assurdo T non sia continuo. Allora

$$\sup_{x \in X, \|x\|=1} |T(x)| = +\infty.$$

Quindi esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tale che $\|x_n\| = 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = +\infty.$$

Essendo X uno spazio di Banach riflessivo, grazie al Teorema III.27 del Brezis, esiste una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ estratta da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che e' debolmente convergente in X . Allora la successione $T(x_{k_n})$ dovrebbe essere limitata. Assurdo.

- (2) (a) Intanto e' facile provare che $\|(\cdot, \cdot)\|$ e' una norma su $Y \times Z$. Inoltre essendo Y, Z sottospazi chiusi e' facile provare che $Y \times Z$ e' uno spazio di Banach. Infatti se $\{(y_n, z_n)\}_n$ e' una successione di Cauchy in $Y \times Z$ rispetto alla norma $\|(\cdot, \cdot)\|$, facilmente si verifica che le successioni $\{y_n\}_n$ e $\{z_n\}_n$ sono successioni di Cauchy in X . Quindi esiste $y_0, z_0 \in X$ tali che $|y_n - y_0|_X \rightarrow 0$ e $|z_n - z_0|_X \rightarrow 0$. Poiche' Y, Z sono chiusi, segue che $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$. In particolare

$$\|(y_n, z_n) - (y_0, z_0)\| = |y_n - y_0|_X + |z_n - z_0|_X \rightarrow 0.$$

Poi

- I e' iniettivo: infatti se $I(y_1, z_1) = I(y_2, z_2)$ allora $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ da cui $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in Y \cap Z = \{0_X\}$. Quindi $y_1 - y_2 = 0_X = z_2 - z_1$ ossia $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.
- I e' continuo: infatti I e' lineare (facile da verificare) e

$$|I(y, z)|_X = |y + z|_X \leq |y|_X + |z|_X = \|(y, z)\|.$$

- (b) "⇐" Osserviamo che I e' suriettivo: infatti se $w \in Y + Z$ allora esistono $y \in Y, z \in Z$ tali che $w = y + z$. In particolare $I(y, z) = w$. Se $Y + Z$ e' chiuso in X allora I e' un'applicazione continua e biettiva tra spazi di Banach e quindi ha inversa continua. "⇒" Essendo $I^{-1} : Y + Z \rightarrow Y \times Z$ continua, esiste $C > 0$ tale che

$$(1) \quad |y|_X + |z|_X = \|(y, z)\| = \|I^{-1}(y + z)\| \leq C|y + z|_X$$

per ogni $(y, z) \in Y \times Z$.

Se $(y_n + z_n)_n \subset Y + Z$ e' tale che $|y_n + z_n - w_0|_X \rightarrow 0$, allora, grazie a (1), le successioni $(y_n)_n$ e $(z_n)_n$ risultano essere successioni di Cauchy in X . Quindi esistono $y_0, z_0 \in X$ tali che $|y_n - y_0|_X \rightarrow 0$ e $|z_n - z_0|_X \rightarrow 0$. Poiche' Y, Z sono chiusi, segue che $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$. Inoltre $|y_n + z_n - y_0 - z_0|_X \leq |y_n - y_0|_X + |z_n - z_0|_X$ e quindi $y_n + z_n \rightarrow y_0 + z_0$ in X e per l'unicita' del limite $y_0 + z_0 = w_0$.

- (3) Sia

$$y_k = \begin{cases} x_n & \text{se } n \leq k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $y_k \in l^p$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ e quindi dal teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su l^p segue che il funzionale T_k e' un funzionale lineare e continuo con

$$\|T_k\| = \|T_{y_k}\| = \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

se $1 < p \leq +\infty$ e

$$\|T_k\| = \sup_{1 \leq n \leq k} |x_n|$$

se $p = 1$.

Se per ogni $a \in X$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ ha limite finito allora da un corollario al teorema di Banach Steinhaus si ha che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \in \mathbb{R}$$

se $1 < p \leq +\infty$ e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{1 \leq n \leq k} |x_n|$$

se $p = 1$.

Segue quindi che la successione $\{x_n\}_n \in l^{p'}$.

Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 28 maggio 2013

(1) **(15 punti)** Sia X uno spazio di Banach e $T : X \rightarrow X'$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (X', \|\cdot\|_{X'})$ continuo;

(b) per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ e per ogni $x \in X$

$$x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \xrightarrow{*} Tx.$$

(2) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $X = l^p \times l^{p'}$ dotato della norma $\|(x, y)\|_X := \|x\|_p + \|y\|_{p'}$ per ogni $(x, y) \in X$. Sia $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + y_n}{2^n}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^{p'}$. Dimostrare che:

(a) **(6 punti)** T e' un operatore ben posto, lineare e continuo;

(b) **(5 punti)** per $p \notin \{1, +\infty\}$ si ha che

$$\|T\|_{X'} = \max \left\{ \left(\frac{1}{2^{p'} - 1} \right)^{\frac{1}{p'}} ; \left(\frac{1}{2^p - 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\};$$

(c) **(4 punti)** per $p \in \{1, +\infty\}$ si ha che

$$\|T\|_{X'} = 1.$$

(Per la risoluzione del primo esercizio si osservi che per se T e' continuo forte forte, allora e' continuo debole debole. Poiche' la topologia debole* e' meno fine della topologia debole, abbiamo che T e' continuo debole debole *. In particolare e' sequenzialmente continuo.)

Scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 25 giugno 2013**

- (1) **(20 punti)** Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$.

Provare i seguenti fatti:

- (a) per ogni $x \in X$ vale che $T_x \in X''$ e $\|T_x\|_{X''} = |x|_X$;
- (b) per ogni $x, y \in X$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$;
- (c) provare che per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ se $x_n \rightarrow x_0$ in X allora $T_{x_n} \rightarrow T_{x_0}$ in X'' ;
- (d) se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ e' tale che $\sup_n |T_{x_n}(f)| < +\infty$ per ogni $f \in X'$ allora (x_n) e' limitata in X ;
- (e) se f_n converge a f debole* in X' allora $T_x(f_n) \rightarrow T_x(f)$ per ogni $x \in X$.

- (2) **(10 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia T l'operatore definito da

$$T(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n e^{na}$$

per ogni $y = (y_n)_n \in l^2$. Dimostrare che T e' un operatore lineare e continuo con

$$\|T\|_{X'} = \sqrt{\frac{e^{2a}}{1 - e^{2a}}}$$

se e solo se $a < 0$.

- (1) (a) Fissiamo $x \in X$. Per ogni $f, g \in X'$ e $a, b \in \mathbb{R}$ vale che

$$T_x(af + bg) = (af + bg)(x) = af(x) + bg(x) = aT_x f + bT_x g$$

ossia T_x e' un operatore lineare. Inoltre da un corollario al Teorema di Hahn Banach vale che

$$\sup_{f \in X', \|f\|_{X'} \leq 1} |f(x)| = \|x\|_X$$

ossia

$$\sup_{f \in X', \|f\|_{X'} \leq 1} |T_x(f)| = \|x\|_X.$$

Questo implica che $T_x \in (X')' = X''$ e $\|T_x\|_{X''} = \|x\|_X$;

- (b) Fissiamo $x, y \in X$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $f \in X'$ vale che

$$T_{ax+by}(f) = f(ax + by) = af(x) + bf(y) = aT_x(f) + bT_y(f);$$

quindi $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$.

- (c) sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una successione tale che $x_n \rightarrow x_0$ in X . Allora applicando rispettivamente il punto (b) e poi il punto (a) segue che

$$\|T_{x_n} - T_{x_0}\|_{X''} = \|T_{x_n - x_0}\|_{X''} = \|x_n - x_0\|_X.$$

Quindi $T_{x_n} - T_{x_0} \rightarrow 0$ in X' .

- (d) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tale che $\sup_n |T_{x_n}(f)| < +\infty$ per ogni $f \in X'$. Allora dal teorema di Banach Steinhaus (applicato sullo spazio X') segue che

$$\sup_n \|T_{x_n}\|_{X''} < +\infty$$

e quindi, grazie alla proprieta' (a) segue che

$$\sup_n \|x_n\|_X < +\infty$$

ossia (x_n) e' limitata in X ;

- (e) Sia f_n convergente debole* in X' a f . Allora $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$ ossia $T_x(f_n) \rightarrow T_x(f)$ per ogni $x \in X$.

(2)

- (3) Sia $a \in \mathbb{R}$. Dal teorema di rappresentazione degli operatori lineari e continui su l^2 si ha che T e' un operatore lineare e continuo su l^2 se e solo se la successione $(e^{na})_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ ossia se da

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2na} < +\infty.$$

Essendo questa una serie geometrica, converge se e solo se $|e^{2a}| < 1$ ossia se e solo se $a < 0$. Inoltre la norma di T coincide con la norma in l^2 della successione $(e^{na})_{n \in \mathbb{N}}$ da cui

$$\|T\|_{X'} = \sqrt{\frac{1}{1 - e^{2a}} - 1} = \sqrt{\frac{e^{2a}}{1 - e^{2a}}}.$$

Scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 18 luglio 2013**

(1) **(15 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e $T : X \rightarrow Y$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ continuo;

(b) per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ e per ogni $x \in X$, se $x_n \rightarrow x$ in X allora $Tx_n \rightarrow Tx$ in Y .

(2) **(15 punti)** Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Per ogni $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ sia

$$T_x(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n (\sin x)^n.$$

Dimostrare che $T_x \in (l^2)'$ e che

$$\|T_x\|_{(l^2)'} = |\tan x|.$$

Esame Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 10.10.2013

(1) Per ogni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia

$$T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dimostrare che:

(a) (**2 punti**) se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ allora $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in l^1$;

(b) (**6 punti**) per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ l'operatore $T : l^p \rightarrow l^1$ e' ben posto, e' lineare e continuo;

(c) (**10 punti**) per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ si ha che

$$\|T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \in [1, e].$$

(2) (**12 punti**) Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach.

Provare i seguenti fatti:

(a) se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_n \subset X$ sono tali che $|x_n - y_n|_X \rightarrow 0$ e $x_n \rightarrow x_0$ in X allora $y_n \rightarrow x_0$ in X ;

(b) se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_n \subset X'$ sono tali che $|f_n - g_n|'_X \rightarrow 0$ e $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$ in X' allora $g_n \xrightarrow{w^*} f_0$ in X' .

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 26.11.2013

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T : l^p \rightarrow l^p$ così definito:

$$(T(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ x_k + x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$.

(a) **(5 punti)** Dimostrare che l'operatore T è lineare e continuo con

$$\|T\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 2;$$

(b) **(5 punti)** calcolare $T(e_n)$ e $T(f_n)$ dove $e_n = (\delta_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ e $f_n = e_n + e_{2n}$. Dedurre che per $p = 1$ e per $p = +\infty$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 2;$$

(c) **(3 punti)** dimostrare che per ogni $k \geq n+1$ si ha che

$$\|T(\sum_{i=1}^k e_i)\|_{l^p} = (2^p(k-n) + 2n)^{\frac{1}{p}};$$

(d) **(4 punti)** usando la (c) calcolare la $\|T\|_{\mathcal{L}(l^p)}$ per $1 < p < \infty$.

(2) **(5+8 punti)** Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato, $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazio di Banach e $T : X \rightarrow Y$ lineare. Provare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) T è continuo;

(b) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ limitata (in X) e $\forall f \in Y'$ vale che $(f(T(x_n)))_n$ è limitata in \mathbb{R} .

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 16.01.2014

Primo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

- (a) **(P: 15 punti, T: 12 punti)** Sia $1 \leq p < \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \rightarrow l^p$ cosí definito:

$$(T_n(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ x_k + \frac{1}{n}x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$.

- (i) **(P: 4 punti, T: 3 punti)** Dimostrare che l'operatore T_n è lineare e continuo con $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$;
- (ii) **(P: 4 punti, T: 3 punti)** dimostrare che per $n \rightarrow \infty$ vale che $\|T_n - I\|_{\mathcal{L}(l^p)} \rightarrow 0$ dove $I : l^p \rightarrow l^p$ è l'operatore identità;
- (iii) **(P: 3 punti, T: 2 punti)** calcolare $T_n(e_n)$ dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ e per $p = 1$ dimostrare che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}$;
- (iv) **(P: 4 punti, T: 4 punti)** per ogni $k \geq n+1$ calcolare

$$\|T_n(\sum_{i=1}^k e_i)\|_{l^p}^p = (1 + \frac{1}{n})^p k - n((1 + \frac{1}{n})^p - 1 - \frac{1}{n^p});$$

al fine di dedurre che per ogni $1 < p < \infty$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

- (b) **(P: 15 punti, T: 7 punti)** Sia X uno spazio di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X \rightarrow X$ lineare e continuo tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = x$ per ogni $x \in X$. Inoltre sia $T : X \rightarrow X$ un operatore lineare tale che $T_n \circ T : X \rightarrow X$ sia continuo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che
- (i) **(4 punti)** $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;
- (ii) **(5 punti)** $\sup_n \|T_n \circ T\|_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;
- (iii) **(6 punti)** T è continuo.

- (c) **(T: 4 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua tale che $T(X)$ sia chiuso e $T(B_X)$ sia compatto (in Y). Dimostrare che $T(X)$ ha dimensione finita.

- (d) **(T: 7 punti)** Sia E uno spazio di Banach e sia $(x_n)_n \subseteq E$ e $x_0 \in E$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:
- (i) $(x_n)_n$ è debolmente convergente a x_0 in E ;
- (ii) $(x_n)_n$ è limitata in E e l'insieme

$$V := \{f \in E' : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)\}$$

è un sottospazio denso di E' .

Secondo parziale (P) e scritto totale (T) di Analisi Funzionale

- (a) (**P: 11 punti**) Sia E spazio di Banach riflessivo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in K_n$ dove (K_n) e' una successione di sottoinsiemi convessi chiusi di E tali che

- (i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $K_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

Provare che esiste una sottosuccessione (x_{k_n}) estratta da (x_n) convergente debolmente in E ad un punto $x_0 \in \bigcap_n K_n$.

(In alternativa si provi che $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$ (**P: 9 punti**)).

- (b) (**P: 15 punti, T: 7 punti**) Sia E uno spazio di Banach e sia $(x_n)_n \subseteq E$ e $x_0 \in E$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:

- (i) $(x_n)_n$ e' debolmente convergente a x_0 in E ;
(ii) $(x_n)_n$ e' limitata in E e l'insieme

$$V := \{f \in E' : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)\}$$

e' un sottospazio denso di E' .

- (c) (**P, T: 4 punti**) Siano X, Y , due spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare e continuo tale che $T(X)$ sia chiuso e $T(B_X)$ sia compatto (in Y). Provare che $T(X)$ e' uno spazio vettoriale di dimensione finita.

- (d) (**T: 12 punti**) Sia $1 \leq p < \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \rightarrow l^p$ cosí definito:

$$(T_n(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ x_k + \frac{1}{n}x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$.

- (i) (**3 punti**) Dimostrare che l'operatore T_n e' lineare e continuo con $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$;
(ii) (**3 punti**) dimostrare che per $n \rightarrow \infty$ vale che $\|T_n - I\|_{\mathcal{L}(l^p)} \rightarrow 0$ dove $I : l^p \rightarrow l^p$ e' l'operatore identita';
(iii) (**2 punti**) calcolare $T_n(e_n)$ dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ e per $p = 1$ dimostrare che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n};$$

- (iv) (**4 punti**) per ogni $k \geq n+1$ calcolare $\|T_n(\sum_{i=1}^k e_i)\|_{l^p}^p$ al fine di dedurre che per ogni $1 < p < \infty$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

- (e) (**T: 7 punti**) Sia X uno spazio di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X \rightarrow X$ lineare e continuo tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = x$ per ogni $x \in X$. Inoltre sia $T : X \rightarrow X$ un operatore lineare tale che $T_n \circ T : X \rightarrow X$ sia continuo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che

- (i) (**2 punti**) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;
(ii) (**2 punti**) $\sup_n \|T_n \circ T\|_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;
(iii) (**3 punti**) T e' continuo.

Esame scritto di Analisi Funzionale

(a) **(12 punti)** Sia $1 \leq p < \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \rightarrow l^p$ così definito:

$$(T_n(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ x_k + \frac{1}{n}x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$.

(i) **(3 punti)** Dimostrare che l'operatore T_n e' lineare e continuo con

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n};$$

(ii) **(3 punti)** dimostrare che per $n \rightarrow \infty$ vale che $\|T_n - I\|_{\mathcal{L}(l^p)} \rightarrow 0$ dove $I : l^p \rightarrow l^p$ e' l'operatore identita';

(iii) **(2 punti)** calcolare $T_n(e_n)$ dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ e per $p = 1$ dimostrare che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n};$$

(iv) **(4 punti)** per ogni $k \geq n+1$ calcolare $\|T_n(\sum_{i=1}^k e_i)\|_{l^p}^p$ al fine di dedurre che per ogni $1 < p < \infty$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

(b) **(7 punti)** Sia X uno spazio di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X \rightarrow X$ lineare e continuo tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = x$ per ogni $x \in X$. Inoltre sia $T : X \rightarrow X$ un operatore lineare tale che $T_n \circ T : X \rightarrow X$ sia continuo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che

(i) **(2 punti)** $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;

(ii) **(2 punti)** $\sup_n \|T_n \circ T\|_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;

(iii) **(3 punti)** T e' continuo.

(c) **(4 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua tale che $T(X)$ sia chiuso e $T(B_X)$ sia compatto (in Y). Dimostrare che $T(X)$ ha dimensione finita.

(d) **(7 punti)** Sia E uno spazio di Banach e sia $(x_n)_n \subseteq E$ e $x_0 \in E$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $(x_n)_n$ e' debolmente convergente a x_0 in E ;

(ii) $(x_n)_n$ e' limitata in E e l'insieme

$$V := \{f \in E' : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)\}$$

e' un sottospazio denso di E' .

Soluzione

Esercizio 1.

Osserviamo preliminarmente che, per l'ipotesi di monotonia sulla successione $(K_n)_n$, se $x_n \in K_n \forall n \in \mathbb{N}$ allora in particolare $x_m \in K_n \forall m \geq n$. Poichè $(x_n)_n \subseteq K_1$ che è limitato, si ha che la successione $(x_n)_n$ è limitata. Dalla riflessività di E segue che $\exists(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$, $\exists x_0 \in E$ tali che $x_{k_n} \rightharpoonup x_0$. Dalla monotonia degli indici della sottosuccessione sappiamo che $k_m \geq m$, quindi, grazie all'osservazione iniziale, si ha che $x_{k_m} \in K_n \forall m \geq n$. In particolare x_0 appartiene alla chiusura debole di K_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora, K_n è convesso e chiuso forte, quindi K_n è chiuso anche rispetto la topologia debole. In particolare $x_0 \in K_n \forall n$ e quindi $x_0 \in \bigcap_n K_n$.

Esercizio 2.

(a) \implies (b). Per ipotesi assumiamo che $x_n \rightharpoonup x_0$. Dalle proprietà della convergenza debole segue immediatamente che $(x_n)_n$ è limitata (prima tesi) e che $\forall f \in E' f(x_n) \rightarrow f(x_0)$; questo implica che l'insieme V coincide con tutto E' e pertanto è denso in esso.

(b) \implies (a). Per le proprietà della convergenza debole, provare che $x_n \rightharpoonup x_0$ è equivalente a provare che $\forall f \in E' f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Siano dunque $f \in E'$, $\varepsilon > 0$, $f_0 \in V$ tali che $\|f - f_0\| < \varepsilon$ (una siffatta f_0 esiste per la densità di V in E') e sia $M = \sup_n \|x_n\| < +\infty$

poichè $(x_n)_n$ è limitata per ipotesi).

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_0)| &\leq |f(x_n) - f_0(x_n)| + |f_0(x_n) - f_0(x_0)| + |f_0(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f - f_0\|(\|x_n\| + \|x_0\|) + |f_0(x_n) - f_0(x_0)| \\ &< \varepsilon(M + \|x_0\|) + |f_0(x_n) - f_0(x_0)|. \end{aligned}$$

Passando al lim sup per $n \rightarrow \infty$, e ricordando che $f_0 \in V$, si ottiene che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon(M + \|x_0\|).$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x_0)| \leq 0$$

da cui $|f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0$.

Esercizio 3.

$T(X)$ chiuso $\subseteq Y$ Banach $\implies T(X)$ Banach. Allora la restrizione $T : X \rightarrow T(X)$ è lineare, continuo e suriettivo su $Z = T(X)$. Dal teorema della mappa aperta segue allora che $\exists c > 0$ tale che

$$\overline{B_Z(0, c)} = \{y \in T(X) \mid \|y\| \leq c\} \subseteq T(B_X).$$

Pertanto $\overline{B_Z(0, c)}$ chiuso $\subseteq T(B_X)$ compatto $\implies \overline{B_Z(0, c)}$ compatto. Dal lemma di Riesz $Z = T(X)$ ha dimensione finita.

Esercizio 4.

