APPUNTI DI ANALISI FUNZIONALE
A.A. 2020-21

Francesca Prinari
Dipartimento di Matematica
Università di Ferrara

Contents

Date: Ultimo aggiornamento 30-09-2020.

Programma

(1) Richiami di topologia: base e sistema fondamentale di intorni. Spazi separati, spazi N_1, spazi N_2. Spazi separabili. Spazi compatti e spazi sequenzialmente compatti. Compattezza in spazi metrici. Funzioni continue e semicontinue. Teoremi di esistenza di minimo. (4 ore)
(2) Seminorme e norme.Topologia di uno spazio normato e convergenza. Norme equivalenti. Richiami sugli spazi vettoriali di dimensione finita: equivalenza tra norme e completezza rispetto a qualunque norma, teorema di Bolzano-Weistrass e compattezza della palla chiusa. Teorema di Riesz. (3 ore)
(3) Spazi di Banach. Esempio di norme non equivalenti. Criterio di Weirstrass per la convergenza di una serie in uno spazio di Banach. Esempi di spazi normati di dimensione infinita:
   (a) spazi di successioni c_0, c_{00}, spazi l^p;
   (b) spazi di funzioni: gli spazi C^k. Teorema di Ascoli-Arzelá (senza dimostrazione);
   (c) gli spazi L^p (richiami su disuguaglianza di Hölder e Minkoskii) (7 ore)
(4) Richiami sugli operatori lineari tra spazi normati: caratterizzazione della loro continuità. Norma di un operatore. Operatore trasposto. Completezza dello spazio degli operatori $L(X, Y)$. Duali degli spazi l^p. (5 ore)
(5) Lemma di Zorn, basi di Hamel. Teorema di Hahn-Banach (forma analitica reale). Costruzione di funzionali lineari e non continui in spazi di dimensione infinita. Estensione di operatori lineari, reali e continui definiti su sottospazi di spazi normati. Iperpiani chiusi. Forme geometriche del teorema di Hahn Banach: separazione di insiemi convessi. (8 ore)

(6) Lemma di Baire e forme equivalenti. Spazi di prima e seconda categoria. Teorema di Banach-Steinhaus. Insiemi limitati in X e in X'. Teorema dell'applicazione aperta e suoi corollari. Teorema del grafico chiuso. (9 ore)
(7) Costruzione di una topologia su un insieme X a partire da una famiglia di funzioni definite da X su spazi topologici. Topologia prodotto. Topologia debole e topologia debole*. Convergenza debole e debole*. Chiusura di un insieme convesso. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. Spazi riflessivi. Teorema di Kakutani. Spazi separabili. Spazi uniformemente convessi. (8 ore)
(8) Riflessività degli spazi di Hilbert. Teorema delle proiezioni su un convesso come applicazione del teorema di esistenza di punto di minimo. Teorema di Rietz-Frechet. Teorema di Lax-Milgram (dimostrazione nel caso simmetrico). (3 ore)
(9) Spazi L^p:dimostrazione dell' uniforme convessità nel caso $2 \leq p < +\infty$. Riflessività quando $1 < p < +\infty$. Separabilità nel caso $1 \leq p < \infty$. Duali degli spazi L^p. Teoremi di rappresentazione di Riesz (dimostrazione nel caso $p > 1$). Caratterizzazione della convergenza debole e debole*. Definizione di operatore compatto. (8 ore)
(10) Introduzione agli spazi di Sobolev: definizione e principali proprietà (completezza, riflessività se $1 < p < +\infty$, separabilità se $1 \leq p < \infty$). Convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$ per $p < \infty$ e debole* in $W^{1,\infty}(\Omega)$. Immersioni di Sobolev in dimensione 1. Spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ e immersioni di Sobolev nel caso $N > 1$. Disuguaglianza di Poincaré. Definizione di funzione armonica in senso debole e di soluzione debole dell'equazione di Poisson. Metodo degli spazi di Hilbert per la dimostrazione dell' esistenza di una soluzione debole per il problema di Dirichlet associato all' equazione di Poisson in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (8 ore).

1. **Richiami di topologia**

1.1. **Spazi topologici.**

Definizione 1.1. *Sia $X \neq \emptyset$. Una famiglia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice una* **topologia** *su X se*

(1) *$X, \emptyset \in \tau$;*
(2) *per ogni famiglia $(A_i)_{i\in I} \subseteq \tau$ vale che $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$;*
(3) *per ogni A, $B \in \tau$ vale che $A \cap B \in \tau$.*

La coppia (X, τ) si dice **spazio topologico** *e ogni insieme $A \in \tau$ si dice τ-aperto. Un insieme C si dice τ-chiuso se $X \setminus C$ é τ-aperto.*

Definizione 1.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice una* **base** *per lo spazio topologico (X, τ) se*

(i) *ogni $B \in \mathcal{B}$ é un aperto;*
(ii) *$\forall A$ aperto esiste $(B_i)_i \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_i B_i$.*

Definizione 1.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$.Un insieme $U \subseteq X$ si dice un* **intorno** *di x se esiste $A \in \tau$ tale che $x \in A \subseteq U$. Una famiglia $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice un* **sistema fondamentale di intorni di** *x se*

(i) *ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ é un intorno di x;*
(ii) *$\forall A$ aperto tale che $x \in A$ esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \subseteq A$.*

Definizione 1.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$.*

(1) *Si definisce* **chiusura di** *Y l'insieme*
$$\overline{Y} (= \overline{Y}^{\tau}) := \bigcap_{C \text{ chiuso}, Y \subseteq C} C.$$
(2) *Y si dice* **denso** *in X se $\overline{Y} = X$;*
(3) *si definisce* **interiore di** *Y l'insieme*
$$\overset{\circ}{Y} := \bigcup_{A \text{ aperto}, A \subseteq Y} A.$$

Osservazione 1.5. Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora $\overline{Y}$ é il più piccolo chiuso di X contenente Y mentre $\overset{\circ}{Y}$ é il più grande aperto di X contenuto in Y. In particolare
$$Y \text{ é chiuso} \iff Y = \bar{Y} \iff \bar{Y} \subseteq Y$$
$$Y \text{ é aperto} \iff Y = \overset{\circ}{Y} \iff Y \subseteq \overset{\circ}{Y}.$$
Inoltre

(1) $\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus Y}} = X \setminus \bar{Y}$;
(2) $\overline{X \setminus Y} = X \setminus \overset{\circ}{Y}$.

Infatti proviamo per esempio la prima:
$$\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus Y}} = \bigcup_{A \,\text{aperto}, A \subseteq X \setminus Y} A = \bigcup_{A \,\text{aperto}, Y \subseteq X \setminus A} A = \bigcup_{C \,\text{chiuso}, Y \subseteq C} X \setminus C$$
$$= X \setminus \Big(\bigcap_{C \,\text{chiuso}, Y \subseteq C} C \Big) = X \setminus \bar{Y}.$$

Esercizio 1.6. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $D \subseteq X$. Si provi che

(1) $x \in \bar{D}$ se e solo se per ogni U intorno di x vale che $U \cap D \neq \emptyset$;
(2) D é denso in X se e solo se per ogni $A \subseteq X$ aperto vale che $A \cap D \neq \emptyset$.