(a) Esplicitando $T_n(x)$ dalla definizione si ottiene:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \left(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + \frac{1}{n}x_1, x_{n+2} + \frac{1}{n}x_2, \dots \right) \\ &= (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} + \dots) + \frac{1}{n} \left(0, \dots, 0, \overbrace{x_1}^{n\text{-esimo posto}}, x_2, \dots \right) \\ (2) \quad &= x + \frac{1}{n} (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

da cui

$$\|T_n(x)\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \frac{1}{n} \|(0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)\|_{\ell^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|x\|_{\ell^p}.$$

Pertanto $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

(b) Utilizzando (2) abbiamo che $T_n(x) - I(x) = \frac{1}{n}(0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ e dunque

$$\|(T_n - I)(x)\|_{\ell^p} = \frac{\|x\|_{\ell^p}}{n} \implies \|T_n - I\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(c) Essendo $e_n = (\delta_{n,k})$, si ha $\|e_n\|_{\ell^p} = 1 \forall p$ e dalla definizione di T_n segue

$$T_n(e_n) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-esimo posto}}, 0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{n}}_{2n\text{-esimo posto}}, 0, \dots)$$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} \geq \|T_n(e_n)\|_{\ell^1} = 1 + \frac{1}{n} \implies \|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} = 1 + \frac{1}{n}$$

(d) Per ogni $1 < p < \infty$

$$\left\| T_n \left(\sum_{i=1}^k e_i \right) \right\|_{\ell^p}^p = k \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 - \frac{1}{n^p} \right]$$

Quindi

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \geq \frac{\|T_n(\sum_{i=1}^k e_i)\|_{\ell^p}^p}{\|\sum_{i=1}^k e_i\|_{\ell^p}^p} \sim \frac{\sqrt[p]{k \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p}}{\sqrt[p]{k}} = 1 + \frac{1}{n}$$

Esercizio 5.

(a) Per ipotesi T_n converge puntualmente pertanto $\forall x \sup_n \|T_n(x)\| \in \mathbb{R}$. Dal teorema di Banach Steinhaus segue che $\sup_n \|T_n\| \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n \circ T)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\underbrace{T(x)}_{\in X}) \stackrel{\text{def}}{=} T(x) \forall x$, ovvero $T_n \circ T$ converge puntualmente.

Quindi $\forall x \sup_n \|(T_n \circ T)(x)\| \in \mathbb{R}$. Dal teorema di Banach Steinhaus segue che $\sup_n \|T_n \circ T\| \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\left. \begin{array}{l} T_n \circ T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{puntualmente}} T \\ T_n \circ T \text{ continuo per ipotesi} \end{array} \right\} \stackrel{\text{Cor BS}}{\implies} T \text{ continuo.}$$

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 4.02.2014

Secondo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

(1) **(T: 12 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \rightarrow l^p$ così definito:

$$T_n(x) := (x_k + \frac{x_{k+1}}{n})_{k \in \mathbb{N}}$$

per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$.

- (a) **(3 punti)** Dimostrare che l'operatore T_n è lineare e continuo con $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$;
- (b) **(3 punti)** dimostrare che per $n \rightarrow \infty$ vale che $\|T_n - I\|_{\mathcal{L}(l^p)} \rightarrow 0$ dove $I : l^p \rightarrow l^p$ è l'operatore identità;
- (c) **(2 punti)** dimostrare che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^\infty)} = 1 + \frac{1}{n}$;
- (d) **(4 punti)** per ogni $k \geq n + 1$ calcolare

$$\|T_n(\sum_{i=1}^k e_i)\|_{l^p}^p$$

dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ al fine di dedurre che per ogni $1 \leq p < \infty$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

(2) **(P: 18 punti, T: 12 punti)** Sia X uno spazio di Banach e siano $Y, Z \subset$ sottospazi di X tali che

- $Y \cap Z = \emptyset$
- per ogni $x \in X$ esiste $y \in Y$ e $z \in Z$ tale che $x = y + z$.

Provare che

- (a) **(P: 3 punti, T: 2 punti)** per ogni $x \in X$ esiste un unico $y (= Px) \in Y$ ed un unico $z \in Z$ tale che $x = y + z$.
- (b) **(P: 3 punti, T: 2 punti)** l'applicazione lineare $P : X \rightarrow Y$ è tale che $\text{Ker} P = Z$ e $\text{Im} P = Y$;
- (c) **(P: 12 punti, T: 8 punti)** $P : X \rightarrow Y$ è continua se e solo se Y e Z sono chiusi in X .
- (3) **(P: 12 punti, T: 6 punti)** Sia E uno spazio di Banach e sia $(f_n)_n \subseteq E'$ e $f_0 \in E'$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:
- (a) $(f_n)_n$ è debolmente* convergente a f_0 in E' ;
- (b) $(f_n)_n$ è limitata in E' e l'insieme

$$V := \{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_0(x)\}$$

è un sottospazio denso di E .

Correzione prova scritta di Analisi Funzionale 04.02.2014

Esercizio 1.

(a) Esplicitando $T_n(x)$ dalla definizione si ottiene:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \left(x_1 + \frac{x_2}{n}, x_2 + \frac{x_3}{n}, x_3 + \frac{x_4}{n}, \dots\right) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + \frac{1}{n} (x_2, x_3, x_4, \dots) \\ (3) \quad &= x + \frac{1}{n} (x_2, x_3, x_4, \dots) \end{aligned}$$

da cui

$$\|T_n(x)\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \frac{1}{n}\|x\|_{\ell^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|x\|_{\ell^p}.$$

Pertanto $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

(b) Utilizzando (2) abbiamo che $T_n(x) - I(x) = \frac{1}{n}(x_2, x_3, x_4, \dots)$ e dunque

$$\|(T_n - I)(x)\|_{\ell^p} \leq \frac{\|x\|_{\ell^p}}{n}$$

che implica che

$$\|T_n - I\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(c) Consideriamo $v = e_1 + e_2 = (1, 1, 0, \dots)$; abbiamo $\|v\|_{\ell^\infty} = \sup_k |v_k| = 1$ e, dalla definizione di T_n ,

$$T_n(v) = \left(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{0}{n}, 0, \dots\right) = \left(1 + \frac{1}{n}, 1, 0, \dots\right).$$

Per cui

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)} \geq \|T_n(v)\|_{\ell^\infty} = \sup_k |(T_nv)_k| = 1 + \frac{1}{n}$$

Mettendo insieme a quanto provato nel punto (a), otteniamo che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)} = 1 + \frac{1}{n}$$

(d) $\sum_{i=1}^m e_i = e_1 + e_2 + \dots + e_m = \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, \dots)}_m$. Per ogni $1 < p < \infty$

$$\left\| \sum_{i=1}^k e_i \right\|_{\ell^p}^p = m, \quad T_n \left(\sum_{i=1}^k e_i \right) = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, 1, 0, \dots\right)}_{m-1}$$

$$\left\| T_n \left(\sum_{i=1}^k e_i \right) \right\|_{\ell^p}^p = (m-1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p + 1$$

Quindi

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \geq \frac{\left\| T_n \left(\sum_{i=1}^k e_i \right) \right\|_{\ell^p}^p}{\left\| \sum_{i=1}^k e_i \right\|_{\ell^p}^p} \sim \frac{\sqrt[p]{m \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}}{\sqrt[p]{m}} = 1 + \frac{1}{n}$$

Mettendo insieme a quanto provato nel punto (a), otteniamo che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Esercizio 2.

(a) Per dimostrare l'unicità supponiamo che esistano $y_1, y_2 \in Y$ e $z_1, z_2 \in Z$ tali che $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$. Allora $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ da cui si ha

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 \in Y \cap Z = \{0\} \\ z_2 - z_1 \in Y \cap Z = \{0\} \end{aligned} \implies \begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

(b) $\ker(P) = \{x \in X | P(x) =: y = 0\} = \{x \in X | x = 0 + z, z \in Z\} = \{x \in X | x \in Z\} = Z$. Per dimostrare che $\text{Im}(P) = Y$ dimostriamo che $\forall y \in Y \exists x \in X$ tale che $y = Px$. Sia dunque $y \in Y$. Considerando l'elemento $x = y + 0 = y$, si ha che $y = Px = P(y + 0) = Py$. Infine segue che $(P \circ P)(x) = P(P(x)) = Py = y = Px$, cioè $P \circ P = P$.

(c) Supponiamo dapprima che Y e Z siano chiusi; poiché contenuti in uno spazio di Banach, saranno anch'essi spazi di Banach. Dal teorema del grafico chiuso segue che dimostrare la continuità di P è equivalente a provare che P ha grafico chiuso. Siano pertanto $x_n \in X$ e $w \in Y$ tali che $x_n \rightarrow 0$ in X e $Px_n \rightarrow w$ in Y . Dobbiamo dimostrare che $w = 0$. Dal punto (a) esistono $y_n \in Y$ e $z_n \in Z$ tali che $x_n = y_n + z_n$. Poiché $Px_n = y_n$ segue che

$$(4) \quad x_n - Px_n = y_n + z_n - y_n = z_n \in Z$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ in (4) otteniamo che la successione (z_n) tende a w . Poiché Z è chiuso e $(z_n) \subset Z$ si ha che $w \in Y \cap Z = \{0\}$ da cui la tesi. Viceversa supponiamo che $P : X \rightarrow Y$ sia continua. Allora $Z = \text{Ker}P = P^{-1}(\{0_Y\})$ è un chiuso. Resta da provare che anche Y è chiuso. Sia $(y_n) \subseteq Y$ tale che $y_n \rightarrow y$ in X . Proviamo che $y \in Y$. Dalla continuità di P abbiamo che $0 = y_n - Py_n \rightarrow y - Py$ ossia $y = Py$ da cui $y \in \text{Im}P = Y$.

Esercizio 3.

(a) \implies (b). Per ipotesi assumiamo che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$. Dalle proprietà della convergenza debole $*$ segue immediatamente che $(f_n)_n$ è limitata (prima tesi) e che $\forall x \in E f_n(x) \rightarrow f_0(x)$; questo implica che l'insieme V coincide con tutto E e pertanto è denso in esso.

(b) \implies (a). Per le proprietà della convergenza debole $*$, provare che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ è equivalente a provare che $\forall x \in E f_n(x) \rightarrow f_0(x)$. Siano dunque $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $x_0 \in V$ tali che $\|x - x_0\| < \varepsilon$ (una siffatta x_0 esiste per la densità di V in E) e sia $M = \sup_n \|f_n\|_{E'} < +\infty$ (in quanto $(f_n)_n$ è

limitata per ipotesi).

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_0(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_0(x_0)| + |f_0(x_0) - f_0(x)| \\ &\leq \|x - x_0\|(\|f_n\| + \|f_0\|) + |f_n(x_0) - f_0(x_0)| \\ &< \varepsilon(M + \|f_0\|) + |f_n(x_0) - f_0(x_0)|. \end{aligned}$$

Passando al \limsup per $n \rightarrow \infty$, e ricordando che $x_0 \in V$, si ottiene che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon(M + \|f_0\|).$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_0(x)| \leq 0$$

da cui $|f_n(x) - f_0(x)| \rightarrow 0$.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 25.03.2014

(1) **(T: 12 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : \ell^p \rightarrow \ell^p$ così definito:

$$T_n(x) := (x_k + \frac{x_{k+n}}{n})_{k \in \mathbb{N}}$$

per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$.

(a) **(4 punti)** Dimostrare che l'operatore T_n è lineare e continuo con $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

(b) **(3 punti)** Dimostrare che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)} = 1 + \frac{1}{n}$.

(c) **(5 punti)** Per ogni $k \geq n + 1$ calcolare

$$\|T_n(\sum_{i=1}^k e_i)\|_{\ell^p}^p$$

dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ al fine di calcolare, nel limite per $k \rightarrow \infty$, la norma

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)}$$

per ogni $p \in [1, \infty]$.

(2) **(T: 10 punti)** Siano X, Y due spazi di Banach e $(T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tali che

$$\sup_n \|T_n(x)\|_Y \in \mathbb{R}$$

per ogni $x \in X$. Provare che:

(a) **(5 punti)** il sottoinsieme

$$V := \{x \in X : (T_n(x))_n \text{ è una successione convergente in } Y\}$$

è un sottospazio chiuso di X ;

(b) **(5 punti)** l'applicazione $T : V \rightarrow Y$ definita da

$$T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

è un operatore lineare e continuo tale che

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V, Y)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(V, Y)}.$$

(3) **(T: 8 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $P : X \rightarrow X$ lineare tale che $P \circ P = P$. Provare che:

(a) **(2 punti)** Lo spazio X è la somma diretta di $\text{Ker}(P)$ e $\text{Imm}(P)$.

(b) **(3 punti)** Se P è continuo allora $\text{Ker}(P)$ e $\text{Imm}(P)$ sono chiusi in X .

(c) **(3 punti)** Se $\text{Ker}(P)$ e $\text{Imm}(P)$ sono chiusi in X allora P è continuo.

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 27.11.2014

- (1) Sia $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, sia $(a_k)_k$ una successione e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Dimostrare che

- (a) **(3 punti)** $T_n(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;
- (b) **(4 punti)** l'operatore $T_n : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
- (c) **(3 punti)** $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{np'}(2^{p'}-1)} \right)^{1/p'}$.

Infine si supponga che $(a_k)_k \in l^{p'}$. Si dimostri che

- (a) **(3 punti)** esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) (= T(x))$ per ogni $x \in l^p$ e si calcoli $T(x)$;
- (b) **(3 punti)** $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p)$.
- (2) **(5+5+4 punti)** Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = f(x_n).$$

Provare che sono equivalenti i seguenti fatti:

- (a) la successione $(T_n(f))_n$ é limitata per ogni $f \in X'$;
- (b) la successione $(T_n)_n$ é limitata in X'' ;
- (c) la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitata in X .

Risoluzione

(1) (a) (b)(c) L'operatore T_n é associato alla successione $b^n = (b_k)_k$ definita da

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k \leq n \\ \frac{1}{2^k} & \text{se } k \geq n + 1. \end{cases}$$

(per non appesantire la notazione, ometto la dipendenza di b_k da n). Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k^n|^{p'} &= \sum_{k=1}^n |a_k|^{p'} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{p'} = \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^{p'} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{j+n+1}}\right)^{p'} = \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{(n+1)p'}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p'}}\right)^j. \end{aligned}$$

Ora $\sum_{k=1}^n |a_k|^{p'}$ é finita perche' ha un numero finito di addendi e la serie geometrica $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p'}}\right)^j$ converge in quanto $0 < \frac{1}{2^{p'}} < 1$. Quindi la successione $(b_k)_k$ appartiene a $l^{p'}$ e, grazie al teorema di rappresentazione di $(l^p)'$ si ottiene che $T_n \in (l^p)'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare $T_n(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$ e poiche' per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(b_k)_k \in l^{p'}$ e

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{(l^p)'} &= \|b^n\|_{l^{p'}} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{(n+1)p'}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p'}}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{np'}(2^{p'} - 1)} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

(d) se $(a_k)_k \in l^{p'}$ allora dalla disuguaglianza di Hölder segue che per ogni $x \in l^p$ la successione $(a_k x_k)_k \in l^1$ ossia la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

converge (assolutamente). Per la stessa ragione, la successione $(\frac{1}{2^k} x_k)_k \in l^1$ e quindi la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$$

converge. In particolare, dal criterio di Cauchy per serie, segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0$. Quindi esiste finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k (:= T(x)).$$

(e) Infine, essendo

$$(T - T_n)(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(a_k - \frac{1}{2^k}\right) x_k$$

si ha che

$$\|T_n - T\|_{(l^p)'} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|a_k - \frac{1}{2^k}\right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

che tende a 0 essendo convergente la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k - \frac{1}{2^k}|^{p'}$.

(2) Premettiamo che, grazie a uno dei corollari del Teorema di Hahn Banach, si ha che

$$\|T_n\|_{X''} = \sup_{f \in X', \|f\|_{X'}=1} |f(x_n)| = \|x_n\|_X.$$

(a) \implies (b) se $(T_n(f))_n$ é limitata per ogni $f \in X'$, dal Teorema di Banach-Steinhaus (applicato su X') si ha che esiste $C > 0$ tale che

$$\sup_n \|T_n\|_{X''} \leq C$$

ossia $(T_n)_n$ é limitata in X'' .

(b) \implies (c) Segue banalmente dal fatto che

$$\sup_n \|x_n\|_X = \sup_n \|T_n\|_{X''} \leq C.$$

(c) \implies (a) Sia $C > 0$ tale che

$$\sup_n \|x_n\|_X \leq C.$$

Allora per ogni $f \in X'$ si ha che

$$|T_n(f)| = |f(x_n)| \leq \|f\|_{X'} \|x_n\|_X \leq C \|f\|_{X'}.$$

In particolare

$$\sup_n \|T_n(f)\|_X \leq C \|f\|_{X'}.$$

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Primo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

- (1) **(P: 24 punti, T: 16 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1, 1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$

Dimostrare che

- (a) **(P: 4 punti, T: 2 punti)** $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;
- (b) **(P: 8 punti, T: 6 punti)** l'operatore $T_a : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma

$$\|T_a\|_{(l^p)'} = \begin{cases} \left(\frac{|a|^{p'}}{1 - |a|^{p'}} \right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1, 1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{a_n}(x) (= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che

- (a) **(P: 6 punti, T: 4 punti)** $T \in (l^p)'$;
- (b) **(P: 6 punti, T: 4 punti)** esiste $a \in (-1, 1)$ tale che (a_n) converge ad a . Provare inoltre che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.
- (2) **(P: 6 punti, T: 14 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \rightarrow X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

- (a) **(P: 6 punti, T: 4 punti)** Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \rightarrow (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y', X')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$;
- (b) **(T: 5 punti)** Provare che $\forall x \in X$ vale

$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \rightarrow \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$).

Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y)) \rightarrow (X', \sigma(X', X))$ é continuo.

- (c) **(T: 5 punti)** Provare che se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$ -compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$ -chiuso.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Compito di Analisi Funzionale

- (1) **(16 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1, 1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$

Dimostrare che

- (a) **(2 punti)** $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;
 (b) **(6 punti)** l'operatore $T_a : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma

$$\|T_a\|_{(l^p)'} = \begin{cases} \left(\frac{|a|^{p'}}{1 - |a|^{p'}} \right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1, 1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{a_n}(x) (= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che

- (a) **(4 punti)** $T \in (l^p)'$;
 (b) **(4 punti)** esiste $a \in (-1, 1)$ tale che (a_n) converge ad a . Provare che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.
 (2) **(T: 14 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \rightarrow X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

- (a) **T: 4 punti** Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \rightarrow (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y', X')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$.
 (b) **(T: 5 punti)** Provare che $\forall x \in X$ vale

$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \rightarrow \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$).

Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y)) \rightarrow (X', \sigma(X', X))$ é continuo.

- (c) **(T: 5 punti)** Sia $B \subseteq Y'$. Provare se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$ -compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$ -chiuso.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Secondo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

- (1) **(T: 16 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1, 1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$

Dimostrare che

- (a) **(T: 2 punti)** $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;
- (b) **(T: 6 punti)** l'operatore $T_a : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma $\|T_a\|_{\mathcal{L}(l^p)} =$
- $$\begin{cases} \left(\frac{|a|^{p'}}{1 - |a|^{p'}} \right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1, 1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{a_n}(x) (= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che

- (a) **(T: 4 punti)** $T \in (l^p)'$;
- (b) **(T: 4 punti)** esiste $a \in (-1, 1)$ tale che (a_n) converge ad a . Provare inoltre che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.
- (2) **(P: 15 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $P : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare tale che
- (1) $P^2 = P$ (ossia $P(P(x)) = Px$ per ogni $x \in X$);
- (2) $ImP \cap KerP = \{0\}$.
- (a) **(P: 9 punti)** Provare che $P : X \rightarrow X$ é continua se e solo se $KerP$ e ImP sono chiusi in X ;
- (b) **(P: 6 punti)** Provare che se H é uno spazio di Hilbert e M é un sottospazio chiuso di H allora la proiezione ortogonale P_M su M verifica le proprietà (1) e (2) e $KerP_M = (ImP_M)^\perp$.

- (3) **(P: 15 punti, T: 14 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \rightarrow X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

- (a) **(P: 5 punti, T: 4 punti)** Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \rightarrow (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y', X')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$.
- (b) **(P: 5 punti, T: 5 punti)** Provare che $\forall x \in X$ vale

$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \rightarrow \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$).

Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y)) \rightarrow (X', \sigma(X', X))$ é continuo.

- (c) **(P: 5 punti, T: 5 punti)** Provare che se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$ -compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$ -chiuso.

Risoluzione

(1) L'operatore T_a é associato alla successione $b = (b_k)_k$ definita da $b_k = a^k$. Osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} |a^k|^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} (|a|^{p'})^k$$

che é una serie geometrica convergente in quanto $0 < |a|^{p'} < 1$. Quindi dal teorema di rappresentazione sui funzionali lineari e continui su l^p si ha che $b \in l^{p'}$ e quindi $T_a \in (l^p)'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$ e

$$\|T_a\|_{(l^p)'} = \|b\|_{l^{p'}} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_k |a^k| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Essendo $(|a|^k)_k$ una successione decrescente a 0 segue che

$$\|T_a\|_{(l^p)'} = \|b\|_{l^{p'}} = \begin{cases} \left(\frac{|a|^{p'}}{1 - |a|^{p'}} \right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Poi se (a_n) é una successione in $(-1, 1)$ tale che esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{a_n}(x) (= T(x))$ per ogni $x \in l^p$, allora, da un corollario del Teorema di Banach-Steinhaus, segue che T é un operatore lineare e continuo, ossia $T \in (l^p)'$. Inoltre, posto

$$e_n = (x_k^n)_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $T_{a_n}(e_1) = a_n$ e poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{a_n}(e_1) = T(e_1)$ segue che esiste $\lim_n a_n = T(e_1) (= a)$. Ovviamente $|a| \leq 1$ (in quanto $|a_n| < 1$) e poiché $T(e_k) = \lim_n T_{a_n}(e_k) = \lim_n (a^n)^k = a^k$ segue che per $1 \leq p < +\infty$ e $x = (x_k)_k \in l^p$, si ha

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T(e_k)x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k = T_a(x).$$

Quindi T_a deve appartenere a $l^{p'}$ e quindi la serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a^k|^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} (|a|^{p'})^k < +\infty$$

da cui segue che $|a| < 1$.

(2) Si osservi che grazie ad un corollario del Teorema di H. B. vale che

$$\begin{aligned} \sup_{f \in Y', \|f\|_{Y'} \leq 1} \|T^*(f)\|_{X'} &= \sup_{f \in Y', \|f\|_{Y'} \leq 1} \left(\sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} |T^*(f)(x)| \right) \\ &= \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \left(\sup_{f \in Y', \|f\|_{Y'} \leq 1} |T^*(f)(x)| \right) = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \left(\sup_{f \in Y', \|f\|_{Y'} \leq 1} |f(Tx)| \right) \\ &= \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y', X')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}.$$

Poi, applicando la Proposizione III.2 del Brezis (versione italiana) con $Z = (X', \sigma(X', X))$ si ha che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y)) \rightarrow (X', \sigma(X', X))$ é continuo se e solo se per ogni $x \in X$ la

funzione $\varphi_x \circ T^* : (Y', \sigma(Y', Y)) \rightarrow \mathbb{R}$ é continua. É facile provare che per ogni $x \in X$ la funzione $\varphi_x \circ T^*$ coincide con la funzione $\varphi_{T(x)}$ che é continua rispetto la topologia debole* di Y' (per definizione di tale topologia). Infine se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$ -compatto allora $T^*(B)$ é $\sigma(X', X)$ -compatto essendo T^* continuo debole*-debole*. In particolare $T^*(B)$ é $\sigma(X', X)$ -chiuso. Proviamo che $B' = T^*(B) \subset X'$ é limitato usando uno dei corollari del Teorema di Banach-Steinhaus: per ogni $x \in X$ l'insieme

$$\{\psi(x) : \psi \in B'\} = \{T^*(f)(x) : f \in B\} = \varphi_{T(x)}(B)$$

é compatto in \mathbb{R} essendo immagine di un $\sigma(Y', Y)$ -compatto attraverso la funzione continua $\varphi_{T(x)} : (Y', \sigma(Y', Y)) \rightarrow \mathbb{R}$. In particolare per ogni $x \in X$ l'insieme $\{\psi(x) : \psi \in B'\}$ é limitato in \mathbb{R} e quindi $T^*(B)$ é limitato in X' .

- (3) (a) Supponiamo che $P : X \rightarrow X$ sia continua. Allora $\text{Ker}P = P^{-1}(\{0\})$ é ovviamente un chiuso. Proviamo che $\text{Im}P$ é chiuso: sia (Px_n) tale che $(x_n) \subseteq X$ e $Px_n \rightarrow y$ in X . Dalla continuitá di P segue che $Px_n = P(Px_n) \rightarrow Py$ in X da cui $Py = y$ ossia $y \in \text{Im}P$. Viceversa supponiamo che $\text{Ker}P$ e $\text{Im}P$ sono chiusi in X . Per provare la continuitá di P applichiamo il teorema del Grafico chiuso. Sia $(x_n) \subseteq X$ tale che $x_n \rightarrow 0$ in X e $Px_n \rightarrow y$ in X . Poiché $\text{Im}P$ é chiuso si ha che $y \in \text{Im}P$. Inoltre $Px_n - x_n \rightarrow y$ e dalla proprietá (1) di P vale che $P(Px_n - x_n) = Px_n - Px_n = 0$ ossia $Px_n - x_n \in \text{Ker}P$. Poiché $\text{Ker}P$ é chiuso in X si ha che $y \in \text{Ker}P$ ossia $Py = 0$. Quindi $y \in \text{Im}P \cap \text{Ker}P$ e dalla proprietá (2) segue che $y = 0$.
- (b) Ricordiamo che se H é uno spazio di Hilbert e M é un sottospazio chiuso di H allora per ogni $x \in H$ la proiezione ortogonale $P_M(x)$ é definita come l'unico elemento $y \in M$ tale che

$$\|x - y\| = \min_{z \in M} \|x - z\|$$

ed é caratterizzato dal fatto che

$$\langle x - P_M(x), z \rangle = 0$$

per ogni $z \in M$. In particolare, poiché $P_M(x) \in M$ allora l'elemento in M di minima distanza da $P_M(x)$ é proprio $P_M(x)$ ossia $P_M(P_M(x)) = P_M(x)$ (in alternativa basta osservare che $\langle P_M(x) - P_M(x), z \rangle = 0$ per ogni $z \in M$.) Poi osserviamo che $\text{Ker}P_M = M^\perp$: infatti se $P_M(x) = 0$ allora

$$\langle x - 0, z \rangle = 0$$

per ogni $z \in M$ ossia $x \in M^\perp$. Viceversa se $x \in M^\perp$ allora

$$\langle x, z \rangle = 0$$

per ogni $z \in M$ e quindi $P_M(x) = 0$. Poiché $\text{Im}P_M = M$ segue che $\text{Ker}P_M = (\text{Im}P_M)^\perp$ e poiché $M^\perp \cap M = \{0\}$ segue la proprietá (2).

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Compito di Analisi Funzionale

- (1) **(16 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1, 1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$

Dimostrare che

- (a) **(2 punti)** $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;
 (b) **(6 punti)** l'operatore $T_a : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma

$$\|T_a\|_{(l^p)'} = \begin{cases} \left(\frac{|a|^{p'}}{1 - |a|^{p'}} \right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1, 1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{a_n}(x) (= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che

- (a) **(4 punti)** $T \in (l^p)'$;
 (b) **(4 punti)** esiste $a \in (-1, 1)$ tale che (a_n) converge ad a . Provare che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.
 (2) **(T: 14 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \rightarrow X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

- (a) **T: 4 punti** Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \rightarrow (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y', X')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$.
 (b) **(T: 5 punti)** Provare che $\forall x \in X$ vale

$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \rightarrow \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$).

Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y)) \rightarrow (X', \sigma(X', X))$ é continuo.

- (c) **(T: 5 punti)** Sia $B \subseteq Y'$. Provare se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$ -compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$ -chiuso.

Ferrara, 11.02.2015**Secondo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale**

- (1) **(T: 15 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n a^k x_k.$$

- (a) **(6 punti)** Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
 (b) **(3 punti)** calcolare la norma di T_n per ogni $1 \leq p \leq \infty$;
 (c) **(6 punti)** sono equivalenti i seguenti fatti:
 (i) esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ per ogni $x \in l^p$;
 (ii) $a \in (-1, 1)$.
- (2) **(T: 6, P: 9 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $B \subset X'$. Provare che B é debolmente*-compatto in X' se e solo se B é limitato e debolmente*-chiuso in X' .
- (3) **(P: 6 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : (X', \sigma(X', X)) \rightarrow (Y', \sigma(Y', Y))$ un'applicazione lineare e continua. Dimostrare che

$$T : (X', |\cdot|_{X'}) \rightarrow (Y', |\cdot|_{Y'})$$

é continua.

- (4) **(9 punti)** Sia H uno spazio di Hilbert e C un sottospazio chiuso di H . Per ogni $x \in H$ sia $P(x) \in C$ definito dalla relazione

$$\|x - P(x)\| = \min_{z \in C} \|x - z\|.$$

Dimostrare che

- (a) $P : H \rightarrow H$ é un'applicazione lineare e continua;
 (b) $C^\perp = \text{Ker} P$.

Compito di Analisi Funzionale**Ferrara, 11.02.2015**

- (1) **(15 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n a^k x_k.$$

- (a) **(6 punti)** Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
 (b) **(3 punti)** calcolare la norma di T_n per ogni $1 \leq p \leq \infty$;
 (c) **(6 punti)** dimostrare che se $1 < p \leq \infty$ sono equivalenti i seguenti fatti:
 (i) esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ per ogni $x \in l^p$;
 (ii) $a \in (-1, 1)$.
- (2) **(9 punti)** Sia H uno spazio di Hilbert e C un sottospazio chiuso di H . Per ogni $x \in H$ sia $P(x) \in C$ definito dalla relazione

$$\|x - P(x)\| = \min_{z \in C} \|x - z\|.$$

Dimostrare che

- (a) $P : H \rightarrow H$ é un'applicazione lineare e continua;
 (b) $C^\perp = \text{Ker} P$.
- (3) **(6 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $B \subset X'$. Provare che B é debolmente*-compatto in X' se e solo se B é limitato e debolmente*-chiuso in X' .

Compito di Analisi Funzionale**Ferrara, 17.03.2015**

(1) **(18 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n e^{ak} x_k$$

- (a) **(8 punti)** Dimostrare che $T_n \in (l^2)'$ e calcolare $\|T_n\|_{(l^2)'}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
 (b) **(4 punti)** se $a < 0$, dimostrare che la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in l^2$ e che, posto $T(x) := \lim_n T_n(x)$, l'operatore $T : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
 (c) **(2 punti)** se $a = 0$ dare un esempio di un elemento $x \in l^2$ tale che $(T_n(x))_n$ non converge;
 (d) **(4 punti)** dimostrare che se la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in l^2$ allora $a < 0$.

(2) **(12 punti)** Sia H uno spazio di Hilbert dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $y \in H$ di norma 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$P(x) = x - \langle x, y \rangle y.$$

Dimostrare che

- (a) **(2 punti)** $P : H \rightarrow H$ é un'applicazione lineare;
 (b) **(4 punti)** $P(x) \in \{y\}^\perp$;
 (c) **(2 punti)** $\text{Ker} P = \text{span}\{y\}$;
 (d) **(4 punti)** se $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ in H allora $P(x_n) \rightharpoonup P(\bar{x})$ in H .

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 11.06.2015

- (1) **(16 punti)** Sia $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, sia $a = (a_k)_k$ una successione e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k x_k.$$

Si supponga che per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ abbia limite finito. Si provi che

- (a) **(6 punti)** il funzionale $T : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ dato da

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

é lineare e continuo;

- (b) **(5 punti)** $(a_k)_k \in l^{p'}$;
 (c) **(5 punti)** calcolare la norma di T .

- (2) **(15 punti)** Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = f(x_n).$$

Provare che:

- (a) **(5 punti)** per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : (X', \sigma(X', X'')) \rightarrow \mathbb{R}$ é continuo;
 (b) **(4 punti)** se la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente in X allora la successione $(T_n)_n$ converge debolmente* in X'' ;
 (c) **(5 punti)** se X é riflessivo e se la successione $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente* in X'' allora la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente debolmente in X .

Risoluzione: (1) sia $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. L'operatore $T_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k x_k$ risulta un operatore lineare e continuo essendo $T_n = T_b$ con $b = (b_k)_k \in l^p$ dato da

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k \geq n+1. \end{cases}$$

(vedi teorema di rappresentazione degli operatori lineari e continui su l^p).

Poiche' per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $T(x) \in \mathbb{R}$, per un corollario al Teorema di Banach Steinhaus si ha che l'operatore T é esso lineare e continuo. Inoltre

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

ossia

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = T_a(x)$$

con $a = (a_k)_k$ e usando di nuovo il teorema di rappresentazione degli operatori lineari e continui su l^p si ha che $a = (a_k)_k \in l^{p'}$ e

$$\|T\|_{l^{p'}} = \|a\|_{l^p}.$$

(3) posto $T := \lim_n T_n$ rispetto alla topologia debole*, si ha che $T \in X''$ (in quanto limite puntuale di funzionali lineari e continui su X'). Essendo X é riflessivo, si ha che esiste x_0 tale che $T = Jx_0$. Proviamo che la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente debolmente a x_0 in X : se $f \in X'$ allora $f(x_n) = T_n(f) \rightarrow T(f) = Jx_0(f) = f(x_0)$.

Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 07.07.2015

- (1) **(18 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, sia $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione e per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := a_n x_n.$$

- (a) **(5 punti)** Si provi che l'operatore T_n é lineare e continuo e se ne calcoli la norma;
 (b) Si supponga che per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ abbia limite finito. Si provi che

- (i) **(4 punti)** il funzionale $T : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ dato da

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

é lineare e continuo;

- (ii) **(4 punti)** $(a_k)_k \in l^\infty$;
 (iii) **(2 punti)** se $p = +\infty$ allora esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (provare prima che esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$);
 (iv) **(3 punti)** si calcoli l'operatore T .

- (2) **(12 punti)** Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = f(x_n).$$

- (a) **(4 punti)** per ogni $n \in \mathbb{N}$ si calcoli la norma di T_n ;
 (b) **(4 punti)** si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : (X', \sigma(X', X)) \rightarrow \mathbb{R}$ é continuo;
 (c) **(4 punti)** se la successione $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitata in X'' allora la successione $(x_n)_n$ é limitata in X .

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 6.5.2016

- (1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $(x) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (x_1\alpha, x_2\beta, x_2\alpha^2, x_2\beta^2, \dots, x_n\alpha^n, x_n\beta^n, 0, 0, \dots).$$

- (a) **(10 punti)** Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow l^1$ é lineare e continuo di norma

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_{1 \leq k \leq n} (|\alpha|^k + |\beta|^k) & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

- (b) **(6 punti)** Si supponga $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$. Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 . Posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$;
- (c) **(4 punti)** sia $p > 1$. Si dimostri che se per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$.
- (2) **(6 punti)** Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0, 1] \rightarrow X'$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà: se $\{t_n\}_n \subset [0, 1]$ é una successione convergente allora per ogni $x \in X$ la successione $\{\alpha(t_n)(x)\}_n$ é limitata in \mathbb{R} . Provare che α é limitata, ossia che

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|\alpha(t)\|_{X'} < +\infty.$$

- (3) **(5 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisca $T^0 = Id$ e per induzione $T^n = T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \rightarrow X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{i=0}^n \frac{T^i(x)}{i!}$$

é convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

Risoluzione

- (1) (a) E' facilmente verificare che l'operatore T_n é lineare. Poi per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ se $1 < p \leq \infty$ vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k \alpha^k| + \sum_{k=1}^n |x_k \beta^k| = \sum_{k=1}^n |x_k| (|\alpha|^k + |\beta|^k) \leq \|x\|_p \left(\sum_{k=1}^n (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

mentre se $p = 1$ vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k \alpha^k| + \sum_{k=1}^n |x_k \beta^k| = \sum_{k=1}^n |x_k| (|\alpha|^k + |\beta|^k) \leq \|x\|_p \left(\sup_{1 \leq k \leq n} (|\alpha|^k + |\beta|^k) \right)$$

da cui segue che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_{1 \leq k \leq n} (|\alpha|^k + |\beta|^k) & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

Viceversa, vale che

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} &= \sup_{x \in l^p} \frac{\|T_n(x)\|_1}{\|x\|_p} = \sup_{x \in l^p} \frac{\sum_{k=1}^n |x_k| (|\alpha|^k + |\beta|^k)}{\|x\|_p} \\ &\geq \sup_{x \in l^p} \frac{|\sum_{k=1}^n x_k (|\alpha|^k + |\beta|^k)|}{\|x\|_p} = \sup_{x \in l^p} \frac{|S_n(x)|}{\|x\|_p} = \|S_n\|_{(l^p)'} \end{aligned}$$

dove $S_n \in (l^p)'$ é l'operatore definito da

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n x_k (|\alpha|^k + |\beta|^k).$$

Quindi se $1 < p \leq \infty$ vale

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \geq \left(\sum_{k=1}^n (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

mentre se $p = 1$ vale

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \geq \sup_{1 \leq k \leq n} (|\alpha|^k + |\beta|^k).$$

- (b) Se $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$ allora $y = (|\alpha|^k + |\beta|^k)_k \in l^p$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$. In particolare per ogni $x \in l^p$ vale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| (|\alpha|^k + |\beta|^k) \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} < +\infty$$

e quindi posto

$$T(x) := (x_1 \alpha, x_1 \beta, x_2 \alpha^2, x_2 \beta^2, \dots, x_n \alpha^n, x_n \beta^n, \dots)$$

vale che $T(x) \in l^1$. In particolare é noto che la (sotto)successione delle troncate (in c_{00}) $(x_1\alpha, x_1\beta, x_2\alpha^2, x_2\beta^2, \dots, x_n\alpha^n, x_n\beta^n, 0, 0, \dots)$ converge in l^1 a $T(x)$. Inoltre

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'} \right)^{1/p'}$$

Quindi se $1 < p \leq \infty$ otteniamo che per $n \rightarrow \infty$ $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \rightarrow 0$ (grazie al teorema di Cauchy per le serie). Se $p = 1$

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1, l^1)} \leq \sup_{k \geq n+1} |\alpha|^k + |\beta|^k$$

ed essendo $|\alpha|, |\beta| < 1$ si ottiene che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1)} \rightarrow 0$.

(In particolare si riottiene per ogni $x \in l^p$ vale che $\|T_n(x) - T(x)\|_1 \rightarrow 0$.)

(c) Sia $p > 1$. Se per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora per il Teorema di Banach-Steinhaus vale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} < +\infty.$$

Essendo

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha|^n + |\beta|^n)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

dalla condizione necessaria di convergenza di una serie segue che la successione $(|\alpha|^n + |\beta|^n)_n$ deve essere infinitesima e quindi $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$.

- (2) Per assurdo sia α non limitata. Allora esiste $(t_n)_n \subset [0, 1]$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha(t_n)\|_{X'} = +\infty$. Siccome $[0, 1]$ é compatto, esiste $(t_{k_n})_n$ una sottosuccessione convergente estratta da $(t_n)_n$. Applicando l'ipotesi dell'esercizio, vale allora che per ogni $x \in X$ la successione $\{\alpha(t_{k_n})(x)\}_n$ é limitata in \mathbb{R} . Da un corollario al Teorema di Banach-Steinhaus applicato all'insieme $B' := \{\alpha(t_{k_n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X'$ segue che la successione $\|\alpha(t_{k_n})\|$ é limitata. Assurdo perche' $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha(t_{k_n})\|_{X'} = +\infty$.
- (3) Appliciamo il criterio di Weistrass sulla convergenza totale di una serie. Poiche' vale che $\|T^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)}^n$ segue che per ogni $x \in X$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left\| \frac{T^i(x)}{i!} \right\|_X &\leq \sum_{i=0}^n \frac{\|T^i\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X}{i!} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}^i}{i!} \right) \|x\|_X \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}^i}{i!} \right) \|x\|_X \leq e^{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}} \|x\|_X. \end{aligned}$$

Questo implica che

- (a) la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \left\| \frac{T^i(x)}{i!} \right\|_X$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach X) segue che la successione $S_n(x)$ converge in X ;
- (b) per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^n \left\| \frac{T^i}{i!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|T\|^i}{i!} \right) \leq e^{\|T\|}.$$

Quindi la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \left\| \frac{T^i}{i!} \right\|_{\mathcal{L}(X)}$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$) segue che la successione S_n converge in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore $S(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i(x)}{i!}$ di norma

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\|T\|}.$$

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 7.6.2016

- (1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (x_1, 0, x_3\alpha, 0, x_5\alpha^2, \dots, x_{2n+1}\alpha^n, 0, 0, \dots).$$

- (a) **(10 punti)** Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow l^1$ é lineare e continuo di norma

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^n |\alpha|^{kp'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_{0 \leq k \leq n} |\alpha|^k & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

- (b) **(6 punti)** Si supponga $|\alpha| < 1$. Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 . Posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$;
- (c) **(4 punti)** sia $p = 1$. Si dimostri che se per ogni $x \in l^1$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora $|\alpha| \leq 1$.
- (2) **(6 punti)** Siano X, Y spazi di Banach su \mathbb{R} e sia $T_n : X \rightarrow Y$ una successione di funzionali lineari e continui tali che per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é di Cauchy in Y . Provare che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty$.
- (3) **(5 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si definisca $T^0 = Id$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T^n := T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \rightarrow X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{T^k(x)}{k}$$

é convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

Risoluzione

- (1) (a) E' facilmente verificare che l'operatore T_n é lineare. Infatti per ogni $x, y \in l^p$, $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vale che vale che

$$\begin{aligned} T_n(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x_1 + \mu y_1, 0, (\lambda x_3 + \mu y_3)\alpha, 0, \dots, (\lambda x_{2n+1} + \mu y_{2n+1})\alpha^n, 0, 0, \dots) \\ &= \lambda(x_1, 0, x_3\alpha, 0, \dots, x_{2n+1}\alpha^n, 0, 0, \dots) + \mu(y_1, 0, y_3\alpha, 0, \dots, y_{2n+1}\alpha^n, 0, 0, \dots) \\ &= \lambda T_n(x) + \mu T_n(y). \end{aligned}$$

Poi per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ applicando la disuguaglianza di Holder, vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_{2k+1}\alpha^k| \leq \left(\sum_{k=1}^n (|\alpha|^k)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|x\|_p$$

se $1 < p \leq \infty$, mentre se $p = 1$ vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_{2k+1}\alpha^k| \leq \|x\|_1 \sup_{1 \leq k \leq n} |\alpha|^k$$

da cui segue che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n (|\alpha|^{kp'})^{\frac{1}{p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_{0 \leq k \leq n} |\alpha|^k & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

Viceversa, vale che

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} &= \sup_{x \in l^p} \frac{\|T_n(x)\|_1}{\|x\|_p} = \sup_{x \in l^p} \frac{\sum_{k=1}^n |x_{2k+1}\alpha^k|}{\|x\|_p} \\ &\geq \sup_{x \in l^p} \frac{|\sum_{k=1}^n x_{2k+1}\alpha^k|}{\|x\|_p} = \sup_{x \in l^p} \frac{|S_n(x)|}{\|x\|_p} = \|S_n\|_{(l^p)'} \end{aligned}$$

dove $S_n \in (l^p)'$ é l'operatore definito da

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n x_{2k+1}\alpha^k.$$

L'operatore S_n é associato all'elemento

$$b_n = (1, 0, \alpha, 0, \alpha^2, 0, \dots, \alpha^n, 0, 0, \dots) \in l^{p'}$$

e quindi se $1 < p \leq \infty$ vale

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \geq \|b\|_{p'} = \left(\sum_{k=1}^n |\alpha|^{kp'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

mentre se $p = 1$ vale

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \geq \sup_{0 \leq k \leq n} |\alpha|^k.$$

- (b) Se $|\alpha| < 1$ allora $b = (1, 0, \alpha, 0, \alpha^2, 0, \dots, 0, \alpha^n, 0, \alpha^{n+1}, 0, \dots) \in l^p$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$. In particolare per ogni $x \in l^p$ vale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k+1}| |\alpha|^k \leq \|x\|_p \|b\|_{p'} < +\infty$$

e quindi posto

$$T(x) := (x_1, 0, \alpha x_3, 0, \alpha^2 x_5, 0, \dots, 0, \alpha^n x_{2n+1}, 0, \alpha^{n+1} x_{2n+2}, 0, \dots)$$

vale che $T(x) \in l^1$. Inoltre se $1 < p \leq \infty$

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha|^{kp'} \right)^{1/p'}$$

e per il criterio di Cauchy per le serie si ottiene che per $n \rightarrow \infty$ $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \rightarrow 0$. Se $p = 1$

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1, l^1)} \leq \sup_{k \geq n+1} |\alpha|^k$$

ed essendo $|\alpha| < 1$ si ottiene che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1)} \rightarrow 0$. (In particolare si riottiene per ogni $x \in l^p$ vale che $\|T_n(x) - T(x)\|_1 \rightarrow 0$.)