Definizione 1.7. *Sia $Y \subseteq X$. Un punto $x_0 \in X$ é un* **punto di accumulazione per** *Y (e scriviamo $x_0 \in D(Y)$) se $(U \cap Y) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ per ogni U intorno di x_0.*

Osservazione 1.8. *Si osservi che in generale $D(Y) \subsetneq \bar{Y}$. Per esempio $Y = [0,1] \cup \{2\}$ é tale che $2 \in \bar{Y} \setminus D(Y)$.*

Definizione 1.9. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$.Definiamo* **topologia indotta** *da X su Y la topologia τ_Y definita nel seguente modo: Aé un τ_Y-aperto se esiste un τ-aperto A' tale che $A = A' \cap Y$.*

In particolare se $C \subseteq Y$ si ha che si ha che

$$C \text{ é un } \tau_Y\text{-chiuso} \Longleftrightarrow \exists\, C' \subset X \ \tau\text{-chiuso tale che } C = C' \cap Y.$$

Esercizio 1.10. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*

(1) *se Y é τ-aperto in X e $A \subseteq Y$ allora*
$$A \text{ é un } \tau_Y\text{-aperto} \Longleftrightarrow A \text{ é un } \tau\text{-aperto};$$
(2) *se Y é τ-chiuso in X e $C \subseteq Y$ allora*
$$C \text{ é un } \tau_Y\text{-chiuso} \Longleftrightarrow C \text{ é un } \tau\text{-chiuso}.$$
(3) *se $C \subseteq Y$ si ha che $\overline{C}^{\tau_Y} = \overline{C}^{\tau} \cap Y$.*

Definizione 1.11. *Lo spazio topologico (X, τ) si dice*

(1) $\mathbf{T_1}$ *se per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$, esiste U intorno di x tale che $y \notin U$ ed esiste V intorno di y tale che $x \notin V$;*

(2) $\mathbf{T_2}$ *o* **separato** *o* **di Hausdorff** *se per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$, esiste U intorno di x ed esiste V intorno di y tale che $U \cap V = \emptyset$;*

(3) $\boldsymbol{\mathcal{N}_1}$ *se per ogni punto $x \in X$ esiste un sistema fondamentale numerabile di intorni;*

(4) $\boldsymbol{\mathcal{N}_2}$ *se ammette una base numerabile;*

(5) **separabile** *se esiste $D \subseteq X$ denso e numerabile.*

Osservazione 1.12. Si osservi che

(1) (X, τ) é uno spazio topologico T_1 se e solo se ogni punto é un chiuso;

(2) se (X, τ) é uno spazio topologico T_2 allora (X, τ) é uno spazio topologico T_1;

(3) se (X, τ) é uno spazio topologico $\mathcal{N}_2$ allora (X, τ) é uno spazio topologico $\mathcal{N}_1$ ed é separabile. Infatti basta osservare che se $\mathcal{B} = (B_n)_n$ é una base numerabile di X allora scelto $x_n \in B_n$ si ha che $D = (x_n)_n$ é denso in X.

(4) Ricordiamo che su ogni spazio metrico (X, d) si può considerare la topologia generata dalla base
$$\mathcal{B} = \{B(x_0, r) : r > 0, x_0 \in X\}$$
dove $B(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Esattamente A é aperto in (X, d) se e solo se $\forall\, x \in A$ esiste $B(x_0, r) \subseteq A$. Rispetto tale topologia ogni spazio metric0 é $\mathcal{N}_1$ e T_2.

Esercizio 1.13. Sia (X,τ) uno spazio topologico.

(1) se (X,τ) é uno spazio T_1, se $Y \subseteq X$ e $x_0 \in X$ vale che:
$$x_0 \in D(Y) \iff \forall U \text{ intorno di } x_0 \text{ l'insieme } U \cap Y \text{ ha infiniti elementi.}$$
(2) Se (X,τ) é uno spazio $\mathcal{N}_1$ allora ogni $x_0 \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{U}(x_0) = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (numerabile) tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 1.14. *Uno spazio metrico (X,d) é $\mathcal{N}_2$ se e solo se é separabile.*

Dimostrazione. Un'implicazione segue dall'osservazione 1.12(3). Per l'altra osservare che se esiste $D = (x_n)_n \subseteq X$ denso in X, allora la famiglia $\mathcal{B} := \{B(x_n, s) : x_n \in D,\ s \in \mathbb{Q}^+\}$ é una base numerabile di (X,d). Infatti osserviamo prima di tutto che per ogni $B(x_0,r) \subseteq X$ esiste $B_{x_0} \in \mathcal{B}$ tale che $x_0 \in B_{x_0} \subseteq B(x_0,r)$. Infatti scelto $x_n \in B(x_0, \frac{r}{4}) \cap D$ e $\rho \in \mathbb{Q}$ tale che $\frac{r}{4} < \rho < \frac{r}{2}$ si ha che $x_0 \in B(x_n,\rho) \subseteq B(x_0, 2\rho) \subset B(x_0,r)$. In particolare se A é un aperto e $x_0 \in A$ esiste $B_{x_0} \in \mathcal{B}$ tale che $x_0 \in B_{x_0} \subseteq A$.

1.2. **Successioni e insiemi sequenzialmente chiusi.**

Definizione 1.15. *Sia (X,τ) uno spazio topologico.*

(1) *Si dice che una successione $(x_n) \subseteq X$ τ-**converge** a $x \in X$ se $\forall U$ intorno di x esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$. Il punto x si dice **limite** di (x_n) e scriveremo $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oppure che $x_n \xrightarrow{\tau} x$.*

(2) *Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice τ-**sequenzialmente chiuso** o τ-**chiuso per successioni** se $x \in Y$ ogniqualvolta esiste una successione $(x_n) \subseteq Y$ τ-convergente a x (ossia se Y contiene i punti che sono limite di sue successioni).*

Ricordiamo che in uno spazio metrico (X,d) una successione $(x_n) \subseteq X$ é convergente a $x_0 \in X$ se e solo se
$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \text{ se } n \geq n_0 \text{ allora } d(x_n, x_0) < \epsilon.$$

Proposizione 1.16. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $(x_n)_n \subseteq X$ una successione.*

(1) *$x_n \xrightarrow{\tau} x \iff$ per ogni $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ vale che $x_{k_n} \xrightarrow{\tau} x$.*
(2) *se esiste $x \in X$ tale che da ogni sottosuccessione di $(x_n)_n$ é possibile estrarre una sottosuccessione τ-convergente a x allora (x_n) τ-converge a x.*

Dimostrazione.

(1) "$\Longrightarrow$" ovvia; "$\Longleftarrow$" per assurdo non sia vero. Allora esiste un intorno di x tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $k_n > k_{n-1} \vee n$ e $x_{k_n} \notin U$. Allora la sottosuccessione (x_{k_n}) non puó τ-convergere a x.
(2) Per assurdo non sia vero. Allora esiste un intorno di x tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $k_n > k_{n-1} \vee n$ e $x_{k_n} \notin U$. Allora la sottosuccessione (x_{k_n}) non puó avere estratte τ-convergenti a x negando la proprietà della successione (x_n). □

Osservazione 1.17. Dalla parte (1) della proposizione precedente, segue che la negazione di "$x_n \xrightarrow{\tau} x$" è "esiste una sottosuccessione estratta $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ tale che $x_{k_n} \overset{\tau}{\not\to} x$."

Proposizione 1.18. *Sia X uno spazio topologico. Se X è T_2, ogni successione τ-convergente ha un unico punto limite.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che una successione ammetta due limiti distinti x, y. Allora esistono due τ-intorni di x e y che sono disgiunti contro il fatto che devono contenere una coda della successione. □

Proposizione 1.19. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*

(1) *se $x_0 \in X$ é tale che $\exists\,(x_n) \subseteq Y$ per cui $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$ allora $x_0 \in \bar{Y}$;*
(2) *Y é chiuso $\implies Y$ é sequenzialmente chiuso;*
(3) *se X é $\mathcal{N}_1$ allora*
$$x_0 \in \bar{Y} \iff \exists\,(x_n) \subseteq Y \text{ tale che } x_n \xrightarrow{\tau} x_0.$$
(4) *se X é $\mathcal{N}_1$ allora Y é chiuso $\iff Y$ é sequenzialmente chiuso;*
(5) *se X é $\mathcal{N}_1$ allora Y é denso in $X \iff \forall\, x_0 \in X\ \exists\,(x_n) \subseteq Y$ tale che $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$.*

Dimostrazione.

(1) Sia U intorno di x_0. Proviamo che $U \cap Y \neq \emptyset$. Infatti, dalla definizione di limite, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi $x_n \in Y \cap U$ per ogni $n \geq n_0$.
(2) Poiché $Y = \bar{Y}$, dalla (1) segue che Y contiene i limiti delle sue successioni; ossia Y é sequenzialmente chiuso;
(3) "$\Longleftarrow$" segue dal punto (2); "$\Longrightarrow$" Sia $x_0 \in \bar{Y}$ e sia $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $U_n \cap Y \neq \emptyset$, allora esiste $x_n \in U_n \cap Y$. Si dimostra facilmente che $x_n \to x_0$. Infatti sia U intorno di x_0. Allora esiste $n_0 \in N$ tale $U_{n_0} \subseteq U$. In particolare $x_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq U$ per ogni $n \geq n_0$.
(4) Tenendo presente il punto (2), resta da provare solo l'implicazione "$\Longleftarrow$". Sia Y sequenzialmente chiuso e sia $x_0 \in \bar{Y}$. Dimostriamo che $x_0 \in Y$. Applicando il punto (3), sappiamo che esiste $(x_n) \subset Y$ tale che $x_n \to x_0$. Dal fatto che Y é sequenzialmente chiuso segue che $x_0 \in Y$. Quindi $\bar{Y} \subseteq Y$ e quindi segue che Y é chiuso.
(5) Applicando il punto (3), segue che
$$Y \text{ é denso in } X \iff X = \bar{Y} \iff \forall\, x_0 \in X\ \exists\,(x_n) \subseteq Y \text{ tale che } x_n \xrightarrow{\tau} x_0.$$

□

1.3. **Limite inferiore e superiore di una successione reale.** Richiamiamo infine il concetto di limite inferiore e superiore di una successione reale. Sia $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $b_n := \inf_{k\geq n} a_k$. Tale successione è monotona crescente. Quindi esiste $\lim_n b_n = \sup_n b_n$. Definiamo
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$
Analogamente la successione (c_n), definita come $c_n := \sup_{k\geq n} a_k$, è monotona decrescente. Quindi esiste $\lim_n c_n = \inf_n c_n$. Definiamo
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Osservazione 1.20. Ricordiamo le seguenti proprietà del liminf e del limsup di successioni $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$:

(1) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$
(2) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$;
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ se e solo se per ogni sottosuccessione (a_{k_n}) $\lim_{n\to\infty}(a_{k_n}) = a$;
(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ se e solo se $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$.

1.4. **Spazi topologici compatti e sequenzialmente compatti.**

Definizione 1.21. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*

(1) *(X,τ) si dice* **compatto** *se da ogni ricoprimento di aperti di X si può estrarre un ricoprimento finito, ossia se $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ con A_i aperto per ogni $i \in I$ allora esiste $F \subseteq I$ finito tale che $X = \bigcup_{i\in F} A_i$.*

(2) *Y si dice* **compatto** *in X se (Y, τ_Y) é compatto; equivalentemente se ogni qualvolta $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ con A_i τ-aperto per ogni $i \in I$ allora esiste $F \subseteq I$ finito tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i$;*
(3) *Y si dice* **precompatto** *o* **relativamente compatto** *in X se $\overline{Y}^{\tau}$ é compatto in X.*

In modo molto semplice segue che

Proposizione 1.22. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Allora X é compatto se e solo per ogni famiglia $(C_i)_{i \in I}$ di chiusi di X tale che $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$ esiste $F \subseteq I$ finito tale che $\bigcap_{i \in F} C_i = \emptyset$.*

Vale che:

Proposizione 1.23. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*
(1) *se (X, τ) è $\mathbf{T_2}$ e se Y è compatto in X allora Y é chiuso;*
(2) *se (X, τ) è $\mathbf{T_2}$ allora*
$$Y \text{ è compatto in } X \iff Y \text{ è chiuso e relativamente compatto;}$$
(3) *se (X, τ) è compatto, allora $Y \subseteq X$ chiuso $\Longrightarrow Y$ compatto.*

Dimostrazione.
(1) Sia $A := Y^c$. Dimostriamo che A é aperto. Se $x \in A$ allora per ogni $y \in Y$ esiste $U_{x,y}$ intorno aperto di x e U_y intorno aperto di y tali che $U_{x,y} \cap U_y = \emptyset$. Poiché Y é compatto e $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} U_y$, esistono $y_1, y_2, \cdots, y_k$ tali che $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i}$. È facile dimostrare che $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{x,y_i}$ é un intorno di x contenuto in A: infatti
$$Y \cap U = (\bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i}) \cap U = \bigcup_{i=1}^{k} (U_{y_i} \cap U) = \emptyset;$$
(2) segue dal punto precedente;
(3) per dimostrare la compattezza di (Y, τ_Y), applichiamo la Proposizione 1.22. Sia $(C_i)_{i \in I}$ una famiglia di chiusi di (Y, τ_Y) tale che $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$. Allora, grazie all'Esercizio 1.10, si ha che $(C_i)_{i \in I}$ é una famiglia di chiusi in (X, τ). Grazie alla "$\Longrightarrow$" della Proposizione 1.22 (applicata allo spazio compatto (X, τ)), segue che esiste $F \subseteq I$ finito tale che $\bigcap_{i \in F} C_i = \emptyset$. Applicando ora la "$\Longleftarrow$" della Proposizione 1.22 (applicata allo spazio (Y, τ_Y)), segue che (Y, τ_Y) è compatto.

Definizione 1.24. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*
(1) *X si dice* **sequenzialmente compatto** *se ogni successione $(x_n) \subseteq X$ ammette una sottosuccessione estratta τ-convergente ad un punto $x_0 \in X$;*
(2) *Y si dice* **sequenzialmente compatto** *in X se ogni successione $(y_n) \subseteq Y$ ammette una sottosuccessione estratta τ-convergente ad un punto $y_0 \in Y$;*
(3) *Y si dice* **sequenzialmente precompatto** *in X se ogni successione $(y_n) \subseteq Y$ ammette una sottosuccessione estratta τ-convergente ad un punto $x_0 \in X$.*

Proposizione 1.25. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*
(1) *se (X, τ) è $\mathbf{T_2}$ e se Y é seq. compatto in X allora Y é seq.chiuso;*
(2) *se (X, τ) è seq. compatto, allora*
$$Y \text{ seq. chiuso in } X \Longrightarrow Y \text{ seq. compatto.}$$

Dimostrazione.
(1) Sia $(y_n) \subseteq Y$ tale che (y_n) converga a x_0. Dimostriamo che $x_0 \in Y$. Essendo Y sequenzialmente compatto, esiste $(y_{k_n}) \subseteq (y_n)$ convergente a un punto $y_0 \in Y$. Poichè vale anche che $y_{k_n} \to x_0$, dall'unicità del limite, segue che $x_0 = y_0 \in Y$;

(2) per esercizio.

□

Esempio 1.26. In generale la compattezza non implica la sequenziale compattezza. Sia infatti $X := \{f : [0,1] \to [0,1]\} = [0,1]^{[0,1]}$. Dal teorema di Tyconoff si ha che X (munito della topologia prodotto, vedi Esempio 1.48) é compatto come prodotto di spazi compatti, ma non é sequenzialmente compatto. Infatti se f_n é la funzione che sugli intervalli $[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n}]$ va da 0 a 1 linearmente, vale che la successione $(f_n)_n$ non converge puntualmente.

Teorema 1.27. *Sia (X, τ) uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{N}_1$. Allora*

$$X \text{ é compatto} \implies X \text{ é sequenzialmente compatto.}$$

(vedi dimostrazione del Corollario 1.61).

Teorema 1.28. *Sia (X, τ) uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{N}_2$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *X é sequenzialmente compatto;*
(ii) *X é compatto.*

(vedi dimostrazione del Corollario 1.62).

La seguente proposizione garantisce che ogni spazio metrico compatto o sequenzialmente compatto é separabile.

Proposizione 1.29. *Se (X, d) é uno spazio metrico compatto o sequenzialmente compatto allora X é separabile (e quindi $\mathcal{N}_\mathbf{2}$).*

(vedi dimostrazione Proposizione 8.6).

Osservazione 1.30. Il viceversa é falso. $\mathbb{R}$ é separabile ma non compatto.

Corollario 1.31. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora X é compatto se e solo se é sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Applicando la Proposizione 1.29 vale che se X é compatto o sequenzialmente compatto, allora X é uno spazio $\mathcal{N}_\mathbf{2}$ e quindi, per la Proposizione 1.14, X è $\mathcal{N}_\mathbf{2}$. Quindi basta applicare il Teorema 1.28. □

1.5. **Schema riassuntivo.** Sia (X, τ) spazio topologico e $Y \subseteq X$.