- (c) Sia $p = 1$. Se per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora per il Teorema di Banach-Steinhaus vale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} < +\infty.$$

Essendo

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \sup_{n \geq 0} |\alpha|^n < +\infty$$

segue che la successione $(|\alpha|^n)_n$ deve essere limitata e quindi $|\alpha| \leq 1$.

- (2) poiché la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é di Cauchy in Y e Y é uno spazio completo segue che per ogni $x \in X$ la successione $T_n(x)$ converge in Y . Per un corollario al Teorema di Banach-Steinhaus vale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty.$$

- (3) Appliciamo il criterio di Weistrass sulla convergenza totale di una serie. Poiché vale che $\|T^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)}^n$ segue che per ogni $x \in X$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left\| \frac{T^i(x)}{i} \right\|_X &\leq \sum_{i=0}^n \frac{\|T^i\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X}{i} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}^i}{i} \right) \|x\|_X \leq \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}}{1 - \|T\|_{\mathcal{L}(X)}} \|x\|_X. \end{aligned}$$

Questo implica che

- (a) la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \left\| \frac{T^i(x)}{i} \right\|_X$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach X) segue che la successione $S_n(x)$ converge in X ;
 (b) per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^n \left\| \frac{T^i}{i} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|T\|^i}{i} \right) = -\log(1 - \|T\|).$$

Quindi la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \|\frac{T^i}{i}\|_{\mathcal{L}(X)}$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$) segue che la successione S_n converge in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore $S(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i(x)}{i}$ di norma

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq -\log(1 - \|T\|).$$

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 21.6.2016

- (1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (x_1\beta, 0, x_3\beta^3, 0, \dots, x_{2n+1}\beta^{2n+1}, 0, 0, \dots).$$

- (a) **(2 punti)** Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow l^1$ é lineare e continuo;
 (b) **(5 punti)** Dimostrare che se $1 < p \leq \infty$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = |\beta| \left(\frac{1 - \beta^{2p'(n+1)}}{1 - \beta^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

mentre se $p = 1$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^1)} = \sup_{0 \leq k \leq n} |\beta|^{2k+1}.$$

- (c) **(5 punti)** Si supponga $|\beta| < 1$. Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 . Posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$;
 (d) **(3 punti)** sia $p = 1$. Si dimostri che se per ogni $x \in l^1$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora $|\beta| \leq 1$.
- (2) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in L(X, Y)$ e sia $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Si dimostri che
- (a) **(4 punti)** se T é un'isometria allora $T(B_X)$ é fortemente chiuso e debolmente chiuso in Y ;
 (b) **(3 punti)** se T é un'isometria e se Y é riflessivo allora $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y ;
 (c) **(4 punti)** se X é riflessivo allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se e solo se $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y .
- (3) **(5 punti)** Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
 $\forall x_0 \in X$ e $\forall (x_n)_n \subseteq X$, se $(x_n)_n$ converge fortemente a x_0 in X allora $(T(x_n))_n$ converge debolmente a $T(x_0)$ in Y .
 Provare che T é continuo.

Secondo Parziale di Analisi Funzionale**Ferrara, 21.6.2016**

- (1) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in L(X, Y)$ e sia $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Si dimostri che
- (a) **(8 punti)** se T é un'isometria allora $T(B_X)$ é fortemente chiuso e debolmente chiuso in Y ;
 - (b) **(6 punti)** se T é un'isometria e se Y é riflessivo allora $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y ;
 - (c) **(7 punti)** se X é riflessivo allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se e solo se $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y .
- (2) **(10 punti)** Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
 $\forall x_0 \in X$ e $\forall (x_n)_n \subseteq X$, se $(x_n)_n$ converge fortemente a x_0 in X allora $(T(x_n))_n$ converge debolmente a $T(x_0)$ in Y .
Provare che T é continuo.

Risoluzione**Esercizio 1.**

- (1) se T é un'isometria allora $T(B_X)$ é fortemente chiuso: infatti se $(x_n) \subset B_X$ é tale che (Tx_n) é convergente, allora dalla relazione

$$\|T(x_n) - T(x_m)\|_Y = \|x_n - x_m\|_X$$

segue che la successione (x_n) é di Cauchy in X che é di Banach. Pertanto esiste $x \in X$ tale che $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$. Poiché B_X é chiusa, segue che $x \in B_X$ ed essendo T continua, otteniamo che $T(x_n) \rightarrow T(x) \in T(B_X)$ in Y . Quindi $T(B_X)$ é fortemente chiuso. Inoltre essendo B_X convesso e T lineare, segue che $T(B_X)$ é un convesso fortemente chiuso. Quindi $T(B_X)$ é anche debolmente chiuso.

- (2) Essendo T un'isometria, vale che $T(B_X) \subseteq B_Y$ e B_Y é debolmente compatto in quanto Y é riflessivo. Essendo $T(B_X)$ un sottoinsieme debolmente chiuso contenuto in un insieme debolmente compatto, segue che $T(B_X)$ é un insieme debolmente compatto di Y .
- (3) se X é riflessivo allora B_X é un sottoinsieme debolmente compatto di Y . Se T é continuo forte-forte, vale che T é continuo debole-debole. In particolare $T(B_X)$ é debolmente compatto in Y . Viceversa, se T é tale che $T(B_X)$ é debolmente compatta, segue che $T(B_X)$ é limitata e quindi T é continuo.

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 8.7.2016

- (1) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n, 0, 0, \dots).$$

- (a) (**8 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow l^1$ é lineare e continuo e calcolarne la norma (al variare di p);
- (b) (**7 punti**) Sia $1 \leq p < +\infty$. Si dimostri che sono equivalenti i seguenti fatti:
- (i) per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 ;
 - (ii) $y \in l^{p'}$.
- (2) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un'applicazione biettiva. Sia $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_X$. Si provi che
- (a) (**3 punti**) se $T(x_n) \rightarrow y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \rightarrow x \in X$;
 - (b) (**3 punti**) se $T(x_n) \rightharpoonup y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \rightharpoonup x \in X$;
 - (c) (**5 punti**) $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y se e solo se X é riflessivo.
- (3) (**5 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X' \rightarrow Y'$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
- $\forall (f_n)_n \subseteq X'$, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente* a $0_{X'}$ in X' allora $(T(f_n)(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 per ogni $y \in Y$.
- Provare che T é continuo.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica**Secondo Parziale di Analisi Funzionale****Ferrara, 8.7.2016**

- (1) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un'applicazione biettiva. Sia $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_X$. Si provi che
- (a) **(6 punti)** se $T(x_n) \rightarrow y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \rightarrow x \in X$;
 - (b) **(6 punti)** se $T(x_n) \rightarrow y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \rightarrow x \in X$;
 - (c) **(9 punti)** $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y se e solo se X é riflessivo.
- (2) **(10 punti)** Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X' \rightarrow Y'$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
 $\forall (f_n)_n \subseteq X'$, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente* a $0_{X'}$ in X' allora $(T(f_n)(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 per ogni $y \in Y$.
Provare che T é continuo.

Esame scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 20.7.2016**

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (\beta x_1, \frac{\beta^2}{2} x_2, \frac{\beta^3}{3!} x_3, \dots, \frac{\beta^n}{n!} x_n, 0, 0, \dots).$$

- (a) **(6 punti)** Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow l^1$ é lineare e continuo e se ne calcoli la norma;
- (b) **(2 punti)** Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 .
- (c) **(6 punti)** Posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$. Calcolare la norma di T .
- (2) **(4 punti)** Sia $(a_n)_n$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \in \mathbb{R}$ per ogni $(b_n)_n \in l^\infty$. Provare che $(a_n)_n \in l^1$.
- (3) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in L(X, Y)$ tale che $T(B_X)$ sia (fortemente) compatta in Y . Si provi che
- (a) **(4 punti)** T é continuo;
- (b) **(4 punti)** se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge debolmente a $x \in X$ allora $(T(x_n))_n$ converge debolmente a $T(x)$ in Y ;
- (c) **(5 punti)** se X é riflessivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ é limitata, allora esiste $x \in X$ ed una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $x_{k_n} \rightharpoonup x$ in X e $T(x_{k_n}) \rightarrow T(x)$ in Y .

Esame scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 23.9.2016**

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{\beta^k}{k!} x_k.$$

- (a) **(6 punti)** Si dimostri che $T_n \in (l^p)'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e si calcoli la sua norma;
- (b) **(2 punti)** si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente;
- (c) **(3 punti)** Posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, provare che $T \in (l^p)'$;
- (d) **(4 punti)** Nel caso $p > 1$ si dimostri che $(T_n)_n$ converge a T in $(l^p)'$ e si calcoli la norma di T .
- (2) Siano X, Y spazi di Banach, sia $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ e sia $T \in L(X, Y)$ tale che $T(B_X)$ sia debolmente compatta in Y . Si provi che
- (a) **(5 punti)** T é continuo;
- (b) **(5 punti)** se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge debolmente a $x \in X$ allora $(T(x_n))_n$ é una successione limitata che converge debolmente a $T(x)$ in Y ;
- (c) **(6 punti)** se esiste $r > 0$ tale che $\{y \in Y : \|y\|_Y \leq r\} \subset T(B_X)$ allora Y é riflessivo.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 02.12.2016

- (1) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ poniamo $T_n(x) = (T_k^n(x))_{k \in \mathbb{N}}$ dove

$$T_k^n(x) := \begin{cases} \frac{a^k}{k} x_k & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

- (a) (**8 punti**) Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow l^1$ é lineare e continuo e calcolarne la norma;
- (b) (**12 punti**) Provare che se

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_1 < +\infty \quad \forall x \in l^p$$

allora

- (i) $(\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$;
- (ii) $\forall x \in l^p$ esiste $T(x) \in l^1$ tale che $\|T_n(x) - T(x)\|_{l^1} \rightarrow 0$;
- (iii) $T \in \mathcal{L}(l^p, l^1)$ ed è tale che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \rightarrow 0$. Si calcoli la norma di T nel caso $p = 1$.

- (2) (**10 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $B \subseteq l^p$. Provare che B é limitato in l^p se e solo se per ogni $a \in l^{p'}$ l'insieme $B_a := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i : b \in B\}$ è limitato in \mathbb{R} .

Risoluzione

- (1) (a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ é facile provare che l'operatore T_n é lineare. Inoltre, se definiamo $b_n = (b_k^n)_k \in c_{00}$ definito da

$$b_k^n := \begin{cases} \frac{a^k}{k} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

applicando la disuguaglianza di Holder si ha che $\forall x \in l^p$

$$\|T_n(x)\|_{l^1} \leq \|b_n\|_{p'} \|x\|_p.$$

Quindi l'operatore T_n é continuo con

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \|b_n\|_{p'}.$$

Inoltre

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \sup_{x \in l^p, \|x\|_p \leq 1} \|T(x)\|_{l^1} \geq \|S_n\|_{(l^p)'}.$$

dove

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k} x_k.$$

Dal teorema di rappresentazione di $(l^p)'$ si ha che $S_n \in (l^p)'$ con norma

$$\|S_n\|_{(l^p)'} = \|b_n\|_{p'}$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze ottenute segue che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \|b_n\|_{p'} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } p \neq 1 \\ \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a^k}{k} \right| & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

- (b) (i) se $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_1 < +\infty \forall x \in l^p$ allora per il Teorema di Banach-Steinhaus

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{(l^p)'} < +\infty$$

da cui se $p \geq 1$ allora

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty$$

mentre se $p = 1$ allora

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{a^n}{n} \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a^k}{k} \right| < +\infty.$$

ossia, per ogni p fissato, $(\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$; in particolare se $p = 1$ allora $|a| \leq 1$ (altrimenti la successione $(\frac{a^k}{k})_k$ non é limitata) mentre se $p > 1$ allora $|a| < 1$ (altrimenti la successione $(\frac{a^k}{k})_k$ non é infinitesima).

- (ii) - (iii) Poiché $a = (\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$, per la disuguaglianza di Holder si ha che $\forall x = (x_k)_k \in l^p$ la successione $(\frac{a^k}{k} x_k)_k \in l^1$. Per ogni $x \in l^p$ definiamo $T(x) = (\frac{a^k}{k} x_k)_k$. Allora T é lineare e

$$\|T(x)\| \leq \|a\|_{p'} \|x\|_p,$$

quindi $T \in \mathcal{L}(l^p, l^1)$. Proviamo che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \rightarrow 0$. Questo implicherá anche che $\|T_n(x) - T(x)\|_{l^1} \rightarrow 0$ per ogni $x \in l^p$ e che

$$\|T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|_{p'} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } p > 1 \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{a^k}{k} \right| = |a| & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

in quanto nel caso $p = 1$ si ha che $|a| < 1$ e quindi la successione $|a|^k \cdot \frac{1}{k}$ é decrescente.

Osserviamo che per ogni $x \in l^p$ si ha che se $p > 1$ allora

$$\|T_n(x) - T(x)\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{a^k}{k} x_k \right| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|x\|_p$$

In particolare segue che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$ che tende a zero per $n \rightarrow \infty$ essendo la serie convergente. Se $p = 1$ allora

$$\|T_n(x) - T(x)\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{a^k}{k} x_k \right| \leq \left(\sup_{k \geq n+1} \left| \frac{a^k}{k} \right| \right) \|x\|_1$$

In particolare, tenendo che $|a| < 1$,

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \sup_{k \geq n+1} \left| \frac{a^k}{k} \right| \leq \sup_{k \geq n+1} \left| \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{n+1}$$

che tende a zero per $n \rightarrow \infty$.

(2) " \implies "

(a) Sia $1 \leq p < \infty$. Per uno dei corollari di Banach-Steinhaus per provare che B é limitato in l^p é sufficiente provare che per ogni $f \in (l^p)'$ l'insieme $f(B) = \{f(b) : b \in B\}$ é limitato in \mathbb{R} . Sia $f \in (l^p)'$. Dal teorema di rappresentazione del duale di l^p esiste $a \in l^{p'}$ tale che $f(x) = T_a(b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ per ogni $x = (x_n)_n \in l^p$. In particolare l'insieme $f(B)$ coincide con l'insieme $\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i : b \in B\} = B_a$ che é limitato per ipotesi. Segue quindi che B é limitato in l^p .

(b) Sia $p = \infty$. Sia

$$B' = \{T_b \in (l^1)'\} : b \in B\}$$

dove T_b é l'operatore definito da $T_b(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ per ogni $a = (a_n)_n \in l^1$.

Dal teorema di rappresentazione di $(l^1)'$ sappiamo che per ogni $x \in l^{\infty}$

$$\|T_x\|_{(l^1)'} = \|x\|_{l^{\infty}}$$

per cui

$$B \text{ é limitato in } l^{\infty} \iff B' \text{ é limitato in } (l^1)'$$

Allo scopo di verificare che B' é limitato in $(l^1)'$ applichiamo uno dei corollari di Banach-Steinhaus ad $X = l^1$ e $B' \subseteq (l^1)'$. Poiché per ogni $a \in l^1$

$$\{f(a) : f \in B'\} = \{T_b(a) : b \in B\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i : b \in B \right\} = B_a$$

é limitato per ipotesi, segue che B' é limitato in $(l^1)'$ e quindi B in l^{∞} .

" \Leftarrow " Dal teorema di rappresentazione del duale di l^p sappiamo che per ogni $a \in l^{p'}$ l'applicazione $T_a : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $T_a(b) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ è lineare e continua. In particolare T_a trasforma sottoinsiemi limitati di l^p in sottoinsiemi limitati di \mathbb{R} . Se B è limitato in l^p allora, per ogni $a \in l^{p'}$, l'insieme $T_a(B) = B_a$ è limitato in \mathbb{R} .

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Primo parziale-Secondo parziale-Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 20.01.2017

- (1) (**Primo P=21 punti, T=11 punti**) Sia $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \rightarrow X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_k b_k, 0, 0, \dots) \in c_{00}$$

per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.

- (a) (**P=7+6 punti, T=4+3 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo e che $\|T_k\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \sup_{1 \leq i \leq k} \|b_i\|$;
- (b) (**P=8 punti, T=4**) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X . Dimostrare che $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^\infty$.
- (c) (**P=3 punti, T=2**) Provare che se $(b_k)_k \in l^\infty$ allora per ogni $a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ converge (in X) a $T(a) := (a_k b_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- (2) (**Primo P= 10 punti, T=5 punti**) Sia $1 \leq p < \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Supponiamo che per ogni $a \in l^p \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a) \in \mathbb{R}$. Provare che $\exists b \in l^{p'}$ tale che

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \quad \forall a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$$

$$(2) \quad \|b\|_{p'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{(l^p)'} < +\infty.$$

- (3) (**Secondo P=21 punti; T=10 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e

$$B_{L^{p'}} := \{g \in L^{p'}(0,1) : \|g\|_{L^{p'}(0,1)} \leq 1\}.$$

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(0,1)$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{g \in B_{L^{p'}}} \left| \int_0^1 g(x) f_n(x) dx \right| \leq 2.$$

Provare che

- (a) (**P=6 punti; T=3 punti**) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq 2$;
- (b) (**P=10 punti; T=5 punti**) se $1 < p < +\infty$ esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^p(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente ad f in $L^p(0,1)$ (se $p = \infty$ esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^\infty(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente* ad f);
- (c) (**P=5 punti; T=2 punti**) $\|f\|_p \leq 2$.
- (4) (**Secondo P=10 punti; T=5 punti**) Siano X, Y spazi di Banach su \mathbb{R} e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare tale che se $x_n \rightarrow 0$ in X allora $\|Tx_n\|_Y \rightarrow 0$. Provare che T è continuo.

- (1) Sia $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \rightarrow X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_k b_k, 0, 0, 0, \dots) \in c_{00}$$

per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.

- (a) La linearità è facile. Riguardo la continuità osservare che per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$

$$\|T_k(a)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq k} |a_i b_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq k} |a_i| \cdot \sup_{1 \leq i \leq k} |b_i|$$

da cui segue che T_k è continuo e che $\|T_k\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \sup_{1 \leq i \leq k} |b_i|$; Inoltre, fissato $1 \leq j \leq k$ tale che

$$\sup_{1 \leq i \leq k} |b_i| = |b_j|$$

e posto $e_j = (\delta_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$, si ha che $\|e_j\|_\infty = 1$ e $T_k(e_j) = b_j$ da cui

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(X, X)} \geq |b_j| = \sup_{1 \leq i \leq k} |b_i|;$$

- (b) se $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X , si ha che $\forall a \in X$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k(a)\|_\infty < +\infty.$$

Essendo X uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$, applicando il Teorema di Banach-Steinhaus, segue che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\|_{\mathcal{L}(X, X)} < +\infty$$

ossia $\sup_{k \in \mathbb{N}} |b_k| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{1 \leq i \leq k} |b_i| < +\infty$. Quindi $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^\infty$.

- (c) Se $(b_k)_k \in l^\infty$ allora $T(a) := (a_k b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0$ per ogni $a \in X$ e

$$\|T_k(a) - T(a)\|_\infty = \sup_{n \geq k} |a_n b_n| \leq \|b\|_\infty \sup_{n \geq k} |a_n|.$$

Poichè $a \in c_0$, per ogni $\epsilon > 0$ si ha che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \frac{\epsilon}{\|b\|_\infty}$ per ogni $n \geq n_0$. In particolare per ogni $k \geq n_0$ segue che

$$\|T_k(a) - T(a)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Questo implica che la successione $(T_k(a))_k$ converge (in X) a $T(a)$.