(1) X é $T_2 \implies X$ é T_1;

(2) X é $\mathcal{N}_2 \implies X$ é $\mathcal{N}_1$ e separabile;

(3) Y é chiuso $\implies Y$ é sequenzialmente chiuso;

(4) X é compatto e Y é chiuso $\implies Y$ é compatto;

(5) X é T_2 e Y é compatto $\implies Y$ é chiuso;

(6) se X é T_2 e Y é seq. compatto $\implies Y$ é seq. chiuso;

(7) X é T_1 e $\mathcal{N}_2$, allora X é compatto $\iff X$ é seq. compatto;

Sia (X, d) spazio metrico e $Y \subseteq X$.
Allora

(1) X é T_2 ed $\mathcal{N}_1$;

(2) X é $\mathcal{N}_2 \iff X$ é separabile;

(3) Y é chiuso $\iff Y$ é sequenzialmente chiuso;

(4) X compatto o sequenzialmente compatto $\implies X$ separabile (e quindi $\mathcal{N}_2$);

(5) Y é compatto $\iff Y$ é seq. compatto.

1.6. **Limiti di funzioni, funzioni continue e semicontinue.**

Definizione 1.32. *Siano (X,τ), (Y,σ) due spazi topologici. Sia $f : A \subseteq X \to Y$ una funzione e siano $x_0 \in D(A), y_0 \in Y$. Diremo che*

$$\lim_{x\in A, x\to x_0} f(x) = y_0$$

se per ogni σ-intorno V di y_0 in Y esiste U τ-intorno di x_0 in X tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$.

Definizione 1.33. *Siano (X,τ), (Y,σ) due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Diremo che*

(1) *f é* **continua in** *$x_0 \in X$ (rispetto le topologie fissate) se per ogni σ-intorno V di $f(x_0)$ in Y esiste U τ-intorno di x_0 in X tale che $f(U) \subseteq V$;*

(2) *f é* **continua** *(e scriveremo "$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ continua") se f é continua in tutti i punti di X.*

In particolare si ha che

$$f \text{ é continua in } x_0 \in X \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Proposizione 1.34. *Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora sono equivalenti*

(1) *$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ è continua;*
(2) *per ogni $A \subset Y$ σ-aperto vale che $f^{-1}(A)$ é τ-aperto di X;*
(3) *per ogni $C \subset Y$ σ-chiuso vale che $f^{-1}(C)$ é τ-chiuso di X.*

Inoltre se X é τ-compatto e $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ è continua, allora $f(X)$ é σ-compatto in Y.

Dimostrazione. Proviamo solo l'ultima parte. Se $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ con $A_i \subseteq Y$ σ-aperto segue che $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$. Essendo $f^{-1}(A_i)$ τ-aperto per ogni $i \in I$ (essendo f continua) ed essendo X compatto, esiste $F \subset I$ finito tale che $X = \bigcup_{i\in F} f^{-1}(A_i)$. Segue che $f(X) \subseteq \bigcup_{i\in F} A_i$. □

Definizione 1.35. *Siano (X,τ), (Y,σ) due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Diremo che*

(1) *f é* **sequenzialmente continua in** *$x_0 \in X$ se per ogni successione $(x_n) \subseteq X$ τ-convergente a x_0 si ha che la successione $(f(x_n))$ σ-converge a $f(x_0)$;*

(2) *f é* **sequenzialmente continua** *(e scriveremo "$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ sequenzialmente continua") se f é sequenzialmente continua in tutti i punti di X.*

Teorema 1.36 (Teorema ponte). *Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora*

(1) *se f é continua allora f é sequenzialmente continua;*
(2) *se X é $\mathcal{N}_1$, allora f é continua $\Longleftrightarrow$ f é sequenzialmente continua.*

Dimostrazione.

(1) Sia $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$ e sia V un σ-intorno di y_0 in Y. Poiché Poiché f è continua in x_0 allora esiste U τ-intorno di x_0 in X tale che $f(U) \subseteq V$. Poiché $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$. Allora $\forall n \geq n_0$ vale che $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$.
(2) Resta da provare "$\Longleftarrow$". Sia X spazio $\mathcal{N}_1$. Per assurdo sia $x_0 \in X$ un punto in cui f non è continua: quindi esiste x_0 ed esiste V un σ-intorno di $f(x_0)$ in Y tale che $\forall U$ τ-intorno di x_0 in X esiste $x \in U$ tale che $f(x) \notin V$. Sia $\mathcal{U}(x_0) = (U_n)$ un sistema fondamentale di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in U_n$ tale che $f(x_n) \notin V$. Allora $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$ e $f(x_n) \overset{\sigma}{\not\to} f(x_0)$. □

Osservazione 1.37 (**Teorema ponte**). *Con dimostrazione analoga alla precedente, si dimostra che se X è $\mathcal{N}_1$ e $\mathbf{T_1}$ e $f : A \subseteq X \to Y$ una funzione, $x_0 \in D(A), y_0 \in Y$, allora*

$$\lim_{x \in A, x \to x_0} f(x) = y_0 \Longleftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A \setminus \{x_0\} \text{ tale che } x_n \xrightarrow{\tau} x_0 \text{ tale che } f(x_n) \xrightarrow{\sigma} y_0.$$

La proprietà $\mathbf{T_1}$ serve nell'implicazione "$\Longleftarrow$" per trovare, procedendo per assurdo, un punto $x_n \in U_n \cap A \setminus \{x_0\}$ dove (U_n) è un sistema fondamentale numerabile di intorni di x_0 in X (cfr Osservazione 1.13). In particolare tale caratterizzazione vale negli spazi metrici.

Un'altra proprietà utile nel prosieguo è la seguente:

Proposizione 1.38. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici e siano $f, g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ due applicazioni continue. Supponiamo che esista $D \subset X$ denso in X tale che $f = g$ su D e che Y sia $\mathbf{T_2}$. Allora $f = g$ su X.*

Dimostrazione. Sia $C := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Si prova che esso è un chiuso (si provi che $X \setminus C$ è aperto). Poichè $D \subseteq C$ vale che $X = \bar{D} \subseteq \bar{C} = C$ ossia $C = X$.

Esempio 1.39. *La funzione $f(x) = \sin x$ non ha limite per $x \to +\infty$. Infatti se per assurdo esistesse $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ allora per ogni successione $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ tale che $x_n \to +\infty$ deve valere $f(x_n) \to \ell$. Basta scegliere $x_n = 2\pi n$ e $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ per ottenere che $f(x_n) \to 0$ mentre $f(y_n) \to 1$.*

1.7. **Funzioni semicontinue.**

Definizione 1.40. *Una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ si dice τ-**semicontinua inferiormente** (in breve τ-s.c.i.) su X se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ vale che*

$$E_\alpha = \left\{ x \in X \ : \ f(x) \leq \alpha \right\} \text{ é } \tau\text{-chiuso}$$

*Una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ si dice τ-**semicontinua superiormente** in X se -f é τ-semicontinua inferiormente.*

Si prova facilmente che

$$f : X \to \bar{\mathbb{R}} \ \tau\text{-s.c.i.} \Longleftrightarrow f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x) \quad \forall x_0 \in X$$

dove ricordiamo che

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) := \sup_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \inf_{y \in U - \{x_0\}} f(y).$$

Esempio 1.41.
$$f(x)=\begin{cases}0 & se\ x\le 0\\ 1 & se\ x>0\end{cases}$$
é semicontinua inferiormente ma non continua. Infatti
$$E_\alpha=\{x\in X\ :\ f(x)\le\alpha\}=\begin{cases}\emptyset & se\ \alpha<0\\ (-\infty,0] & se\ 0\le\alpha<1\\ \mathbb{R} & se\ \alpha\ge 1\end{cases}.$$

Definizione 1.42. *Una funzione $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$ si dice* τ-**sequenzialmente-semicontinua inferiormente** *se per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ il sottolivello $E_\alpha=\{x\in X\ :\ f(x)\le\alpha\}$ é τ-chiuso per successioni. Una funzione $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$ si dice* τ-**sequenzialmente semicontinua superiormente** *in X se $-f$ é τ-sequenzialmente semicontinua inferiormente.*

Si prova facilmente che
$$f:X\to\bar{\mathbb{R}}\ \tau\text{-seq. s.c.i.}\iff\forall x_0\in X\text{e per ogni } x_n\xrightarrow{\tau}x_0\ \text{ vale } f(x_0)\le\liminf_{n\to\infty}f(x_n)$$
dove ricordiamo che
$$\liminf_{n\to\infty}f(x_n)=\sup_n\inf_{k\ge n}f(x_n).$$
Dalla Proposizione 1.19 segue che,
$$f\quad\tau\text{-s.c.i.}\Longrightarrow f\ \tau\text{-seq. s.c.i.}$$
e se lo spazio X è $\mathcal{N}_1$ allora
$$f\quad\tau\text{-s.c.i.}\iff f\ \tau\text{-seq. s.c.i..}$$

Osservazione 1.43. *È ovvio che ogni funzione $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$ τ-continua è τ-semicontinua inferiormente e superiormente.*

1.8. **Costruzione di topologie.** In quest'ultima sezione richiamiamo prima di tutto come sia possibile generare una topologia su un insieme X a partire da una famiglia di suoi sottoinsiemi.

Teorema 1.44. *Sia $X\ne\emptyset$ e sia $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ tale che*
(i) $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B$;
(ii) $\forall B_1,B_2\in\mathcal{B}$ *e* $\forall x\in B_1\cap B_2$ *esiste* $B_3\in\mathcal{B}$ *tale che* $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$.

Allora esiste su X un'unica topologia τ tale che $\mathcal{B}$ é una base per (X,τ). Inoltre tale topologia τ é definita come
$$\tau:=\{\cup_{i\in I}B_i : B_i\in\mathcal{B},\ I\ qualunque\}.$$

Introduciamo ora la sequente relazione di equivalenza tra topologie su uno stesso insieme.

Definizione 1.45. *Siano τ, σ due topologie su uno stesso insieme $X\ne\emptyset$. Diciamo che la topologia σ é* **meno fine** *della topologia τ (e scriveremo $\sigma\prec\tau$) se ogni σ-aperto é τ-aperto.*

Osserviamo che se $\sigma\prec\tau$ e (Z,ρ) un altro spazio topologico allora
- ogni σ-chiuso é τ-chiuso.
- se $(x_n)_n\subseteq X$ τ-converge a $x\in X$ allora $(x_n)_n$ σ-converge a $x\in X$;
- se $f:(X,\sigma)\to(Z,\rho)$ é una funzione continua allora $f:(X,\tau)\to(Z,\rho)$ é una funzione continua,
- se $f:(Z,\rho)\to(X,\tau)$ é una funzione continua allora $f:(Z,\rho)\to(X,\sigma)$ é una funzione continua.

Sia ora $X \neq \emptyset$, siano $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici assegnati e sia $(\varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di funzioni con $\varphi_i : X \to Y_i$. Applichiamo il Teorema 1.44 per costruire su X una topologia σ che renda continue le assegnate funzioni $\varphi_i : (X, \sigma) \to (Y_i, \tau_i)$. Tale topologia σ deve infatti contenere le immagini inverse di aperti, ossia per ogni $V_i \in \tau_i$ deve valere che $\varphi_i^{-1}(V_i) \in \sigma$. Inoltre anche le intersezioni finite di sottoinsiemi del tipo $\varphi_i^{-1}(V_i)$ devono stare in σ. Quindi definiamo

$$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i) : \; V_i \in \tau_i \}.$$

Questa famiglia di insiemi verifica le proprietà (i) e (ii) del Teorema 1.44. Pertanto esiste una topologia su X che ha $\mathcal{B}$ come base. Gli aperti di questa topologia sono della forma

$$\bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i)$$

con V_i τ_i-aperto.

Inoltre é facile verificare che **questa topologia é meno fine di ogni altra topologia τ che renda continue le applicazioni** $\varphi_i : (X, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ ossia se τ é un'altra topologia su X rispetto la quale le applicazioni $\varphi_i : (X, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ sono continue allora ogni σ-aperto é anche τ-aperto.

Valgono poi la seguenti proposizioni:

Proposizione 1.46. *Sia* $(x_n) \subseteq X$. *Allora*

$$(x_n) \ \sigma\text{-}converge\ a\ x_0 \in X \iff (\varphi_i(x_n))_n \ \tau_i\text{-}converge\ a\ \varphi_i(x_0)\ \forall\, i \in I.$$

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" Poiché $\varphi_i : (X, \sigma) \to (Y_i, \tau_i)$ é continua allora é sequenzialmente continua. Quindi la tesi.

"$\Longleftarrow$" Sia U un σ-intorno di x_0. Per semplicità possiamo assumere $U = \bigcap_{i\in F} \varphi_i^{-1}(V_i)$ con V_i τ_i-aperto e F un sottoinsieme finito di I. Fissiamo $i \in F$. Poiché $x_0 \in U$, allora l'aperto V_i contiene $\varphi_i(x_0)$. Poiché per ipotesi la successione $\varphi_i(x_0)$ τ_i-converge a $\varphi_i(x_0)$, deve esistere $N_i \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N_i$ $\varphi_i(x_n) \in V_i$. Scelto allora $N = \max_{i\in F} N_i$ si ha che $\varphi_i(x_n) \in V_i$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $i \in F$. Quindi $x_n \in \bigcap_{i\in F} \varphi^{-1}(V_i) = U$ per ogni $n \geq N$. □

Proposizione 1.47. *Sia* (Z, τ) *uno spazio topologico e* $f : Z \to X$ *una funzione. Allora* $f : (Z, \tau) \to (X, \sigma)$ *é continua* $\iff$ *per ogni* $i \in I$ *la funzione* $\varphi_i \circ f : (Z, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ *é continua.*

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" ovvia.

"$\Longleftarrow$" Sia $U \subseteq X$ un σ-aperto. Dobbiamo provare che $f^{-1}(U)$ é un τ-aperto di Z. Ora U é della forma $U = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i)$ con V_i τ_i-aperto. Quindi

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} f^{-1}(\varphi_i^{-1}(V_i)) = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} (\varphi_i \circ f)^{-1}(V_i)$$

dove gli insiemi $(\varphi_i \circ f)^{-1}(V_i)$ sono aperti essendo le funzioni $\varphi_i \circ f : (Z, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ continue per ogni i. Segue quindi la tesi. □

Esempio 1.48. (La topologia prodotto) Sia $X = \prod_{i\in I} Y_i$ dove $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ é una famiglia di spazi topologici assegnati e sia $(\pi_j)_{j\in I}$ la famiglia di funzioni (dette **proiezioni**) $\pi_j : X \to Y_j$ definita da

$$\pi_j((y_i)_i) = y_j.$$

Allora la topologia Π meno fine su X che rende continue le proiezioni $(\pi_j)_j$ é detta **topologia prodotto** su X. Inoltre dalle Proposizioni 1.46 e 1.47 segue che

- se $(x_n)_n \subseteq X$ allora
$$(x_n)_n \ \Pi\text{-converge a } x \iff (\pi_i(x_n))_n \ \tau_i\text{-converge a } \pi_i(x) \text{ in } Y_i \ \forall i \in I.$$
In particolare se $x_n = (y_i^n)_{i\in I}$ e $x = (y_i)_{i\in I}$ allora
$$(x_n)_n \ \Pi\text{-converge a } x \iff (y_n^i)_n \ \tau_i\text{-converge a } y_i \ \forall i \in I.$$
- se (Z, τ) é uno spazio topologico e $f : Z \to X$ una funzione definita da $f(z) = (f_i(z))$ dove $f_i : Z \to Y_i$ allora
$$f : (Z, \tau) \to (X, \Pi) \text{ é continua } \iff f_i : (Z, \tau) \to (Y_i, \tau_i) \text{ é continua } \forall i \in I.$$