- (2) Poichè per ogni $a \in l^p \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a) \in \mathbb{R}$, applicando il Teorema di Banach-Steinhaus, vale che l'operatore $T(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a)$ (limite puntuale di operatori lineari e continui su l^p) è esso stesso lineare e continuo, ossia $T \in (l^p)'$, e

$$\|T\|_{(l^p)'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{(l^p)'} < +\infty.$$

Dal teorema di rappresentazione del duale di l^p , si ha che $\exists b \in l^{p'}$ tale che $T = T_b$ e $\|T\|_{(l^p)'} = \|b\|_{p'}$. In particolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a) = T(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \quad \forall a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$$

e

$$\|b\|_{p'} = \|T\|_{(l^p)'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{(l^p)'} < +\infty.$$

- (3) (a) Si osservi che, definito $T_n : L^{p'} \rightarrow \mathbb{R}$ come $T_n(g) = \int_0^1 g(x)f_n(x)dx$, dal teorema di immersione di L^p in $(L^{p'})'$, si ha che T_n è un operatore lineare e continuo di norma

$$(1) \|T_n\|_{(L^{p'})'} = \|f_n\|_p.$$

Inoltre, per definizione di norma di un operatore, vale che

$$(2) \|T_n\|_{(L^{p'})'} = \sup_{g \in B_{L^{p'}}} |T_n(g)| = \sup_{g \in B_{L^{p'}}} \left| \int_0^1 g(x)f_n(x)dx \right|.$$

Mettendo insieme (1) e (2) si ottiene che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p = \sup_{g \in B_{L^{p'}}} \left| \int_0^1 g(x)f_n(x)dx \right| \leq 2.$$

- (b) se $1 < p < +\infty$, essendo L^p uno spazio riflessivo, esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^p(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge debole ad f in $L^p(0,1)$. Se $p = \infty$, essendo L^∞ il duale di L^1 che è uno spazio separabile, esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^\infty(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge debole* ad f ;
- (c) Poichè $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge debole o debole* ad f si che

$$\|f\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_{k_n}\|_p \leq 2.$$

- (4) Applichiamo il teorema del grafico chiuso. Sia $x_n \rightarrow 0$ in X e $Tx_n \rightarrow y \in Y$ in Y . Allora $x_n \rightarrow 0$ in X e quindi $\|Tx_n\|_Y \rightarrow 0$. Poichè $\|Tx_n\|_Y \rightarrow \|y\|_Y$ otteniamo che $\|y\| = 0$ ossia $y = 0$. Quindi T è continuo.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Secondo parziale-Totale di Analisi Funzionale
Ferrara, 2.02.2017**

- (1) (**T=13 punti**) Sia $b \in \mathbb{R}$ un numero reale. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \rightarrow X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (a_1 b, a_2 b^2, \dots, a_k b^k, 0, 0, 0, \dots) \in c_{00}$$

per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.

- (a) (**T=7 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo e calcolare la sua norma al variare di $b \in \mathbb{R}$;
 (b) (**T=4**) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X . Dimostrare che $|b| \leq 1$.
 (c) (**T=2**) Provare che se $|b| \leq 1$ allora per ogni $a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ converge (in X) a $T(a) := (a_k b^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

- (2) (**T=3 punti**) Siano X e Y spazi di Banach e sia $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, $T_\alpha : X \rightarrow Y$, una famiglia di funzionali lineari e continui. Supponiamo che $\forall x \in B_X$ esista $c_x \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha(x)\|_Y \leq c_x.$$

Si provi che esiste $C \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C.$$

- (3) (**Secondo P=8+6+6 punti; T=4+3+2 punti**) Sia $1 < p \leq \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in L^p(0, 1)$ e sia $T_n : L^{p'}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T_n(g) := \int_0^1 g(x) f_n(x) dx.$$

Supponiamo che $\forall g \in L^{p'}(0, 1) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(g) \in \mathbb{R}$.

Provare che $\exists f \in L^p(0, 1)$ tale che

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad \forall g \in L^{p'}(0, 1)$;
 (b) se $p < +\infty$ allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0, 1)$, mentre se $p = \infty$ allora $f_n \xrightarrow{*} f$ in $L^\infty(0, 1)$;
 (c) $\|f\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p < +\infty$.
 (4) (**Secondo P=11 punti; T=6 punti**) Siano X, Y spazi di Banach su \mathbb{R} e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare. Provare che se X è riflessivo allora T è continua se e solo se $T(B_X)$ è $\sigma(Y, Y')$ -compatto.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 21.02.2017

- (1) (**T=13 punti**) Sia $b \in \mathbb{R}$ un numero reale. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \rightarrow X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = \left(\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b^2}, \dots, \frac{a_k}{b^k}, 0, 0, 0, \dots\right) (\in c_{00})$$

per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.

- (a) (**T=7 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo e calcolare la sua norma al variare di $b \in \mathbb{R}$;
 (b) (**T=4**) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X . Dimostrare che $|b| \geq 1$.
 (c) (**T=2**) Provare che se $|b| > 1$ allora esiste $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k - T\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

- (2) (**T=3 punti**) Siano X e Y spazi di Banach e sia $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, $T_\alpha : X \rightarrow Y$, una famiglia di funzionali lineari e continui. Supponiamo che esista U intorno di 0 tale che $\forall x \in U \exists c_x \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha(x)\|_Y \leq c_x.$$

Si provi che esiste $C \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C.$$

- (3) (**Secondo P=8+6+6 punti; T=4+3+2 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e $g \in L^{p'}(0,1)$. Sia

$$K_g := \left\{f \in L^p(0,1) : \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq 1, \|f\|_p \leq 1\right\}.$$

Provare che K_g è convesso, chiuso e è debolmente compatto.

- (4) (**T=6 punti**) Siano X, Y spazi di Banach su \mathbb{R} e sia $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare. Provare che se X è riflessivo allora T è continua se e solo se $T(B_X)$ è $\sigma(Y, Y')$ -compatto.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 18.07.2017

(1) **(16 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \beta^k x_k.$$

- (a) **(6 punti)** Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e continuo e se ne calcoli la norma al variare di $1 \leq p \leq \infty$;
- (b) **(6 punti)** si provi che se $|\beta| < 1$ allora, per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente. Posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, dimostrare che $T : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ è un operatore lineare e continuo;
- (c) **(4 punti)** Sia $p > 1$. Si provi che se per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata allora $|\beta| < 1$.
- (2) **(15 punti)** Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia K un sottoinsieme convesso e chiuso di E tale che $K \cap B_1$ è non vuoto. Provare che
- (a) **(6 punti)** $\forall n \in \mathbb{N}$ l'insieme $K \cap B_1$ è convesso e debolmente compatto in E ;
- (b) **(5+4 punti)** se F è uno spazio di Banach e $T : E \rightarrow F$ è lineare e continuo vale che $T(K \cap B_1)$ è debolmente compatto in F ed esiste il $\min_{x \in K \cap B_1} \|T(x)\|$.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica**Totale di Analisi Funzionale****Ferrara, 12.09.2017**

- (1) **(16 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k k!} x_k.$$

- (a) **(5 punti)** Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e continuo e si esprima la sua norma;
- (b) **(6 punti)** si provi che per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente. Posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, dimostrare che $T : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ è un operatore lineare e continuo. Si calcoli la norma di T nel caso $p = \infty$;
- (c) **(5 punti)** dimostrare che $\|T_n - T\|_{(l^p)'} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.
- (2) **(15 punti)** Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \rightarrow F$ lineare, continuo e biiettivo e $K \subseteq E$ un sottoinsieme convesso e chiuso. Provare che
- (a) **(4 punti)** $T(K)$ è chiuso in F ;
- (b) **(3 punti)** $T(K)$ è convesso;
- (c) **(4 punti)** $T(K)$ è debolmente chiuso in F ;
- (d) **(4 punti)** se F è riflessivo e K è limitato, allora $T(K)$ è debolmente compatto in F .

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 27.11.2017

(1) **(21 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < 1$. Per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ sia

$$T(x) := (a^k x_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

(a) **(8 punti)** si dimostri che $T \in \mathcal{L}(l^\infty, l^1)$ e si calcoli la norma $\|T\|_{\mathcal{L}(l^\infty, l^1)}$;

(b) **(7 punti)** si dimostri che $T \in \mathcal{L}(l^\infty)$ e si calcoli la norma $\|T\|_{\mathcal{L}(l^\infty)}$;

(c) **(6 punti)** considerando $T : l^\infty \rightarrow l^\infty$ si definisca l'operatore

$$T^n(x) := T(T^{n-1}(x)).$$

Si provi che $T^n \rightarrow 0$ in $\mathcal{L}(l^\infty)$ e che la successione $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita come

$$S_n := \sum_{k=1}^n T^k$$

converge nello spazio $\mathcal{L}(l^\infty)$.

(2) **(10 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $(x_n)_n \in l^1$ la successione $(a^n x_n)_n \in l^1$. Dedurre che $|a| \leq 1$.

Suggerimento: si studi la convergenza puntuale degli operatori $T_n : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definiti come

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n a^k x_k$$

Compito scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 16.01.2018

- (1) **(Primo P=23 punti; T=11 punti.)** Si munisca lo spazio c_0 della norma $\|\cdot\|_\infty$. Sia $a = (a_n)_n$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0$ sia $T_n(x) \in c_0$ definito come

$$T_n(x) := (a_1x_1, \dots, a_nx_n, 0, 0, \dots).$$

- (a) **(Primo P=7 punti; T=4 punti.)** Si dimostri che $T_n \in \mathcal{L}(c_0, l^1)$ e si calcoli la norma $\|T_n\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)}$;
 (b) si supponga che per ogni $x = (x_n)_n \in c_0$ la successione $(a_nx_n)_n \in l^1$. Posto $T(x) := (a_nx_n)_n$, si dimostri che
 (i) **(Primo P=8 punti; T=4 punti)** per ogni $x \in c_0$ vale $\|T_n(x) - T(x)\|_1 \rightarrow 0$ e $T \in \mathcal{L}(c_0, l^1)$;
 (ii) **(Primo P=8 punti; T=4 punti)** $a \in l^1$ e $\|T\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} \leq \|a\|_1$.
- (2) **(Primo P=8 punti; T=4 punti.)** Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si definisca $T^0 = Id$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T^n := T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \rightarrow X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} T^k(x)$$

è convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

- (3) **(Secondo P=8+8+6+5+4 punti; T=5+4+3+2+2 punti)** Sia $1 < p < \infty$ e $f, g \in L^{p'}(0, 1)$. Posto $T : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(\varphi) := \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \|\varphi\|_p$$

e

$$K_n := \{\varphi \in L^p(0, 1) : |\int_0^1 \varphi(x)g(x)dx| \leq 1 + \frac{1}{n}, \|\varphi\|_p \leq 1\},$$

provare che

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ l'insieme K_n è non vuoto, convesso e debolmente compatto;
 (b) l'operatore T è convesso e semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole;
 (c) $\forall n \in \mathbb{N} \exists \varphi_n \in K_n$ tale che $T(\varphi_n) = \min_{\varphi \in K_n} T(\varphi)$
 (d) $(\varphi_n)_n$ ammette un'estratta debolmente convergente in $L^p(0, 1)$;
 (e) se $(\varphi_{k_n})_n$ converge debolmente a $\bar{\varphi}$ in $L^p(0, 1)$ allora $T(\bar{\varphi}) = \min_{\varphi \in K_0} T(\varphi)$ dove

$$K_0 := \{\varphi \in L^p(0, 1) : |\int_0^1 \varphi(x)g(x)dx| \leq 1, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

- (1) (a) La linearità dell'operatore T_n è facile. Riguardo la continuità osservare che per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right) \|x\|_\infty$$

da cui segue che T_n è continuo e che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$; Inoltre, scelto $1_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, \dots) \in c_0$ si ha che $\|1_n\|_\infty = 1$ e $T_n(1_n) = (\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_n, 0, \dots)$ da cui

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} \geq \|T_n(1_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Quindi $\|T_n\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} = \sum_{i=1}^n |a_i|$.

- (b) (i) se per ogni $x = (x_n)_n \in c_0$ la successione $(a_n x_n)_n \in l^1$, si ha che

$$\|T_n(x) - T(x)\|_1 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i x_i| \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$ perché coda di una serie convergente. Da uno dei corollari del Teorema di Banach-Steinhaus, si ha che l'operatore T è un operatore lineare e continuo tra gli spazi di Banach c_0 e l^1 , ossia $T \in \mathcal{L}(c_0, l^1)$;

- (ii) Applicando il Teorema di Banach-Steinhaus, si ha che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} < +\infty$ da cui

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n |a_i| < +\infty$$

ossia $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty$. Quindi $a \in l^1$. Dal Corollario di BS, segue che

$$\|T\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_i| = \|a\|_1$$

- (2) Applichiamo il criterio di Weierstrass sulla convergenza totale di una serie. Poiché vale che $\|T^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)}^n$ ed osservando che $|\frac{k}{k+1}| < 1$ segue che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{k}{k+1} T^k \right\|_X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \|T^k\|_X \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|T\|_{\mathcal{L}(X)}^k = \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}}{1 - \|T\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

Per il criterio di Weierstrass (applicato nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$) segue che la successione S_n converge in $\mathcal{L}(X)$ all'operatore

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} T^k(x)$$

di norma

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}}{1 - \|T\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

- (3) (a) È facile osservare che $0 \in K_n \forall n \in \mathbb{N}$ e pertanto l'insieme K_n è non vuoto. Sia S_g il funzionale lineare e continuo su L^p dato da

$$S_g(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) g(x) dx$$

e sia

$$E_n := \left\{ \varphi \in L^p(0, 1) : |S_g(\varphi)| \leq 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Essendo E_n un sottolivello del funzionale convesso $|S_g|$ vale che E_n è convesso. Essendo $K_n = B_{L^p} \cap E_n$ dove B_{L^p} è la palla unitaria (convessa!) di L^p , segue che K_n è convesso. Inoltre S_g è continuo forte. Pertanto anche $|S_g|$ è continuo forte (la composizione di funzioni continue è continua) e pertanto $K_n = |S_g|^{-1}([0, \frac{1}{n}]) \cap B_{L^p}$ è chiuso fortemente. Siccome K_n è convesso, chiuso fortemente e limitato in L^p che è riflessivo, segue che è debolmente compatto.

- (b) l'operatore T è convesso e continuo in quanto somma di un operatore lineare e continuo su L^p (per il teorema di rappresentazione) e della norma che è convessa e continua. Quindi, essendo T continuo fortemente e convesso, T è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole;
- (c) basta applicare il Teorema di Weiestrass su spazi riflessivi (con K_n convesso, chiuso, non vuoto e limitato);
- (d) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $\varphi_n \in E_n \subseteq B_{L^p}$. Quindi $(\varphi_n)_n$ è una successione limitata in L^p che è uno spazio riflessivo e pertanto ammette un'estratta debolmente convergente in $L^p(0, 1)$;
- (e) supponiamo che $(\varphi_{k_n})_n$ converge debolmente a $\bar{\varphi} \in B_{L^p}$ in $L^p(0, 1)$. Prima di tutto osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|S_g(\varphi_{k_n})| \leq 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Pertanto (sfruttando il fatto che anche $|S_g|$ è continuo debolmente) vale che

$$|S_g(\bar{\varphi})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_g(\varphi_n)| \leq 1$$

ossia

$$(5) \quad \bar{\varphi} \in K_0.$$

Inoltre osserviamo che $K_0 \subseteq K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e pertanto per ogni $\varphi \in K_0$ vale che

$$T(\varphi) \geq \min_{\varphi \in K_n} T = T(\varphi_n).$$

Passando al liminf (e sapendo che T è semicontinuo debolmente) vale che

$$(6) \quad T(\varphi) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) \geq T(\bar{\varphi}).$$

Le proprietà (5) e (6) implicano la tesi.

Compito scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 20.02.2018

- (1) (**T=14 punti**) Sia $a \in \mathbb{R}$ e $1 < p < +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ definito come

$$T_n(x) := (ax_1, a^2x_2, \dots, a^n x_n, 0, 0, \dots).$$

- (a) (**6 punti**) Si dimostri che $T_n \in \mathcal{L}(l^p)$ con $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = \max_{k \leq n} |a|^k$;
 (b) (**2+2+2+2 punti**) si supponga che per ogni $x = (x_n)_n \in l^p$ la successione $(a^n x_n)_n \in l^p$. Posto $T(x) := (a^n x_n)_n$, si dimostri che
 (i) esiste $M > 0$ tale che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq M$;
 (ii) $|a| \leq 1$;
 (iii) $\|T_n(x) - T(x)\|_p \rightarrow 0$ per ogni $x \in l^p$;
 (iv) $T \in \mathcal{L}(l^p)$ con $\|T\|_{\mathcal{L}(l^p)} = |a|$.

- (2) (**T= 7 punti**) Siano X spazio di Banach riflessivo e Y uno spazio normato. Sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme convesso chiuso. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione lineare e continua. Provare che esiste il

$$\min_{x \in K} (\|f(x)\|_Y + \|x\|_X).$$

- (3) (**T=4+3+3 punti**) Siano $f, g \in L^1(0, 1)$. Posto $T : L^\infty(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(\varphi) := \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \|\varphi\|_\infty$$

e

$$K := \{\varphi \in L^\infty(0, 1) : \left| \int_0^1 \varphi(x)g(x)dx \right| \leq 1, \|\varphi\|_\infty \leq 1\},$$

provare che

- (a) l'insieme K é debolmente* compatto e non vuoto;
 (b) l'operatore T é semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole*;
 (c) $\exists \varphi \in K$ tale che $T(\varphi) = \min_{\varphi \in K} T(\varphi)$.

- (1) (a) La linearità dell'operatore T_n è facile. Riguardo la continuità osservare che per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$

$$\|T_n(x)\|_p = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |a^i x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |a|^i \right) \|x\|_p$$

da cui segue che T_n è continuo e che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq \left(\sup_{1 \leq i \leq n} |a|^i \right)$; Inoltre, se \bar{i} è tale che $\max_{1 \leq i \leq n} |a|^i = |a|^{\bar{i}}$, posto $e_{\bar{i}} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\bar{i}}, 0, 0, \dots)$ si ha che $\|e_{\bar{i}}\|_p = 1$ e

$T_n(e_{\bar{i}}) = (0, \dots, 0, \underbrace{|a|^{\bar{i}}}_{\bar{i}}, 0, 0, \dots)$ da cui

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} \geq \|T_n(e_{\bar{i}})\|_p = (|a|^{\bar{i}p})^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \leq i \leq n} |a|^i.$$

Quindi $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = \max_{1 \leq i \leq n} |a|^i$.

- (b) (i) se per ogni $x = (x_n)_n \in l^p$ la successione $(a_n x_n)_n \in l^p$, si ha che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_p = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |a^i x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p \in \mathbb{R}.$$

Applicando il Teorema di Banach-Steinhaus, si ha che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = M < +\infty;$$

- (ii) dal punto (i) segue che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a|^n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{1 \leq i \leq n} |a|^i = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^1, l^\infty)} = M < +\infty.$$

Quindi $|a| \leq 1$.

- (iii) per ogni $x = (x_n)_n \in l^p$

$$\|T_n(x) - T(x)\|_p = \left(\sum_{i \geq n+1} |a^i x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq |a| \left(\sum_{i \geq n+1} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$ in quanto la successione $(x_n)_n \in l^1$.

- (iv) Da uno dei corollari del Teorema di Banach-Steinhaus, si ha che l'operatore T è un operatore lineare e continuo tra gli spazi di Banach l^p e l^p , ossia $T \in \mathcal{L}(l^p)$. Inoltre dallo stesso corollario di BS, segue che

$$\|T\|_{\mathcal{L}(l^p)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(l^1, l^\infty)} = |a|.$$

(2)

- (3) (a) Possiamo scrivere l'insieme K (a cui appartiene la funzione $\varphi \equiv 0$) come

$$K = S_g^{-1}([-1, 1]) \cap B_{L^\infty}$$

dove B_{L^∞} è la palla chiusa di $L^\infty(0, 1)$ e

$$S_g(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)g(x)dx.$$

L'operatore S_g è un operatore lineare continuo debole* (si osservi che $L^\infty = (L^1)'$ e che la funzione $g \in L^1$. Quindi S_g fa parte della famiglia delle applicazioni attraverso le quali è costruita la topologia debole*). Quindi l'insieme $S_g^{-1}([-1, 1])$ è un chiuso debole*. Essendo K l'intersezione di un chiuso debole* con la palla B_{L^∞} (che è debolmente* compatta per il Teorema di BAB), allora K è debolmente* compatto.

- (b) l'operatore T é la somma dell'operatore S_f (che é continuo rispetto alla topologia debole*) e della norma $L(\varphi) := \|\varphi\|_\infty$ che é semicontinuo inferiormente rispetto la topologia debole* (i suoi sottolivelli sono le palle che sono debolmente* compatte e quindi debolmente* chiuse). Quindi $T = S_f + L$ é semicontinuo inferiormente rispetto la topologia debole* in quanto somma di operatori semicontinui.
- (c) Essendo T semicontinuo inferiormente rispetto la topologia debole* ed essendo K un insieme debolmente* compatto, per il teorema generalizzato di Weistrass (versione topologica), $\exists \varphi \in K$ tale che $T(\varphi) = \min_{\varphi \in K} T(\varphi)$.

Compito scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 18.05.2018**

- (1) (**T=14 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia $P_n(x) \in c_{00}$ definito come

$$P_n(x) := (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Si dimostri che

- (a) (**4 punti**) $P_n \in \mathcal{L}(l^p)$ con $\|P_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1$;
 (b) (**4 punti**) se $1 \leq p < +\infty$ allora $P_n(x) \rightarrow x$ in l^p per ogni $x \in l^p$;
 (c) (**4 punti**) $P_n(x) \rightarrow x$ in l^∞ per ogni $x \in c_0$;
 (d) (**3 punti**) P_n non tende ad I in $\mathcal{L}(l^p)$ (si calcoli $(I - P_n)(e_{n+1})$ e si determini $\|I - P_n\|_{\mathcal{L}(l^p)}$...)
- (2) (**6 punti**) Sia $f, (f_n)_n \subseteq L^2(0, 1)$. Provare che

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0 \iff f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^2(0, 1) \text{ e } \|f_n\|_2 \rightarrow \|f\|_2.$$

- (3) (**11 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e $f \in L^{p'}(0, 1)$. Sia $S : L^p(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1)$ l'operatore definito da

$$S(\varphi) = f \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in L^p(0, 1).$$

Provare che S é ben posto, lineare e continuo con norma $\|S\| \leq \|f\|_{p'}$. Dimostrare inoltre che se $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in $L^p(0, 1)$, allora $f\varphi_n \rightharpoonup f\varphi$ in $L^1(0, 1)$.