1.9. **Teorema di Weirstrass.**

Teorema 1.49 (di Weirstrass generalizzato, versione topologica). *Sia (X, τ) uno spazio topologico $\mathbf{T_2}$ e sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$, $f \not\equiv +\infty$, tale che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ il sottolivello*
$$\{x \in X : f(x) \le \alpha\}$$
sia τ-compatto. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \min_X f(x) (\in \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia $(\alpha_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha_n > \inf_X f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, decrescente e tale che $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \inf_X f(x) (< +\infty)$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ il sottolivello
$$K_n = \{x \in X : f(x) \le \alpha_n\}$$
è non vuoto: infatti fisso $n \in \mathbb{N}$ e sia $\epsilon := \alpha_n - \inf_X f > 0$. Allora, dalla proprietà dell'inf, esiste $x \in X$ tale che $f(x) < \inf_X f + \epsilon = \alpha_n$, ossia $x \in K_n$. Inoltre K_n è compatto e quindi chiuso e $K_{n+1} \subseteq K_n \subseteq K_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. In particolare $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$ (altrimenti, essendo K_1 compatto, esisterebbe $F \subseteq \mathbb{N}$ finito tale che $K_{maxF} = \bigcap_{n\in F} K_n = \emptyset$. Assurdo). Sia $x_0 \in \bigcap_n K_n$. Allora $f(x_0) \le \alpha_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi
$$f(x_0) \le \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \inf_X f(x) \le f(x_0)$$
ossia $-\infty < f(x_0) = \inf_X f(x) < +\infty$ da cui segue che $f(x_0) = \min_X f(x) \in \mathbb{R}$. □

Corollario 1.50. *Se (X, τ) é uno spazio topologico compatto e $\mathbf{T_2}$ ed $f : X \to]-\infty, +\infty]$, $f \not\equiv +\infty$, é una funzione τ-s.c.i. allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \min_X f(x) (\in \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Basta osservare che i sottolivelli di f sono τ-chiusi e, essendo X compatto, sono τ-compatti. □

Definizione 1.51. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ si dice* **coerciva** *se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il sottolivello*
$$E_\alpha := \{x \in X : f(x) \le \alpha\}$$
é relativamente compatto (ossia $\bar{E}_\alpha^\tau$ è compatto in X per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$).

Esercizio 1.52. *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Allora*
$$f \text{ è coerciva} \iff E_\alpha \text{è limitato } \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \iff \lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrazione. Proviamo la seconda equivalenza. Supponiamo che E_α è limitato $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e, per assurdo, non vale $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty$. Allora esiste una successione (x_n) tale che $||x_n|| \to +\infty$ e $(f(x_n))_n$ è limitata, ossia esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_n) \le \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $(x_n) \subseteq E_\alpha$. Assurdo.

Viceversa, se $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty$ e se esistesse un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che E_α è illimitato, allora esisterebbe $(x_n) \subseteq E_\alpha$ successione illimitata, ossia tale che $||x_n|| \to +\infty$. Allora, dall'ipotesi, $f(x_n) \to +\infty$. Assurdo in quanto $f(x_n) \le \alpha$. □

Tenendo presente che se X è $\mathbf{T_2}$ allora

$$E_\alpha \text{ è } \tau\text{-compatto in } X\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \iff f \text{ è } \tau\text{-s.c.i. e } \tau\text{-coerciva},$$

possiamo dare le seguente formulazione equivalente del teorema di Weirstrass:

Teorema 1.53. *Sia (X,τ) uno spazio topologico $\mathbf{T_2}$ e sia $f : X \to]-\infty,+\infty]$, $f \not\equiv +\infty$, una funzione τ-s.c.i. e τ-coerciva. Allora esiste $x_0\in X$ tale che $f(x_0)=\min_X f(x))(\in\mathbb{R})$.*

Esercizio 1.54. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e $C\subseteq X$ τ-chiuso.*

(1) *Sia $f : C\to\bar{\mathbb{R}}$, una funzione τ_C-s.c.i.. Provare che la funzione $\tilde f : X\to\bar{\mathbb{R}}$ definita come*

$$\tilde f(x) := \begin{cases} f(x) & \textit{if } x\in C\\ +\infty & \textit{altrimenti}\end{cases}$$

è τ-s.c.i..

(2) *Sia $f : X\to\bar{\mathbb{R}}$, una funzione τ-s.c.i.. Si provi che la sua restrizione $f_{|C}$ su C è τ_C-s.c.i..*

(3) *Sia $K\subseteq C\subseteq X$. Allora*

$$K \textit{ è } \tau_C\textit{-compatto se e solo se } K \textit{ è } \tau\textit{-compatto.}$$

(per l'ultima parte usare la Proposizione 1.22).

Esercizio 1.55. *Sia $C\subseteq\mathbb{R}^N$ un chiuso e sia $f : C\to]-\infty,+\infty]$, $f\not\equiv+\infty$, una funzione semicontinua inferiormente. Se C non è limitato assumiamo l'ipotesi che*

$$\lim_{||x||\to\infty, x\in C} f(x) = +\infty.$$

Allora esiste $x_0\in C$ tale che $f(x_0)=\min_C f(x)(\in\mathbb{R})$.

Teorema 1.56 (di Weirstrass generalizzato, versione sequenziale). *Sia (X,τ) uno spazio topologico $\mathbf{T_2}$ e sia $f : X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $f\not\equiv+\infty$, tale che $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ il sottolivello $\{x\in X : f(x)\le\alpha\}$ è seq. compatto. Allora esiste $x_0\in X$ tale che $f(x_0)=\min_X f(x)(\in\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Sia $(\alpha_n)_n\subseteq\mathbb{R}$, $\alpha_n>\inf_X f(x)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, decrescente e tale che $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \inf_X f(x)(<+\infty)$. Allora per ogni $n\in\mathbb{N}$ il sottolivello

$$K_n = \{x\in X : f(x)\le\alpha_n\}$$

è non vuoto: infatti fisso $n\in\mathbb{N}$ e sia $\epsilon := \alpha_n - \inf_X f > 0$. Allora, dalla proprietà dell'inf, esiste $x\in X$ tale che $f(x) < \inf_X f + \epsilon = \alpha_n$, ossia $x\in K_n$. Inoltre i sottolivelli K_n sono seq. compatti e quindi seq. chiusi e $K_{n+1}\subseteq K_n\subseteq K_1$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Per ogni n sia $x_n\in K_n$. Osserviamo che $x_p\in K_n$ per ogni $p\ge n$ poiché $K_{j+1}\subseteq K_j$ $\forall j\in\mathbb{N}$. Poiché tutta la successione $(x_n)_n\subseteq K_1$ esiste una sottosuccessione (x_{p_n}) estratta da $(x_n)_n$ ed esiste $x_0\in K_1$ tale che x_{p_n} τ-converge a x_0.
Osserviamo che per ogni $m\in\mathbb{N}$ vale che $x_{p_n}\in K_{p_n}\subseteq K_m$ per $n\ge m$ (in quanto $p_n\ge n\ge m$) ed essendo K_m seq. chiuso, otteniamo che $x_0\in K_m$ $\forall m\in\mathbb{N}$ ossia $f(x_0)\le\alpha_m$ $\forall m\in\mathbb{N}$. Passando al limite per $m\to\infty$ otteniamo

$$f(x_0)\le\inf_X f(x)\le f(x_0)$$

ossia $f(x_0)=\min_X f(x)(\in\mathbb{R})$. □

Corollario 1.57. *Sia (X,τ) uno spazio topologico seq. compatto. Sia $f : X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $f\not\equiv+\infty$, una funzione seq. s.c.i.. Allora esiste $x_0\in X$ tale che $f(x_0)=\min_X f(x)(\in\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Diamo due dimostrazioni:

(1) Essendo f seq. s.c.i., i suoi sottolivelli sono seq. chiusi in uno spazio seq. compatto. Quindi essi stessi sono seq. compatti e si applica il Teorema 1.56.

(2)(**Metodo diretto del calcolo delle variazioni**)

(1) [**Successione minimizzante**] Sia $(x_n)_n \subseteq X$ una successione minimizzante ossia tale che $f(x_n) \to \inf_X f(x) (< +\infty)$.
(2) [**estrazione di una sottosuccessione convergente per compattezza**] Essendo X τ-seq. compatto, esiste una sottosuccessione (x_{k_n}) estratta da $(x_n)_n$ ed esiste $x_0 \in X$ tale che x_{k_n} τ-converge a x_0.
(3) [**Passaggio al limite per s.c.i.**] Essendo f seq. s.c.i. otteniamo che

$$-\infty < f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n) = \inf_X f(x)$$

ossia abbiamo trovato $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \min_X f(x) (\in \mathbb{R})$. □

Esercizio 1.58. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso e sia $f : C \to]-\infty, +\infty]$, $f \not\equiv +\infty$, una funzione semicontinua inferiormente. Se C non è limitato assumiamo l'ipotesi che*

$$\lim_{||x|| \to \infty, x \in C} f(x) = +\infty.$$

Allora esiste $x_0 \in C$ tale che $f(x_0) = \min_C f(x) (\in \mathbb{R})$.

Dimostrazione. (usare per esempio il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni).

Verso la fine del corso, daremo una generalizzazione di questo teorema, con l'ipotesi che C è un **convesso**, chiuso di uno spazio X riflessivo e f una funzione **convessa**, s.c.i. e coerciva.

1.10. **Appendice al Capitolo 1: compattezza in spazi metrici.** Al fine di provare che negli spazi metrici la compattezza e la sequenziale compattezza si equivalgono, dimostriamo il seguente risultato preliminare.

Teorema 1.59. *Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto o sequenzialmente compatto. Allora X soddisfa la seguente proprietà* **(W)**:
ogni sottoinsieme infinito di punti di X ammette almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq X$ infinito.
I caso: sia X sequenzialmente compatto. Poiché Y é infinito, esiste una successione di punti tutti distinti $(x_n)_n \subseteq Y$. Per la sequenziale compattezza esiste $x_0 \in X$ ed esiste $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ estratta convergente a x_0 in X. È facile provare che x_0 é un punto di accumulazione di Y.
II caso: sia X compatto. Se per assurdo $D(Y) = \emptyset$ allora per ogni $x \in X$ esiste U_x intorno di x tale che $Y \cap U_x - \{x\} = \emptyset$. Poiché $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, dalla compattezza di X segue che esistono $x_1, \cdots, x_n$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. In particolare $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Quindi $Y \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$. Assurdo. □

Teorema 1.60. *Sia (X, τ) uno spazio topologico T_1.*
(1) *Se (X, τ) é $\mathcal{N}_1$, allora X é sequenzialmente compatto $\iff$ X soddisfa* **(W)**;
(2) *Se (X, τ) é $\mathcal{N}_2$, allora X é compatto $\iff$ X soddisfa* **(W)**.

Dimostrazione. Le implicazioni $'' \Longrightarrow ''$ seguono dal teorema precedente.
(1) $'' \Longleftarrow ''$ Sia $(x_n) \subseteq X$. Poniamo $Y := \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ e supponiamo che Y abbia infiniti elementi (altrimenti la successione é banalmente convergente). Allora $\exists\, x_0 \in D(Y)$. Essendo X uno spazio $\mathcal{N}_1$, esiste $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sistema fondamentale di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che $x_0 \in D(Y)$ esiste $x_{n_1} \in U_1 - \{x_0\}$. Poiché $U_2 \cap Y$ deve avere infiniti elementi (vedi Esercizio 1.13) $\exists\, x_{n_2} \in U_2 - \{x_0, x_1, \cdots, x_{n_1}\}$. Procedendo in questo modo, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k_{n+1} > k_n \geq n$ tale che $x_{k_n} \in U_n$. Proviamo che $x_n \to x_0$. Sia U intorno di x_0. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale $U_{n_0} \subseteq U$. In particolare $x_{k_n} \in U_{n_k} \subseteq U_{n_0} \subseteq U$ per ogni $n \geq n_0$.

(2) $'' \Longleftarrow ''$ Sia $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ dove A_i é aperto per ogni $i \in I$. Sia $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di X. Allora $\forall i \in I$ esiste $N_i \subset \mathbb{N}$ tali che $A_i = \bigcup_{n\in N_i} B_n$. Allora:

- l'insieme $D = \bigcup_{i\in I} N_i$ é al più numerabile essendo $D \subseteq \mathbb{N}$;
- $\forall\, n \in D$ esiste $i(n) \in I$ tale che $B_n \subseteq A_{i(n)}$;
- $X = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{n\in N_i} B_n = \bigcup_{n\in D} B_n$.

Se provo che esiste F finito tale che $X = \bigcup_{n\in F} B_n$ seguirà che $X = \bigcup_{n\in F} A_{i(n)}$ da cui la compattezza di X. Se D é finito, la tesi é ovvia. Se D numerabile allora $D = (k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ con $n \le k(n) < k(n+1)$ e

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{k(n)}. \tag{1.1}$$

Per assurdo supponiamo che

$$X \neq \bigcup_{i=1}^{n} B_{k(i)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Dalla (1.2) e dalla (1.1) segue che esiste $x_1 \in X \setminus B_{k(1)}$ ed $s(1) > k(1)$ tale che $x_1 \in B_{s(1)}$. Applicando di nuovo la (1.2) e la (1.1) esiste $x_2 \in X \setminus (B_{k(1)} \cup B_{k(2)} \cup \cdots B_{s(1)})$ ed $s(2) > s(1)$ tale che $x_2 \in B_{s(2)}$. Così procedendo costruiamo una successione $(x_n) \subset X$ ed una successione strettamente crescente $s(n)$ di numeri naturali tali che $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B_{s(n)}$ e $x_{n+1} \in X \setminus (B_{k(1)} \cup B_{k(2)} \cup \cdots B_{s(n)})$. In particolare $x_n \neq x_m$ per ogni $n \neq m$ e quindi tale successione ha infiniti termini. Per la proprietà **(W)**, tale successione ha un punto di accumulazione $x_0 \in X$. Grazie alla (1.1), esiste $B_{k(\bar n)}$ tale che $x_0 \in B_{k(\bar n)}$. Per l'esercizio 1.13(1) $B_{k(\bar n)}$ deve contenere infiniti punti della successione. Ma questo é assurdo in quando per ogni $n \ge \bar n$ $s(n) > s(\bar n) \ge \bar n$ e quindi $x_n \notin B_{k(\bar n)}$.

Corollario 1.61. *Sia (X, τ) uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{N}_1$. Allora*
X é compatto $\Longrightarrow$ X é sequenzialmente compatto.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 1.59 e 1.60(1). □

Corollario 1.62. *Sia (X, τ) uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{N}_2$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *X verifica* **(W)***;*
(ii) *X é sequenzialmente compatto;*
(iii) *X é compatto.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 1.60(2). □

Proposizione 1.63. *Se (X, d) é uno spazio metrico compatto o sequenzialmente compatto allora X é separabile (e quindi $\mathcal{N}_2$).*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione solo nel caso in cui X é compatto. Se X é compatto $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esistono $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots x_{k_n}^{(n)} \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}).$$

L'insieme $D := \{x_i^{(n)} : n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le k_n\}$ é numerabile e denso in X. Infatti per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $r > 0$, scelto $n > \frac{1}{r}$, $\exists x_i^n$ tale che $x_0 \in B(x_i^{(n)}, \frac{1}{n})$. In particolare $x_i^{(n)} \in B(x_0, \frac{1}{n}) \subset B(x_0, r)$. Questo implica che, preso un qualunque aperto $A \subseteq X$, vale che $A \cap D \neq \emptyset$. $\square$

1.11. **Limite per $||x|| \to \infty$.** Se $C \subseteq \mathbb{R}^N$, C illimitato e $f : C \to \mathbb{R}$ ricordiamo che

(1) se $\ell \in \mathbb{R}$ allora diremo che
$$\lim_{||x|| \to \infty, x \in C} f(x) = \ell$$
se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che per ogni $x \in C$ se $||x|| > R$ allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$;

(2) se $\ell = +\infty$ allora diremo che
$$\lim_{||x|| \to \infty, x \in C} f(x) = +\infty$$
se e solo se per ogni $N > 0$ esiste $R > 0$ tale che per ogni $x \in C$ se $||x|| > R$ allora $f(x) > N$.

Se definiamo come "intorni di ∞" gli insiemi $U_R := \{x \in \mathbb{R}^N, ||x|| > R\}$, abbiamo che
$$C \text{ è illimitato } \iff \infty \in D(C).$$

Con la definizione data sopra, si ha che
$$\lim_{||x|| \to \infty, x \in C} f(x) = \ell \iff \forall V \text{ intorno di } \ell \ \exists U_R \text{ intorno di } \infty \text{ t.c. } \forall x \in C \cap U_R, f(x) \in V.$$

2. Gli spazi normati

In questa sezione K sarà uguale a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$ e X uno spazio vettoriale su K.