Compito scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 03.07.2018**

- (1) (
- T=10 punti**
-) Sia
- $1 \leq p \leq \infty$
- ,
- $n \in \mathbb{N}$
- ,
- $\beta \in \mathbb{R}$
- . Per ogni
- $x = (x_n)_n \in l^p$
- sia

$$T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} x_k.$$

Si dimostri che $T \in (l^p)'$, si calcoli la sua norma e si dimostri che per ogni $x \in l^p$ vale che $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots) = T(x)$.

- (2) (
- T= 7 punti**
-) Siano
- X
- spazio di Banach riflessivo. Sia
- $K \subseteq X$
- un sottoinsieme convesso chiuso. Sia
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$
- una funzione convessa e continua. Provare che esiste il

$$\min_{x \in K} (f(x) + \|x\|_X).$$

- (3) Sia
- $1 < p < \infty$
- e
- $(f_n)_n \in L^{p'}(0, 1)$
- . Sia
- $T_n : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$
- l'operatore definito da

$$T_n(\varphi) = \int_0^1 f_n(x) \varphi(x) dx.$$

Dimostrare che

- (a) (**3 punti**) per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore T_n é lineare e continuo e calcolarne la norma;
 (b) (**3 punti**) se $f_n \rightarrow f$ in $L^{p'}(0, 1)$, allora , posto

$$T(\varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx$$

vale che $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \forall \varphi \in L^p(0, 1)$;

- (c) (**2+3+3 punti**) se per ogni $\varphi \in L^p(0, 1)$ la successione $(T_n(\varphi))_n$ converge, allora

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{(L^p(0,1))'} < +\infty$;
 (b) $\exists (f_{k_n})_n \subseteq (f_n)$ ed $\exists f \in L^{p'}(0, 1)$ tale che $f_{k_n} \rightarrow f$ in $L^{p'}(0, 1)$;
 (c) per ogni $\varphi \in L^p(0, 1)$

$$T_{k_n}(\varphi) \rightarrow \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

Compito scritto di Analisi Funzionale**Ferrara, 19.07.2018**

- (1) (**T=10 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $X = l^p \times l^p$ dotato della norma $\|(x, y)\|_X := \|x\|_p + \|y\|_p$ per ogni $(x, y) \in X$. Sia $T : l^p \times l^p \rightarrow l^p$ definito da

$$T(x, y) := (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$. Dimostrare che T é un operatore ben posto, lineare e continuo con norma $\|T\|_{X'} = 1$.

- (2) (**T= 7 punti**) Sia X spazio di Banach riflessivo e sia

$$K := B_X \cap \{x \in X : \varphi(x) \leq 1\}$$

dove $\varphi \in X'$. Sia $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare e continua. Provare che $|T|$ é una funzione convessa e semicontinua e che esiste il $\min_{x \in K} |T(x)|$.

- (3) (**T= 12 punti**) Sia $p = 1$ e $f \in C[0, 1)$. Sia $T_n : L^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(\varphi) = \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Dimostrare che

- (a) per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n \in (L^1(0, 1))'$ e calcolarne la norma;
 (b) se per ogni $\varphi \in L^1(0, 1)$ la successione $(T_n(\varphi))_n$ é limitata, allora
 (i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{(L^1(0,1))'} < +\infty$;
 (ii) $f \in L^\infty(0, 1)$;
 (iii) per ogni $\varphi \in L^1(0, 1)$

$$T_n(\varphi) \rightarrow \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx.$$

Hint: per ogni n la funzione $f_n \in L^\infty(0, 1)$ che rappresenta T_n é la funzione $f_n(x) = f(x)$ se $x \in (0, 1 - \frac{1}{n})$, $f_n(x) = 0$ altrimenti. Allora $\|T_n\| = \|f_n\|_{L^\infty(0,1)} = \max_{[0, 1 - \frac{1}{n}]} |f|$.

Primo Esonero di Analisi Funzionale

Ferrara, 23 novembre 2018

- (1) Sia $1 \leq p < \infty$, siano $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ e sia $X = l^p \times l^{p'}$ dotato della norma $\|(x, y)\|_X := \|x\|_p + \|y\|_{p'}$ per ogni $(x, y) \in X$. Sia $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T_k(x, y) := \sum_{n=1}^k (a_n x_n + b_n y_n)$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^{p'}$.

Dimostrare che:

- (a) (4 punti) T_k è un operatore ben posto, lineare e continuo;
 (b) (4 punti) per $p \notin \{1, +\infty\}$ si ha che

$$\|T_n\|_{X'} = \max \left\{ \left(\sum_{n=1}^k |a_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}; \left(\sum_{n=1}^k |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\};$$

- (c) (4 punti) per $p = 1$ si ha che

$$\|T_n\|_{X'} = \max \left\{ \sup_{1 \leq n \leq k} |a_n|; \sum_{n=1}^k |b_n| \right\}.$$

- (d) (6 punti) Supporre poi che per ogni $(x, y) \in X$ esista il $T(x, y) := \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x, y) \in \mathbb{R}$.
 Dedurre che $(a_n)_n \in l^{p'}$, $(b_n)_n \in l^p$ e che $\|T_k - T\|_{X'} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$.

- (2) (13 punti) Sia X spazio di Banach, $T_n : X \rightarrow X$ una famiglia di operatori lineari e continui e $\mathcal{D} \subset X$ un sottoinsieme denso tale che:

$$T_n x \rightarrow x \text{ per } n \rightarrow \infty, \forall x \in \mathcal{D}$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (a) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, X)} < \infty$
 (b) $T_n x \rightarrow x, \forall x \in X$
 (c) $\sup_n \|T_n(x)\| < \infty \forall x \in X$.

**Primo parziale-Secondo parziale-Totale di Analisi Funzionale
Ferrara, 18.01.2019**

- (1) (**Primo P=22 punti, T=12 punti**) Sia $b \in \mathbb{R}$ un numero reale. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \rightarrow X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (a_1 e^b, a_2 e^{2b}, \dots, a_k e^{kb}, 0, 0, 0, \dots) (\in c_{00})$$

per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.

- (a) (**P=9 punti, T=5 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo e calcolare la sua norma (al variare di $b \in \mathbb{R}$);
- (b) (**P=7 punti, T=4**) Supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X . Dimostrare che $b \leq 0$.
- (c) (**P=6 punti, T=3**) Provare che se $b \leq 0$ e $T(a) := (a_k e^{kb})_{k \in \mathbb{N}}$, allora per ogni $a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ converge a $T(a)$ in X ; per $b = 0$ provare che $(T_k)_k$ non converge a T in $\mathcal{L}(X)$.
- (2) (**Primo P= 8 punti, T=4 punti**) Sia $(a_n)_n$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \in \mathbb{R}$ per ogni $(b_n)_n \in l^\infty$. Provare che $(a_n)_n \in l^1$.
- (3) (**Secondo P= 9 punti, T=4 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T \in L(X, Y)$ tale che soddisfa la seguente proprietà:
 $\forall x_0 \in X$ e $\forall (x_n)_n \subseteq X$, se $x_n \rightarrow x_0$ in X allora $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ in Y . Provare che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.
- (4) (**Secondo P=5+4+4+5+4 punti; T=3+2+2+2+2 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e $g, f \in L^{p'}(0, 1)$. Sia $T_f : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T_f(\varphi) := \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$$

$$\text{e } K := \{\varphi \in L^p(0, 1) : |\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx| \leq 1, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Provare che

- (a) l'insieme K è non vuoto, convesso, fortemente chiuso e debolmente compatto;
- (b) $\exists \varphi \in K$ tale che $T_f(\varphi) = \min_{\varphi \in K} T_f(\varphi)$.

Provare inoltre che se $(f_n)_n \subseteq L^{p'}(0, 1)$ e $T_n := T_{f_n}$ allora

- (a) se $f_n \rightarrow f$ in $L^{p'}(0, 1)$ allora $\sup_n \|T_n\|_{(L^p)'} < +\infty$;
- (b) se $\sup_n \|f_n\|_{p'} < +\infty$ allora esiste $(f_{k_n}) \subseteq (f_n)_n$ ed esiste $f_0 \in L^{p'}(0, 1)$ tale che $T_{k_n}(\varphi) \rightarrow \int_0^1 f_0(x)\varphi(x)dx \forall \varphi \in L^p(0, 1)$;
- (c) se $f_n \rightarrow f$ in $L^{p'}(0, 1)$ e $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $L^p(0, 1)$ allora

$$T_n(\varphi_n) \rightarrow \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx.$$

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Secondo parziale-Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 30.01.2019

- (1) (**T=11 punti**) Sia $b \in \mathbb{R}$ un numero reale. Sia c_0 munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : c_0 \rightarrow l^1$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (a_1 b, \frac{a_2 b^2}{2}, \dots, \frac{a_k b^k}{k!}, 0, 0, 0, \dots) (\in c_{00})$$

per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$.

- (a) (**T=5 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo con norma $\|T_k\|_{\mathcal{L}(c_0, l^1)} = \sum_{n=1}^k \frac{|b|^n}{n!}$;
 (b) (**T=4 punti**) Provare che la successione $(T_k)_k$ converge (in $\mathcal{L}(c_0, l^1)$) all'operatore T definito per ogni $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ come

$$T(a) := (\frac{a_k b^k}{k!})_{k \in \mathbb{N}};$$

- (c) (**T=2 punti**) si calcoli la norma dell'operatore T .

- (2) (**T=5 punti**) Siano X e Y spazi di Banach e sia $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, $T_\alpha : X \rightarrow Y$, una famiglia di funzionali lineari e continui. Supponiamo che esista U intorno di 0 tale che $\forall x \in U \exists c_x \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha(x)\|_Y \leq c_x.$$

Si provi che esiste $C \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C.$$

- (3) (**T=6 punti, Secondo P=12**) Sia X uno spazio di Banach e $T : X \rightarrow X'$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (X', \|\cdot\|_{X'})$ continuo;

(b) per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ e per ogni $x \in X$

$$x_n \rightharpoonup x \implies T x_n \xrightarrow{*} T x.$$

- (4) (**T=10 punti, Secondo P=20**) Siano $g, f \in L^2(0, 1)$ e sia $T_f : L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T_f(\varphi) := \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 \varphi^2(x)dx$$

$$\text{e } K := \{\varphi \in L^2(0, 1) : |\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx| \leq 1\}.$$

Provare che

- (a) l'insieme K è non vuoto, convesso e debolmente chiuso;
 (b) per ogni $\varphi \in L^2(0, 1)$ vale che $T_f(\varphi) \geq \|\varphi\|_2(\|\varphi\|_2 - \|f\|_2)$;
 (c) l'applicazione T_f è convessa e continua;
 (d) $\exists \varphi \in K$ tale che $T_f(\varphi) = \min_{\varphi \in K} T_f(\varphi)$.

Provare inoltre che se $(f_n)_n \subseteq L^2(0, 1)$ e $T_n := T_{f_n}$ allora se $f_n \rightarrow f$ in $L^2(0, 1)$ e $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in $L^2(0, 1)$ allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi_n) \geq \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 \varphi^2(x)dx.$$

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 12.03.2019

- (1) (**T=12 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in l^p$ sia $T_n(x)$ definito da

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

- (a) (**4 punti**) Dimostrare che $T_n \in (l^p)'$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e calcolarne la norma (al variare di p);
 (b) (**8 punti**) Sia $1 \leq p < +\infty$. Si dimostri che sono equivalenti i seguenti fatti:
 (i) per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente;
 (ii) $y \in l^{p'}$.
- (2) (**7 punti**) Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \rightarrow Z$ un operatore lineare, iniettivo e continuo. Sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare tale che $J \circ T$ sia continuo. Provare che T é continuo.
 (In alternativa (vale **4 punti**)) dimostrare lo stesso risultato sotto l'ipotesi aggiuntiva che J sia anche suriettivo.)
- (3) (**T=12 punti**) Sia $f \in L^2(0, 1)$ e sia $T_f : L^2(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1)$ definito come

$$T(g) := fg$$

Provare che

- (a) T é lineare e continuo;
 (b) $\|T\| = \|f\|_2$
 (c) se $g_n \rightharpoonup g$ in $L^2(0, 1)$ allora $fg_n \rightharpoonup fg$ in $L^1(0, 1)$.
 (d) fissata $g_0 \in L^2(0, 1)$, esiste il

$$\min_{g \in K_0} \|T(g)\|_{L^1}$$

dove

$$K_0 := \{g \in L^2(0, 1) : \|g - g_0\|_2 \leq 1\}.$$

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 15.07.2019

- (1) **(11 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n e^{ak} x_k.$$

Dimostrare che

- (a) **(2 punti)** per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n \in (l^2)'$;
 (b) **(9 punti)** se la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in l^2$ allora, posto

$$T(x) := \lim_n T_n(x),$$

allora

- (i) $T : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
 (ii) $a < 0$
 (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\|_{(l^2)'} = 0$.

- (2) **(12 punti)** Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ una funzione lineare e continua.

Provare che

- (a) l'applicazione $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\phi(x) := \|T(x)\|_Y$ é semicontinua inferiormente e convessa;
 (b) se X é riflessivo e $K \subseteq X$ é convesso e chiuso e non vuoto, allora, posto $B_n := \{x \in X : \|x\|_X \leq n\}$, vale che
 (i) esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0 \exists x_n \in K \cap B_n$ tale che $\phi(x_n) = \min_{x \in K \cap B_n} \phi(x)$;
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \inf_{x \in K} \phi(x)$.

- (3) **(8 punti)** Sia $1 < p < \infty$ e $g \in L^{p'}(0, 1)$. Sia

$$K_g := \{f \in L^p(0, 1) : |\int_0^1 f(x)g(x)dx| \leq 1, \|f\|_p \leq 1\}.$$

Provare che K_g é convesso, chiuso e debolmente compatto.

Risoluzione dell'esercizio (2):

Essendo T lineare e la norma una funzione convessa, per l'Osservazione 15.2 (parte (4)) della dispensa si ha che la composizione $\|T\|$ è convessa; inoltre la composizione di funzioni continue è continua. Quindi $\phi = \|T\|$ è continua, da cui semicontinua.

Poiché K è non vuoto, da un certo punto in poi, $K \cap B_n$ è non vuoto. Quindi esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$, l'insieme $K \cap B_n$ è limitato, convesso (in quanto intersezione di insiemi convessi) e chiuso (in quanto intersezione di insiemi chiusi). Quindi applicando il Teorema di Weirstrass per spazi riflessivi, segue che $\forall n \geq n_0$ esiste $x_n \in K \cap B_n$ tale che

$$\phi(x_n) = \min_{x \in K \cap B_n} \phi(x).$$

Poiché $B_n \subseteq B_{n+1}$ allora

$$\min_{x \in K \cap B_n} \phi(x) \geq \min_{x \in K \cap B_{n+1}} \phi(x)$$

ossia la successione $(\phi(x_n))_{n \geq n_0}$ è decrescente. Quindi esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n)$ e

$$\inf_{x \in K} \phi(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n).$$

Poi se $\epsilon > 0$, esiste $\bar{x} \in K$ tale che

$$\phi(\bar{x}) \leq \inf_{x \in K} \phi(x) + \epsilon.$$

Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{x} \in B_n \cap K$, da cui segue che

$$\phi(x_n) \leq \phi(\bar{x}) \leq \inf_{x \in K} \phi(x) + \epsilon.$$

Si ottiene quindi che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) \leq \inf_{x \in K} \phi(x) + \epsilon.$$

Per $\epsilon \rightarrow 0$ segue la tesi.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Primo parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 28.11.2019

(1) **(18 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n e^{ak} x_k.$$

Dimostrare che

- (a) **(4 punti)** per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n \in (l^p)'$ e se ne calcoli la norma;
- (b) **(2 punti)** se $a < 0$ allora $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in l^p$;
- (c) **(12 punti)** se la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in l^p$ allora, posto

$$T(x) := \lim_n T_n(x),$$

vale che

- (i) $T : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
- (ii) se $p > 1$ allora $a < 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\|_{(l^p)'} = 0$;
- (iii) se $p = 1$ allora $a \leq 0$;
- (iv) se $p = 1$ e $a = 0$ allora non vale che $T_n \rightarrow T$ in $(l^1)'$.

(2) **(13 punti)** Siano X, Y spazi di Banach su \mathbb{R} e sia $T_n : X \rightarrow Y$ una successione di funzionali lineari e continui tali che per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é di Cauchy in Y .

Provare che

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty$;
- (b) se (x_n) é di Cauchy in X allora $(T_n(x_n))_n$ é di Cauchy in Y .

Risoluzione:

(1) (a) Posto $b_n = (b_k^n)_k$ dove

$$b_k^n := \begin{cases} e^{ak} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

vale che $T_n = T_{b_n}$ e $b_n \in c_{00} \subseteq l^{p'}$ per ogni $p \geq 1$. Quindi dal teorema di rappresentazione degli operatori lineari e continui su l^p si ha che T_n é un operatore lineare e continuo su l^p e

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{(l^p)'} = \|b_n\|_p &= \begin{cases} (\sum_{k=1}^n e^{akp'})^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_{1 \leq k \leq n} e^{ak} & \text{se } p = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\frac{1 - e^{a(n+1)p'}}{1 - e^{ap'}} - 1)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \wedge a \neq 0 \\ n^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \wedge a = 0 \\ e^{an} & \text{se } p = 1 \wedge a \geq 0 \\ e^a & \text{se } p = 1 \wedge a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Se $a < 0$ allora $e^a < 1$ e quindi la serie geometrica $\sum_{k=1}^\infty e^{ak}$ converge. Pertanto posto $b = (e^{ak})_{k \in \mathbb{N}}$ vale che $b \in l^1 \subseteq l^{p'}$ per ogni $p \geq 1$ da cui, per la disuguaglianza di Hölder, $(e^{ak}x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$ per ogni $x \in l^p$. In particolare, per ogni $x \in l^p$, abbiamo la convergenza semplice della serie $\sum_{k=1}^\infty e^{ak}x_k$. Quindi, per $k \rightarrow \infty$,

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ak}x_k \rightarrow \sum_{k=1}^\infty e^{ak}x_k := T(x).$$

(c) Supponiamo che la successione $(T_n(x))_n$ converga a $T(x)$ per ogni $x \in l^p$. Per il Teorema di BS, l'operatore $T \in (l^p)'$. Poiché $T(x) = \sum_{k=1}^\infty e^{ak}x_k$, dal Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui (vedi anche il caso $p = \infty$), deve valere che $b = (e^{ak})_{k \in \mathbb{N}} \in l^{p'}$ (si osservi che $T = T_b$). Ma questo equivale a richiedere che

$$\begin{cases} |e^{ap'}| < 1 & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |e^{ap'}| \leq 1 & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} a < 0 & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ a \leq 0 & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

Inoltre, se $1 < p \leq \infty$ e $a < 0$, posto $\hat{b}_n = (\hat{b}_k^n)_k$ dove

$$\hat{b}_k^n := \begin{cases} e^{ak} & \text{se } k \geq n + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

vale che, per $n \rightarrow \infty$,

$$\|T_n - T\|_{(l^p)'} = \|\hat{b}_n\|_p = (\sum_{k=n+1}^\infty e^{akp'})^{1/p'} \rightarrow 0$$

in quanto coda di una serie geometrica convergente. Invece per $p = 1$ e $a = 0$ vale che

$$\|T_n - T\|_{(l^p)'} = \|\hat{b}_n\|_\infty = \sup_{k \geq n+1} e^{ak} = 1 \not\rightarrow 0.$$

- (2) (a) Poiché per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in Y che è uno spazio di Banach, allora esiste il limite (in Y) della successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. In particolare da un Corollario del Teorema di BS, $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$. Inoltre, per lo stesso Corollario, posto $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, vale che T è un operatore lineare e continuo.
- (b) Essendo X uno spazio di Banach, la successione (x_n) , che è di Cauchy in X , converge ad un punto $x_0 \in X$. Allora

$$\begin{aligned} \|T_n(x_n) - T(x_0)\|_Y &\leq \|T_n(x_n) - T_n(x_0)\|_Y + \|T_n(x_0) - T(x_0)\|_Y \\ &\leq \|T_n\| \cdot \|x_n - x_0\|_X + \|T_n(x_0) - T(x_0)\|_Y \\ &\leq M \cdot \|x_n - x_0\|_X + \|T_n(x_0) - T(x_0)\|_Y \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0.

Osservazione 0.1. *Il precedente esercizio vale ancora se richiedessimo Y solo spazio normato. Infatti se (y_n) è una successione di Cauchy in uno spazio normato Y , allora essa è limitata in quanto*

$$\|y_n\| \leq \|y_n - y_m\| + \|y_m\| \leq \epsilon + \|y_m\|$$

per ogni $n, m \geq n_0$ da cui

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| \leq \sup_{m \leq n_0} \|y_m\| + \epsilon < M.$$

Quindi per provare la parte (1) dell'esercizio precedente, dopo aver osservato che per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))$ è limitata in Y in quanto di Cauchy, si può usare direttamente il Teorema di BS.

Vediamo invece come cambia la dimostrazione della parte (2) quando Y è solo normato (in quanto, senza l'ipotesi che Y sia di Banach, non posso usare che $(T_n(x_n))_n$ converge a $T(x)$). Per provare che $(T_n(x_n))_n$ è di Cauchy potrei allora procedere così: essendo (x_n) di Cauchy, fissato $\epsilon > 0$, sia n_0 tali che

$$\|x_k - x_m\|_X < \frac{\epsilon}{3M}$$

per ogni $k, m \geq n_0$ e fissiamo $k \geq n_0$. Poiché la successione $(T_n(x_k))_n$ è di Cauchy in Y (applicando l'ipotesi dell'esercizio su x_k), esiste n_1 tale che

$$\|T_n(x_k) - T_m(x_k)\|_Y < \frac{\epsilon}{3}$$

per ogni $n, m \geq n_1$. Allora per ogni $m, n \geq \max\{n_0, n_1\}$ vale che

$$\begin{aligned} \|T_n(x_n) - T_m(x_m)\|_Y &\leq \|T_n(x_n) - T_n(x_k)\|_Y + \|T_n(x_k) - T_m(x_k)\|_Y + \|T_m(x_k) - T_m(x_m)\|_Y \\ &\leq M\|x_n - x_k\| + \|T_n(x_k) - T_m(x_k)\|_Y + M\|x_k - x_m\|_X \\ &< \frac{2}{3}\epsilon + \|T_n(x_k) - T_m(x_k)\|_Y < \epsilon \end{aligned}$$

ossia $(T_n(x_n))_n$ è di Cauchy in Y .

Compito totale, primo parziale e secondo parziale di Analisi Funzionale**Ferrara, 16.01.2020**

- (1) **(Primo P=19 punti, T=9 punti)** Sia $1 \leq p < \infty$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ poniamo

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k} x_k$$

- (a) Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ é lineare e continuo e calcolarne la norma;
 (b) Provare che sono equivalenti i seguenti fatti:
 (i) $|a| \leq 1$;
 (ii) per ogni $x \in l^p$ esiste $T(x) \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_n T_n(x) = T(x)$.
 (iii) esiste $T \in (l^p)'$ tale che $\lim_n \|T_n - T\|_{(l^p)'} = 0$.

- (2) **(Primo P=12 punti, T=6 punti)** Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si definisca $T^0 = Id$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T^n := T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \rightarrow X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{T^k(x)}{k}$$

é convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

- (3) **(Secondo P: 10+5=15 punti, T=8 punti)** Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $T \in X'$. Sia $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\phi(x) := T(x) + \|x\|$. Provare che
 (a) se $S \in X'$ allora esiste il $\min_{x \in K} \phi(x)$ dove

$$K := B_X \cap \{x \in X : |S(x)| \leq 1\};$$

- (b) se $\|T\|_{X'} < 1$ e $H \subseteq X$ é non vuoto, convesso e chiuso, allora esiste il $\min_{x \in H} \phi(x)$.

- (4) **(Secondo P=6+3+4+3=16 punti, T=8 punti)** Sia $1 \leq p < \infty$ e $(f_n) \in L^{p'}(0, 1)$. Sia $T_n : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T_n(\varphi) := \int_0^1 f_n(x) \varphi(x) dx.$$

Si supponga che $\sup_n \|T_n\|_{(L^p)'} < +\infty$. Provare che

- (a) esiste $(f_{k_n}) \subseteq (f_n)_n$ ed esiste $f_0 \in L^{p'}(0, 1)$ tale che $f_{k_n} \rightharpoonup f_0$ in $L^{p'}(0, 1)$ se $1 < p < \infty$ e $f_{k_n} \xrightarrow{*} f_0$ in $L^\infty(0, 1)$ se $p = 1$;
 (b) $\|f_0\|_{p'} \leq \sup_n \|T_n\|_{(L^p)'}$;
 (c) $T_{k_n}(\varphi) \rightarrow \int_0^1 f_0(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in L^p(0, 1)$;
 (d) se $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $L^p(0, 1)$ allora

$$T_{k_n}(\varphi_{k_n}) \rightarrow \int_0^1 f_0(x) \varphi(x) dx.$$

Soluzione.

(1) (**vedi compito 02.12.2016**) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $b_n = (b_k^n)_k \in c_{00}$ definito da

$$b_k^n := \begin{cases} \frac{a^k}{k} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

Dal Teorema di rappresentazione, si ha che l'operatore T_n é continuo con

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \|b_n\|_{p'} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } p \neq 1 \\ \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a^k}{k} \right| & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

(2) (a) (i) \implies (ii). Se $|a| \leq 1$ allora $b = (\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$ per ogni $1 < p' \leq \infty$ in quanto $\frac{|a^k|}{k} \leq \frac{1}{k}$. Quindi per la disuguaglianza di Hölder si ha che $\forall x = (x_k)_k \in l^p$ la successione $(\frac{a^k}{k} x_k)_k \in l^1$, ossia la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k} x_k$ converge. Allora posto $T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k} x_k$ si ha che T é lineare e continuo e $\lim_n T_n(x) = T(x) \forall x = (x_k)_k \in l^p$.

(b) (ii) \implies (iii). Dal Teorema di BS, se esiste $T(x) = \lim_n T_n(x) \forall x = (x_k)_k \in l^p$ allora $T \in l^{p'}$. Inoltre $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k} x_k$. Allora, dal Teorema di rappresentazione, si ha che $b = (\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$ e $\|T\|_{(l^p)'} = \|(\frac{a^k}{k})_k\|_{p'}$. In particolare la successione $(\frac{a^k}{k})_k$ é limitata, da cui segue che $|a| \leq 1$ (altrimenti $\lim_k |\frac{a^k}{k}| = +\infty$).
L'operatore

$$T - T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^k}{k} x_k$$

è un operatore lineare e continuo. Se $p > 1$ allora

$$\|T_n - T\|_{(l^p)'} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{a^k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

e, poiché $(\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$, segue che per $n \rightarrow \infty$ $\|T_n - T\|_{(l^p)'} \rightarrow 0$.

Se $p = 1$

$$\|T_n - T\|_{(l^1)'} = \sup_{k \geq n+1} \left| \frac{a^k}{k} \right| \leq \sup_{k \geq n+1} \frac{1}{k}$$

e si ottiene di nuovo che per $n \rightarrow \infty$ $\|T_n - T\|_{(l^p)'} \rightarrow 0$.

(c) (iii) \implies (ii). La convergenza nello spazio degli operatori implica la convergenza puntuale. Pertanto vale la proprietà (ii) e, procedendo come nella dimostrazione dell'implicazione precedente, si ottiene che $b = (\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'} \subseteq l^\infty$. In particolare $|a| \leq 1$.

(3) (**tratto dal compito 16.01.2018**)

(4) (a) si osservi che $T \in X'$ da cui $|T|$ é continuo e convesso. Anche la norma é una funzione continua e convessa. Allora ϕ é una funzione continua e convessa in quanto la somma di due funzioni continue e convessi. Inoltre $\{x \in X : |S(x)| \leq 1\}$ é convesso e chiuso (in quanto sottolivello di una funzione convessa e continua). Allora $K := B_X \cap \{x \in X : |S(x)| \leq 1\}$ é convesso e chiuso in quanto intersezione di insiemi convessi e chiusi. Inoltre K é limitato in quanto contenuto nella palla unitaria. Essendo X riflessivo, dal

Teorema di Weirstrass per spazi riflessivi (applicato sull'insieme K limitato), esiste il $\min_{x \in K} \phi(x)$ dove

$$K := B_X \cap \{x \in X : |S(x)| \leq 1\};$$

(b) essendo $\|T\|_{X'} < 1$, allora $\alpha = 1 - \|T\| > 0$ e

$$\phi(x) = |Tx| + \|x\| \leq -\|T\|\|x\| + \|x\| = (1 - \|T\|)\|x\| = \alpha\|x\|.$$

In particolare se H non fosse limitato, allora

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in H} \phi(x) \geq \lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in H} \alpha\|x\| = +\infty.$$

Essendo X riflessivo, dal Teorema di Weirstrass per spazi riflessivi (applicato sull'insieme $H \subseteq X$ non vuoto, convesso e chiuso) esiste il $\min_{x \in H} \phi(x)$.

(5) **(tratto dall' Esercizio (4) del compito 18.01.2019)**

(a) Si osservi che $T_n \in (L^p(0,1))'$ in quanto é un funzionale del tipo T_v con $v = f_n \in L^p(0,1)$. Essendo $\|T_n\|_{(L^p(0,1))'} = \|f_n\|_p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ottiene che

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p} = \sup_n \|T_n\|_{(L^p)'} < +\infty.$$

Sia $1 \leq p < \infty$ e $(f_n) \in L^{p'}(0,1)$. Sia $T_n : L^p(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T_n(\varphi) := \int_0^1 f_n(x)\varphi(x)dx.$$

Quindi, per $1 < p < \infty$, la successione $(f_n)_n$ é limitata in $L^{p'}(0,1)$ che è uno spazio riflessivo. Pertanto esiste $(f_{k_n}) \subseteq (f_n)_n$ ed esiste $f_0 \in L^{p'}(0,1)$ tale che $f_{k_n} \rightharpoonup f_0$ in $L^{p'}(0,1)$. Se invece $p = 1$ si ha che la successione $(f_n)_n$ é limitata in $L^\infty(0,1)$ che è il duale dello spazio separabile $L^1(0,1)$. Pertanto esiste $(f_{k_n}) \subseteq (f_n)_n$ ed esiste $f_0 \in L^\infty(0,1)$ tale che $f_{k_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ in $L^\infty(0,1)$.

(b) Dalle proprietà della convergenza debole e della convergenza debole* si ha che

$$\|f_0\|_{p'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_{k_n}\|_{L^{p'}} \leq \sup_n \|f_n\|_{L^{p'}} \leq \sup_n \|T_n\|_{(L^p)'};$$

(c) Dalla caratterizzazione della convergenza debole e debole*, si ha che

$$\int_0^1 f_{k_n}(x)\varphi(x)dx \rightarrow \int_0^1 f_0(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in L^p(0,1)$$

ossia

$$T_{k_n}(\varphi) \rightarrow \int_0^1 f_0(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in L^p(0,1).$$

(d) Dal punto precedente abbiamo che la successione dei funzionali lineari e continui T_{k_n} sta puntualmente convergendo al funzionale $T_0(\varphi) = \int_0^1 f_0(x)\varphi(x)dx$. Poiché $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $L^p(0,1)$, da un Corollario di BS, segue che i due limiti si compongono, ossia

$$T_{k_n}(\varphi_{k_n}) \rightarrow T_0(\varphi) = \int_0^1 f_0(x)\varphi(x)dx.$$

Secondo parziale e Compito totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 03.02.2020

- (1) (**T= 15 punti**) Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < 1$. Per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ sia

$$T(x) := (a^k x_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

- (a) (**5 punti**) si dimostri che $T \in \mathcal{L}(l^\infty, l^1)$ e si calcoli la norma $\|T\|_{\mathcal{L}(l^\infty, l^1)}$;
 (b) (**5 punti**) si dimostri che $T \in \mathcal{L}(l^\infty)$ e si calcoli la norma $\|T\|_{\mathcal{L}(l^\infty)}$;
 (c) (**5 punti**) considerando $T : l^\infty \rightarrow l^\infty$ si definisca l'operatore

$$T^n(x) := T(T^{n-1}(x)).$$

Si provi che $T^n \rightarrow 0$ in $\mathcal{L}(l^\infty)$ e che la successione $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita come

$$S_n := \sum_{k=1}^n T^k$$

converge nello spazio $\mathcal{L}(l^\infty)$.

- (2) (**Secondo P: 10+5=15 punti, T=8 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e sia $f \in L^p(0, 1)$. Sia $T : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx + \|g\|_p.$$

Provare che

- (a) esiste il $\min_{g \in K} T(g)$ dove $K := \{g \in L^p(0, 1) : (\int_0^1 |g(x) - 1|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq 1\}$;
 (b) se $\|f\|_p < 1$ e $H \subseteq L^p(0, 1)$ é non vuoto, convesso e chiuso, allora esiste il $\min_{g \in H} T(g)$.
 (3) (**Secondo P: 10+5=15 punti, T=8 punti**) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = f(x_n).$$

Provare che:

- (a) (**4 punti**) per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : (X', \|\cdot\|_{X'}) \rightarrow \mathbb{R}$ é continuo e se ne calcoli la norma;
 (b) (**3 punti**) per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : (X', \sigma(X', X'')) \rightarrow \mathbb{R}$ é continuo;
 (c) (**4 punti**) se la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente in X allora la successione $(T_n)_n$ converge debolmente* in X'' ;
 (d) (**4 punti**) se X é riflessivo e se la successione $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente* in X'' allora la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente debolmente in X .

Compito totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 20.02.2020**

- (1) **(15 punti)** Sia $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, sia $a = (a_k)_k$ una successione e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k x_k.$$

Si supponga che per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ abbia limite finito. Si provi che

- (a) **(5 punti)** il funzionale $T : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ dato da

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

é lineare e continuo;

- (b) **(5 punti)** $(a_k)_k \in l^{p'}$;

- (c) **(5 punti)** $\|T_n - T\|_{(l^p)'} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

- (2) **(T=8 punti)** Sia $f \in L^1(0, 1)$. Sia $T : L^\infty(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx + \|g\|_\infty.$$

Dimostrare che

- (a) l'applicazione T é semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole*;

- (b) esiste il $\min_{g \in B} T(g)$ dove $B := \{g \in L^\infty(0, 1) : \text{ess sup}_{x \in (0,1)} |g(x)| \leq 1\}$.

- (3) **(8 punti)** Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $J_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale definito da $J_x(f) = f(x)$.

Provare i seguenti fatti:

- (a) per ogni $x \in X$ vale che $J_x \in X''$ e $\|J_x\|_{X''} = \|x\|_X$;

- (b) se X é riflessivo e $(J_{x_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset X''$ è limitata, allora esiste una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ debolmente convergente in X .

Compito totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 04.06.2020

- (1) (**T=4x3=12 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) = (y_k)_k$ dove

$$y_k := \begin{cases} (-1)^k x_k, & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si dimostri che

- (a) $T_n \in \mathcal{L}(l^p)$ e $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1$;
 (b) se $1 \leq p < +\infty$, allora per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_n$ converge a $T(x) = ((-1)^k x_k)_k$ in l^p ;
 (c) se $p = +\infty$, allora per ogni $x \in c_0$ la successione $(T_n(x))_n$ converge a $T(x)$ in l^∞ .
- (2) (**T=6x3=18 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^p(0, 1)$ e

$$K_g := \{\varphi \in L^p(0, 1) : \|\varphi - g\|_p \leq 1\}.$$

- (a) Provare che K_g è convesso, non vuoto e limitato in $L^p(0, 1)$.
 (b) Sia $f \in L^{p'}(0, 1)$ e per ogni $\varphi \in L^p(0, 1)$ sia

$$T(\varphi) := \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx.$$

Provare che se $1 < p < +\infty$ allora esiste il minimo di T sull'insieme K_g ;

- (c) se $p = +\infty$ e se $(\varphi_n) \subseteq K_g$ è tale che $T(\varphi_n) \rightarrow \inf_{K_g} T$, allora esiste $(\varphi_{k_n}) \subseteq (\varphi_n)_n$ ed esiste $\varphi_0 \in K_g$ tale che $\varphi_{k_n} \xrightarrow{*} \varphi_0$ in $L^\infty(0, 1)$.

Inoltre

$$T(\varphi_0) = \min_{K_g} T.$$

Compito totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 04.06.2020**

- (1) (**T=4x3=12 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) = (y_k)_k$ dove

$$y_k := \dots\dots\dots$$

Si dimostri che

- (a) $T_n \in \mathcal{L}(l^p)$ e $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1$;
 (b) se $1 \leq p < +\infty$, allora per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_n$ converge a $T(x) = \dots$ in l^p ;
 (c) se $p = +\infty$, allora per ogni $x \in c_0$ la successione $(T_n(x))_n$ converge a $T(x)$ in l^∞ .

- (2) (**T=6x3=18 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^p(0, 1)$ e

$$K_g := \dots\dots\dots$$

- (a) Provare che K_g è convesso, non vuoto e limitato in $L^p(0, 1)$.
 (b) Sia $f \in L^{p'}(0, 1)$ e per ogni $\varphi \in L^p(0, 1)$ sia

$$T(\varphi) := \dots\dots\dots$$

Provare che se $1 < p < +\infty$ allora esiste il minimo di T sull'insieme K_g ;

- (c) se $p = +\infty$ e se $(\varphi_n) \subseteq K_g$ è tale che $T(\varphi_n) \rightarrow \inf_{K_g} T$, allora esiste $(\varphi_{k_n}) \subseteq (\varphi_n)_n$ ed esiste $\varphi_0 \in K_g$ tale che $\varphi_{k_n} \xrightarrow{*} \varphi_0$ in $L^\infty(0, 1)$.

Inoltre

$$T(\varphi_0) = \dots\dots\dots$$

Compito totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 15.07.2020**

- (1) **(10 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $x = (x_n)_n \in l^p$ sia

$$T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} x_k.$$

Si dimostri che $T \in (l^p)'$, si esprima la sua norma (calcolandola esplicitamente per $p = \infty$) e si dimostri che per ogni $x \in l^p$ vale che $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots) = T(x)$.

- (2) **(21 punti)** Siano X, Y spazi di Banach su \mathbb{R} e sia $(T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ una successione di funzionali lineari e continui tali che $T_n(x) \rightarrow T(x)$ per ogni $x \in X$. Provare che

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < +\infty$ per ogni $x \in X$;
 (b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty$;
 (c) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)};$$

- (d) se X é riflessivo e $K \subseteq X$ é un sottoinsieme convesso, chiuso, limitato e non vuoto, allora esiste $\exists x_0 \in K$ tale che

$$\|T(x_0)\| = \min_{x \in K} \|T(x)\|.$$

Primo Parziale di Analisi Funzionale
Ferrara, 22.12.2020

- (1) (**P=15 punti, T=7 punti**) Siano $1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha > 0$ fissati. Per ogni $x \in \ell^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\alpha}.$$

Si dimostri che se sono equivalenti i seguenti fatti:

- (a) la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in \ell^p$;

- (b) posto

$$T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^\alpha}$$

vale che $T \in (\ell^p)'$;

- (c) $\alpha > \begin{cases} \frac{p-1}{p} & \text{se } p \in [1, \infty) \\ 1 & \text{se } p = \infty \end{cases}$.

- (2) (**P=16 punti, T=8 punti**) Sia X uno spazio normato. Siano Y un sottospazio di X e Z un sottospazio di X' . Definiamo

$$Y^\perp := \{f \in X' : f(x) = 0 \forall x \in Y\}$$

e

$$Z^\perp := \{x \in X : f(x) = 0 \forall f \in Z\}.$$

Provare che

- (a) (**P=3 punti**) Y^\perp é un sottospazio chiuso di X' ;
 (b) (**P=3 punti**) Z^\perp é un sottospazio chiuso di X ;
 (c) (**P=5 punti**) $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$;
 (d) (**P=5 punti**) sia $Y = \ker f_0$ dove $f_0 \in X'$ è tale che $f_0 \neq 0$. Allora $Y = \text{span}\{f_0\}^\perp$

Ai fini del totale, oltre agli esercizi del primo parziale, si svolgano i seguenti esercizi

- (1) (**T=8 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e $f \in L^{p'}(0, 1)$. Sia $T : L^p(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1)$ definito come

$$T(g) := fg$$

Provare che

- (a) T é lineare e continuo e $\|T\|_{\mathcal{L}(L^p, L^1)} = \|f\|_{p'}$;
 (b) provare che se $1 < p < \infty$ e se $(g_n)_n$ è limitata in $L^p(0, 1)$ allora esiste un'estratta $(g_{k_n})_n$ tale che $g_{k_n} \rightarrow g$ in $L^p(0, 1)$. Inoltre $T(g_{k_n}) \rightarrow T(g)$ in $L^1(0, 1)$;
 (c) provare che se $p = \infty$ e se $(g_n)_n$ è limitata in $L^\infty(0, 1)$ allora esiste un'estratta $(g_{k_n})_n$ tale che $g_{k_n} \xrightarrow{*} g$ in $L^\infty(0, 1)$. Inoltre $T(g_{k_n}) \rightarrow T(g)$ in $L^1(0, 1)$.

- (2) (**T=8 punti**) Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia B_X la palla chiusa unitaria.

Provare che

- (a) per ogni $f \in X'$ esiste $x_0 \in B_X$ tale che $\|f\|_{X'} = f(x_0)$;
 (b) ogni $f \in X'$ ammette un punto di minimo sulla palla B_X ;
 (c) ogni $f \in X'$ ammette un punto di massimo sull'insieme $S_1 := \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Ferrara, 22.12.2020

Ai fini del primo parziale di Analisi Funzionale, si svolgano i seguenti esercizi

- (1) (**P=15 punti, T=7 punti**) Siano $1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha > 0$ fissati. Per ogni $x \in \ell^p$ sia

$$T_n(x) := \dots$$

Si dimostri che se sono equivalenti i seguenti fatti:

- (a) la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in \ell^p$;

- (b) posto

$$T(x) := \dots$$

vale che $T \in (\ell^p)'$;

- (c) $\alpha > \begin{cases} \frac{p-1}{p} & \text{se } p \in [1, \infty) \\ 1 & \text{se } p = \infty \end{cases}$.

- (2) (**P=16 punti, T=8 punti**) Sia X uno spazio normato. Siano Y un sottospazio di X e Z un sottospazio di X' . Definiamo

...

e

...

Provare che

- (a) (**P=3 punti**) ... è un sottospazio chiuso di X' ;

- (b) (**P=3 punti**) ... è un sottospazio chiuso di X ;

- (c) (**P=5 punti**) = \bar{Y} ;

- (d) (**P=5 punti**) sia $Y = \ker f_0$ dove $f_0 \in X'$ è tale che $f_0 \neq 0$. Allora $\dots = \text{span}\{f_0\}^\perp$

Ai fini del totale, oltre agli esercizi del primo parziale, si svolgano i seguenti esercizi

- (3) (**T=8 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e $f \in L^{p'}(0, 1)$. Sia $T : L^p(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1)$ definito come

$$T(g) := \dots$$

Provare che

- (a) T è lineare e continuo con $\|T\|_{\mathcal{L}(L^p, L^1)} = \|f\|_{p'}$;

- (b) provare che se $1 < p < \infty$ e se $(g_n)_n$ è limitata in $L^p(0, 1)$ allora esiste un'estratta $(g_{k_n})_n$ tale che $g_{k_n} \rightharpoonup g$ in $L^p(0, 1)$. Inoltre $T(g_{k_n}) \rightharpoonup T(g)$ in $L^1(0, 1)$;

- (c) provare che se $p = \infty$ e se $(g_n)_n$ è limitata in $L^\infty(0, 1)$ allora esiste un'estratta $(g_{k_n})_n$ tale che $g_{k_n} \rightharpoonup^* g$ in $L^\infty(0, 1)$. Inoltre $T(g_{k_n}) \rightharpoonup T(g)$ in $L^1(0, 1)$.

- (4) (**T=8 punti**) Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia B_X la palla chiusa unitaria.

Provare che

- (a) per ogni $f \in X'$ esiste $x_0 \in B_X$ tale che ;

- (b) ogni $f \in X'$ ammette un punto di ... sulla palla B_X ;

- (c) ogni $f \in X'$ ammette un punto di ... sull'insieme $S_1 := \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Per il primo parziale

(1)

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\alpha}.$$

$$T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^\alpha}$$

(2)

$$Y^\perp := \{f \in X' : f(x) = 0 \forall x \in Y\}$$

$$Z^\perp := \{x \in X : f(x) = 0 \forall f \in Z\}.$$

Provare che

- (a) Y^\perp ;
- (b) Z^\perp ;
- (c) $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$;
- (d) $Y = \text{span}\{f_0\}^\perp$

Per la seconda parte

(3)

$$T(g) := fg$$

- (4)(a) $\|f\|_{X'} = f(x_0)$;
- (b) minimo
- (c) massimo

Ferrara, 12.01.2021

Ai fini del primo parziale si svolgano i seguenti esercizi:

- (1) (**P=16 punti, T=8 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $(b_n)_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale definito, per ogni $a = (a_n)_n \in \ell^p$

$$T_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n b_n.$$

- (a) Supponendo che per ogni $a \in \ell^p$ la successione reale $(T_k(a))_k$ converge a $T(a) \in \mathbb{R}$, si provi che $T \in (\ell^p)'$ e $(b_n)_n \in \ell^{p'}$;
 (b) applicando la parte (a), dimostrare che, definito $S(a) := (\frac{a_k}{k^\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$, sono equivalenti i seguenti fatti

$$S(a) \in \ell^1 \quad \forall a \in \ell^p \iff \begin{cases} \alpha > \frac{p-1}{p} & \text{se } p \in (1, \infty) \\ \alpha \geq 0 & \text{se } p = 1 \\ \alpha > 1 & \text{se } p = \infty \end{cases}.$$

- (2) (**P=15 punti, T=7 punti**) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X' . Definiamo

$$M^0 := \{f \in X' : |f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in M\}$$

e

$$N^0 := \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \quad \forall f \in N\}$$

Provare che

- (a) M^0 è un sottoinsieme chiuso e convesso di X' e N^0 è un sottoinsieme chiuso e convesso di X ;
 (b) se C è un convesso chiuso tale che $-C \subseteq C$ allora $C^{00} = C$.

Ai fini del secondo parziale si svolgano i seguenti esercizi:

- (1) (**P=14 punti, T=7 punti**) Sia X uno spazio di Banach su \mathbb{R} e sia $(T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, X')$ una successione tale che $T_n(x) \rightarrow^* T(x)$ per ogni $x \in X$. Provare che

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, X')} < +\infty$;
 (b) $T \in \mathcal{L}(X, X')$ e $\|T\|_{\mathcal{L}(X, X')} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, X')} < +\infty$.

- (2) (**P=17 punti, T=9 punti**) Sia $f \in L^{p'}(0, 1)$ dove $1 < p < \infty$. Sia $T : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := \|g\|_p - \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

e

$$K := \{g \in L^p(0, 1) : \|g\|_1 \leq 1\}.$$

Dimostrare che

- (a) T è un'applicazione convessa e continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$;
 (b) se $g_n \rightarrow g$ in $L^p(0, 1)$ allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(g_n) \geq T(g)$;
 (c) K è un convesso chiuso di $L^p(0, 1)$;
 (d) se $\|f\|_{p'} < 1$ allora $\lim_{\|g\|_p \rightarrow \infty} T(g) = +\infty$ ed esiste il $\min_{g \in K} T(g)$.

Ai fini del totale si hanno a disposizione 3 ore per svolgere tutti gli esercizi proposti.

Ferrara, 12.01.2021

Ai fini del primo parziale si svolgano i seguenti esercizi:

- (1) (**P=16 punti, T=8 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $(b_n)_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale definito, per ogni $a = (a_n)_n \in \ell^p$, come

$$T_k(a) = \dots\dots$$

- (a) Supponendo che per ogni $a \in \ell^p$ la successione reale $(T_k(a))_k$ converge a $T(a) \in \mathbb{R}$, si provi che $T \in (\ell^p)'$ e $(b_n)_n \in \ell^{p'}$;
 (b) applicando la parte (a), dimostrare che, definito $S(a) := \dots\dots$, dove $\alpha \geq 0$, sono equivalenti i seguenti fatti

$$S(a) \in \ell^1 \quad \forall a \in \ell^p \iff \begin{cases} \alpha > \frac{p-1}{p} & \text{se } p \in (1, \infty) \\ \alpha \geq 0 & \text{se } p = 1 \\ \alpha > 1 & \text{se } p = \infty \end{cases} .$$

- (2) (**P=15 punti, T=7 punti**) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X' . Definiamo

$$M^c := \dots$$

e

$$N^c := \dots$$

Provare che

- (a) M^c è un sottoinsieme chiuso e convesso di X' e N^c è un sottoinsieme chiuso e convesso di X ;
 (b) se K è un convesso chiuso non vuoto tale che $-K \subseteq K$ allora $K^{cc} = K$.

Ai fini del secondo parziale totale si svolgano i seguenti esercizi:

- (1) (**P=14 punti, T=7 punti**) Sia X uno spazio di Banach su \mathbb{R} e sia $(T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, X')$ una successione tale che \dots per ogni $x \in X$. Provare che

(a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, X')} < +\infty$;

(b) $T \in \mathcal{L}(X, X')$ e $\|T\|_{\mathcal{L}(X, X')} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, X')} < +\infty$.

- (2) (**P=17 punti, T=9 punti**) Sia $f \in L^{p'}(0, 1)$ dove $1 < p < \infty$. Sia $T : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := \dots$$

e

$$K := \dots .$$

Dimostrare che

- (a) T è un'applicazione convessa e continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$;
 (b) se $g_n \rightarrow g$ in $L^p(0, 1)$ allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(g_n) \geq T(g)$;
 (c) K è un convesso chiuso non vuoto di $L^p(0, 1)$;
 (d) se $\|f\|_{p'} < 1$ allora $\lim_{\|g\|_p \rightarrow \infty} T(g) = +\infty$ ed esiste il $\min_{g \in K} T(g)$.

Ai fini del totale si hanno a disposizione 3 ore per svolgere tutti gli esercizi proposti.

Per il primo parziale

$$(1) T_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n b_n$$

$$S(a) := \left(\frac{a_k}{k^\alpha}\right)_{k \in \mathbb{N}},$$

$$(2) M^c := \{f \in X' : |f(x)| \leq 1 \forall x \in M\},$$

$$N^c := \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \forall f \in N\}$$

Per il secondo parziale

$$(1) T_n(x) \rightharpoonup^* T(x)$$

$$(2) T(g) := \|g\|_p - \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$K := \{g \in L^p(0, 1) : \|g\|_1 \leq 1\}.$$

Ferrara, 2.02.2021

Ai fini del totale si hanno a disposizione 3 ore per svolgere tutti gli esercizi proposti.

- (1) (**T=9 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$, sia $b := (e^{n\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $a = (a_n)_n \in \ell^p$ siano

$$T_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n e^{n\alpha}, \quad S(a) := (a_n e^{n\alpha})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti

- (a) $S(a) \in \ell^1 \forall a \in \ell^p$;
 (b) la successione $(T_k(a))_k$ converge $\forall a \in \ell^p$;
 (c) $b \in \ell^{p'}$;
 (d) $\begin{cases} \alpha < 0 & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \alpha \leq 0 & \text{se } p = 1 \end{cases}$.
- (2) (**T=6 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si definisca $T^0 = Id$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T^n := T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \rightarrow X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n T^k(x)$$

è convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

- (3) (**Secondo P=9 punti, T=4 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T \in L(X, Y)$ tale che soddisfa la seguente proprietà:
 $\forall x_0 \in X$ e $\forall (x_n)_n \subseteq X$, se $x_n \rightarrow x_0$ in X allora $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ in Y . Provare che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- (4) (**Secondo P=22 punti, T=12 punti**) Sia $f \in L^1(0, 1)$. Sia $T : L^\infty(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := \|g\|_\infty - \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right|$$

e

$$K := \{g \in L^\infty(0, 1) : \left| \int_0^1 g(x)dx \right| \leq 1, \|g\|_\infty \leq 2\}.$$

Dimostrare che

- (a) T è un'applicazione continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$;
 (b) se $g_n \xrightarrow{*} g$ in $L^\infty(0, 1)$ allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(g_n) \geq T(g)$;
 (c) K è un sottoinsieme debolmente* chiuso e non vuoto di $L^\infty(0, 1)$;
 (d) se $(g_n) \subseteq K$ allora esiste $(g_{k_n}) \subseteq (g_n)_n$ ed esiste $g_0 \in K$ tale che $g_{k_n} \xrightarrow{*} g_0$ in $L^\infty(0, 1)$;
 (e) esiste $\bar{g} \in K$ tale che $T(\bar{g}) = \min_{g \in K} T(g)$.

Secondo Parziale-Totale di Analisi Funzionale

- Predisponete la telecamera in modo che possa visualizzarvi a mezzo busto e vedere le vostre mani.
- Dovete copiare o stampare i quesiti nella pagina dopo. Il foglio contenente la traccia non dovrà essere allegato alla soluzione;
- Usate fogli completamente bianchi (nè a quadretti nè a a righe) ed una penna dal tratto deciso (no matita, no penna rossa);
- svolgete quanti più quesiti possibile; nello svolgimento di un quesito, potete utilizzare le informazioni contenute nel testo (anche se non siete riusciti a provarle);
- nella copia inviata non dovrete ricopiare le tracce dei quesiti; è sufficiente che le vostre soluzioni siano divise nei sottopunti come nella traccia del compito;
- non sarà necessario scrivere gli enunciati dei teoremi che applicate: basta il richiamo del nome del teorema che applicate;
- la consegna del compito sarà effettuata dentro classroom;
- per poter accedere all'uso dello smartphone per scannerizzare il vostro compito, sarà necessario essere autorizzati;
- durante il compito tenete a disposizione il vostro documento di identità qualora volessi vederlo (in tal caso lo mostrerete al monitor nascondendo i dati sensibili).

Ferrara, 5.02.2021

Ai fini del totale si svolgano i seguenti esercizi:

- (1) (**T=9 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$, sia $b := \dots$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $a = (a_n)_n \in \ell^p$ siano

$$T_k(a) = \dots, \quad S(a) := (\dots).$$

Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti

- (a) $\forall a \in \ell^p \ S(a) \in \ell^1$;
- (b) $\forall a \in \ell^p$ la successione $(T_k(a))_k$ converge;
- (c) $b \in \ell^{p'}$;
- (d) $\begin{cases} \alpha < 0 & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \alpha \leq 0 & \text{se } p = 1. \end{cases}$

- (2) (**T=6 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si definisca $T^0 = Id$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T^n := T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \rightarrow X$ definita da

$$S_n(x) := \dots$$

è convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

- (3) (**Secondo P= 9 punti, T=4 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T \in L(X, Y)$ tale che valga la seguente proprietà: $\forall x_0 \in X$ e $\forall (x_n)_n \subseteq X, \dots$. Provare che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- (4) (**Secondo P=22 punti, T=12 punti**) Sia $f \in L^1(0, 1)$. Sia $T : L^\infty(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := \dots$$

e

$$K := \{g \in L^\infty(0, 1) : \dots\}.$$

Dimostrare che

- (a) T è un'applicazione continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$;
- (b) se $g_n \xrightarrow{*} g$ in $L^\infty(0, 1)$ allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(g_n) \geq T(g)$;
- (c) K è un sottoinsieme debolmente* chiuso e non vuoto di $L^\infty(0, 1)$;
- (d) se $(g_n) \subseteq K$ allora esiste $(g_{k_n}) \subseteq (g_n)_n$ ed esiste $g_0 \in K$ tale che $g_{k_n} \xrightarrow{*} g_0$ in $L^\infty(0, 1)$;
- (e) esiste $\bar{g} \in K$ tale che $T(\bar{g}) = \min_{g \in K} T(g)$.

Per il totale:

(1)

$$b := (e^{n\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$$
$$T_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n e^{n\alpha}$$
$$S(a) := (a_n e^{n\alpha})_{n \in \mathbb{N}}.$$

(2)

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n T^k(x)$$

Per il secondo parziale:

(3) se $x_n \rightarrow x_0$ in X allora $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ in Y

(4)

$$T(g) := \|g\|_\infty - \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right|$$
$$K := \left\{ g \in L^\infty(0, 1) : \left| \int_0^1 g(x)dx \right| \leq 1, \|g\|_\infty \leq 2 \right\}.$$

Ferrara, 16.02.2021

Si hanno a disposizione 2 ore e 30 minuti per svolgere tutti gli esercizi proposti.

- (1) (10 punti) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ siano

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k} x_k.$$

Dimostrare che

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} T_n \in (l^p)'$ e si esprima la sua norma;
 (b) sono equivalenti i seguenti fatti:
 (i) $\forall x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_n$ converge;
 (ii) $(\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$;
 (iii) $|a| < 1$ se $p > 1$; $|a| \leq 1$ se $p = 1$.
- (2) (9 punti) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = f(x_n).$$

Provare che:

- (a) $T_n \in X''$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
 (b) se $x_n \rightarrow x_0$ in X allora $T_n \xrightarrow{*} J(x_0)$ dove J è la valutazione in x_0 ;
 (c) se X è riflessivo e se $T_n \xrightarrow{*} \xi$ in X'' allora la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente debolmente in X .
- (3) (T=12 punti) Sia $1 < p < \infty$. Sia $T : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := 2\|g\|_p - \left| \int_0^1 g(x) dx \right|$$

e

$$K := \{g \in L^p(0, 1) : \left| \int_0^1 g(x) dx \right| \leq 1, \|g\|_p \leq 2\}.$$

Dimostrare che

- (a) T è un'applicazione continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$;
 (b) se $g_n \rightarrow g$ in $L^p(0, 1)$ allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(g_n) \geq T(g)$;
 (c) se $(g_n) \subseteq K$ allora esiste $(g_{k_n}) \subseteq (g_n)_n$ ed $g_0 \in K$ tali che $g_{k_n} \rightarrow g_0$ in L^p ;
 (d) esiste $g_0 \in K$ tale che $T(g_0) = \min_{g \in K} T(g)$.

Ferrara, 16.02.2021

Si hanno a disposizione 2 ore e mezzo per svolgere tutti gli esercizi proposti.

- (1) **(10 punti)** Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) = \dots$$

Dimostrare che

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} T_n \in (l^p)'$ e si esprima la sua norma;
- (b) sono equivalenti i seguenti fatti:
 - (i) $\forall x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_n$ converge;
 - (ii) $(\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$;
 - (iii) $|a| < 1$ se $p > 1$; $|a| \leq 1$ se $p = 1$.

- (2) **(9 punti)** Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = \dots$$

Provare che:

- (a) $T_n \in X''$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (b) se $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $T_n \xrightarrow{*} J(x_0)$ dove J è la valutazione in x_0 ;
- (c) se X è riflessivo e se $T_n \xrightarrow{*} \xi$ in X'' allora la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente debolmente in X .

- (3) **(T=12 punti)** Sia $1 < p < \infty$. Sia $T : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$T(g) := \dots$$

e

$$K := \{g \in L^p(0, 1) : \dots, \|g\|_p \leq 2\}.$$

Dimostrare che

- (a) T è un'applicazione continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$;
- (b) se $g_n \rightharpoonup g$ in $L^p(0, 1)$ allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(g_n) \geq T(g)$;
- (c) se $(g_n) \subseteq K$ allora esiste $(g_{k_n}) \subseteq (g_n)_n$ ed $g_0 \in K$ tali che $g_{k_n} \rightharpoonup g_0$ in L^p ;
- (d) esiste $T(g_0) = \min_{g \in K} T(g)$.

(1)

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k} x_k.$$

(2)

$$T_n(f) = f(x_n).$$

(3)

$$T(g) := 2\|g\|_p - \left| \int_0^1 g(x) dx \right|$$

$$K := \left\{ g \in L^p(0, 1) : \left| \int_0^1 g(x) dx \right| \leq 1, \|g\|_p \leq 2 \right\}.$$

Compito totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 04.06.2020**

- (1) (**T=4x3=12 punti**) Sia $1 \leq p \leq +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) = (y_k)_k$ dove

$$y_k := \dots\dots\dots$$

Si dimostri che

- (a) $T_n \in \mathcal{L}(l^p)$ e $\|T_n\|_{\mathcal{L}(l^p)} = 1$;
 (b) se $1 \leq p < +\infty$, allora per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_n$ converge a $T(x) = \dots$ in l^p ;
 (c) se $p = +\infty$, allora per ogni $x \in c_0$ la successione $(T_n(x))_n$ converge a $T(x)$ in l^∞ .

- (2) (**T=6x3=18 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^p(0, 1)$ e

$$K_g := \dots\dots\dots$$

- (a) Provare che K_g è convesso, non vuoto e limitato in $L^p(0, 1)$.
 (b) Sia $f \in L^{p'}(0, 1)$ e per ogni $\varphi \in L^p(0, 1)$ sia

$$T(\varphi) := \dots\dots\dots$$

Provare che se $1 < p < +\infty$ allora esiste il minimo di T sull'insieme K_g ;

- (c) se $p = +\infty$ e se $(\varphi_n) \subseteq K_g$ è tale che $T(\varphi_n) \rightarrow \inf_{K_g} T$, allora esiste $(\varphi_{k_n}) \subseteq (\varphi_n)_n$ ed esiste $\varphi_0 \in K_g$ tale che $\varphi_{k_n} \xrightarrow{*} \varphi_0$ in $L^\infty(0, 1)$.

Inoltre

$$T(\varphi_0) = \dots\dots\dots$$

Compito totale di Analisi Funzionale**Ferrara, 13.09.2021**

- (1) (**T=12 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in l^p$ sia $T_n(x)$ definito da

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

- (a) Dimostrare che $T_n \in (l^p)'$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e calcolarne la norma (al variare di p);
 (b) Sia $1 \leq p < +\infty$. Si dimostri che sono equivalenti i seguenti fatti:
 (i) per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente;
 (ii) $y \in l^{p'}$.
- (2) (**T=15 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e $g \in L^p(0, 1)$. Sia

$$K_g := \{\varphi \in L^p(0, 1) : \|\varphi - g\|_p \leq 1, \|\varphi\|_p \leq \|g\|_p\}$$

e

$$T(\varphi) := \|\varphi\|_p.$$

Provare che

- (a) K_g é un insieme convesso, chiuso, non vuoto e limitato in $L^p(0, 1)$;
 (b) K_g é debolmente compatto in $L^p(0, 1)$;
 (c) T é convesso e semicontinuo inferiormente;
 (d) esiste il minimo di T sull'insieme K_g .
- (3) (**4 punti**) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $x_0 \in X$. Sia $T : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T(f) = f(x_0) \quad \forall f \in X'$$

- (a) si calcoli la norma di T ;
 (b) si provi che l'operatore $T : (X', \sigma(X', X'')) \rightarrow \mathbb{R}$ é continuo.

Ferrara, 13.09.2021

- (1) (**T=12 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in l^p$ sia $T_n(x)$ definito da

$$T_n(x) := \dots$$

- (a) Dimostrare che $T_n \in (l^p)'$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e calcolarne la norma (al variare di p);
 (b) Sia $1 \leq p < +\infty$. Si dimostri che sono equivalenti i seguenti fatti:
 (i) per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente;
 (ii) $y \in l^{p'}$.

- (2) (**T=15 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e $g \in L^p(0, 1)$. Sia

$$K_g := \dots$$

e

$$T(\varphi) := \dots$$

Provare che

- (a) K_g é un insieme convesso, chiuso, non vuoto e limitato in $L^p(0, 1)$;
 (b) K_g é debolmente compatto in $L^p(0, 1)$;
 (c) T é un convesso e semicontinuo inferiormente;
 (d) esiste il minimo di T sull'insieme K_g .
- (3) (**4 punti**) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $x_0 \in X$. Sia $T : X' \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T(f) = \dots$$

- (a) si dimostri che $T \in X'$;
 (b) si provi che $T : (X', \sigma(X', X'')) \rightarrow \mathbb{R}$ é continuo.