2.1. Seminorme e norme.

Definizione 2.1. *Diremo che* $p : X \to \mathbb{R}$ *é una* **seminorma** *su* X *se*

(1) $p(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in X$ *e* $p(0) = 0$*;*
(2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *per ogni* $x \in X$ *e* $\lambda \in K$*;*
(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *per ogni* $x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare).*

Definizione 2.2. *Sia* X *uno spazio vettoriale su* K*. Diremo che* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *é una norma su* X *se* $\|\cdot\|$ *è una seminorma che soddisfa l'ulteriore proprietà*

$$\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *si dice uno* **spazio normato***.*

Quindi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é una **norma** su X se

(1) $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ per ogni $x \in X$ e $\lambda \in K$;
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Osserviamo che uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ é, in particolare, uno spazio metrico con $d(x, y) := ||x - y||$.

Esercizio 2.3. *Sia* $p : X \to \mathbb{R}$ *tale che soddisfa la (2) e la (3) della definizione precedente. Allora*

(a) $p(0) = 0$*;*
(b) $p(x) = p(-x)$ *per ogni* $x \in X$*. In particolare,* $p(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in X$*;*
(c) p *é una seminorma;*
(d) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *per ogni* $x, y \in X$*;*
(e) $p(\theta x + (1 - \theta) y) \leq \theta p(x) + (1 - \theta) p(y)$ *per ogni* $x, y \in X$ *e per ogni* $\theta \in [0, 1]$ *(ossia* p *é una funzione convessa)*
(f) $S := \{x \in X : \ p(x) = 0\}$ *é un sottospazio di* X*.*

Dimostrazione.

(a) segue applicando la (2) con $\lambda = 0$;
(b) basta applicare la (2) con $\lambda = -1$. Poi, dalla (3) segue che $2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(0) = 0$ ossia $p(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$;
(c) Segue da (a) e (b);
(d) applicando la (3) si ha che $p(x) \leq p(x - y) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$. Scambiando il ruolo di x, y e osservando che, per la (2), vale che $p(x - y) = p(y - x)$ segue la (c);
(e) applicando la (2) e (3) si ha che

$$p(\theta x + (1 - \theta) y) \leq p(\theta x) + p((1 - \theta) y) = \theta p(x) + (1 - \theta) p(y);$$

(f) se $p(x) = p(y) = 0$ e $a, b \in K$, da (b), (2) e (3), segue che
$$0 \leq p(ax + by) \leq p(ax) + p(by) = |a|p(x) + |b|p(y) = 0$$
ossia $ax + by \in S$.

□

Osservazione 2.4. Applicando la (d) ad una norma $\| \cdot \|$ segue che
$$|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y|| \text{ per ogni } x, y \in X$$
da cui segue che se
$$||x_n - x|| \to 0 \Longrightarrow ||x_n|| \to ||x||.$$
Il viceversa é falso (si consideri $x_n = (-1)^n ...$).

Esercizio 2.5. Sia $C[0, 1]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[0, 1]$. Per ogni $x \in [0, 1]$ sia $p_x : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da
$$p_x(f) := |f(x)|.$$
Allora per ogni $x \in [0, 1]$ si ha che p_x é una seminorma (e non é una norma).

2.2. **Successioni di Cauchy e spazi di Banach.**

Definizione 2.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $(x_n) \subseteq X$ si dice* **di Cauchy** *(rispetto a d) se*
$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ \text{ se } n, m \geq n_0 \text{ allora } d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Osservazione 2.7. Sia (X, d) uno spazio metrico.

(1) **se una successione $(x_n) \subseteq X$ converge in X allora é di Cauchy**.
Infatti sia x_0 il suo limite. Sia $\epsilon > 0$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ vale $d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. In particolare per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n, m \geq n_0$ vale
$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) **se una successione $(x_n) \subseteq X$ di Cauchy ammette un'estratta convergente ad un punto $x_0 \in X$ allora tutta la successione (x_n) converge a x_0**; infatti sia $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ convergente ad x_0 e sia $\epsilon > 0$. Poiché (x_n) é di Cauchy, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ vale $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$, mentre, dalla convergenza della successione (x_{k_n}) ad x_0, segue che $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_1$ vale $d(x_{k_n}, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ vale che $k_n \geq n \geq n_1$ e quindi
$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Definizione 2.8. *Uno spazio metrico si dice* **completo** *se tutte le sue successioni di Cauchy sono convergenti. Uno spazio normato si dice* **spazio di Banach** *se tutte le sue successioni di Cauchy sono convergenti.*

Osservazione 2.9. Sia (X, d) uno spazio metrico.

(1) **se (X, d) é compatto, allora (X, d) é completo.**
Infatti, dalla compattezza segue che ogni successione di Cauchy ammette un'estratta convergente e quindi, dalla (2), segue che tutta la successione converge.
Il viceversa é falso. Infatti $\mathbb{R}$ é completo ma non é compatto.

(2) **se (X, d) é uno spazio metrico completo e $Y \subseteq X$ é chiuso allora (Y, d) é completo.**
In particolare **se $(X, ||\cdot||)$ é uno spazio di Banach e $Y \subseteq X$ é un sottospazio chiuso allora $(Y, ||\cdot||)$ é uno spazio di Banach .**
Infatti ogni successione di Cauchy in Y risulta di Cauchy in X e come tale converge ad un punto di X che deve appartenere a Y in quanto Y é chiuso.

Definizione 2.10 (**Spazio prodotto di due spazi normati).** *Sia* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *due spazi normati. Allora sullo spazio prodotto* $X \times Y$ *é possibile definire una norma nel seguente modo:*

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Si osservi che una successione

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad \text{in } X \times Y \iff \|x_n - x\|_X \to 0 \;\text{ e } \|y_n - y\|_Y \to 0.$$

Allora sullo spazio prodotto $X \times Y$ é possibile definire una norma nel seguente modo:

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Si osservi che una successione

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad \text{in } X \times Y \iff \|x_n - x\|_X \to 0 \;\text{ e } \|y_n - y\|_Y \to 0.$$

Segue quindi facilmente che se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi di Banach, allora anche lo spazio prodotto $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ é uno spazio di Banach.
In particolare, se X è uno spazio di Banach, allora lo spazio prodotto $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{N \text{ volte}}$ munito della norma "prodotto" è uno spazio di Banach. Inoltre

(1) la funzione
$$(t, x) \mapsto tx$$
é continua da $K \times X$ in X;

(2) La funzione
$$(x, y) \mapsto x + y$$
é continua da $(X \times X, \|\cdot\|_{X\times X})$ in $(X, \|\cdot\|_X)$.

Definizione 2.11. *Sia* X *uno spazio normato. Un insieme* $Y \subseteq X$ *si dice* **limitato** *(in* X*) se*

$$\sup_{y\in Y} ||y|| \in \mathbb{R}.$$

In particolare una successione $(x_n) \subseteq X$ *si dice* **limitata** *se* $\sup_n ||x_n|| \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente $Y \subseteq X$ é limitato se esiste $R > 0$ tale che

$$Y \subseteq B_R = \{x \in X : \|x\| \le R\}.$$

Osservazione 2.12. Sia X uno spazio normato.

(1) **Se una successione** $(x_n) \subseteq X$ **é convergente, allora é limitata.**
Infatti se x_0 é il suo limite, allora $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x_0|| \in \mathbb{R}$.

(2) **Se** $K \subseteq X$ **è compatto allora è chiuso e limitato**: vediamo due dimostrazioni. Prima possibilità: ricopriamo K con le palle aperte $B(0, n)$ ed estraiamo un sottoricoprimento finito per trovare che esiste una palla B_R che lo contiene; Seconda possibilità: se per assurdo non lo fosse, $\sup_{y\in Y} ||y|| = +\infty$ ed esisterebbe $y_n \subseteq Y$ tale che $\lim_{n\to\infty} ||y_n|| = +\infty$. Tale successione (y_n) dovrebbe ammettere una estratta (y_{k_n}) convergente ad un punto $y_0 \in Y$. Questo implica che la successione
$$+\infty = \lim_{n\to\infty} ||y_n|| = \lim_{n\to\infty} ||y_{k_n}|| = ||y_0|| \in \mathbb{R}.$$
Il viceversa é falso. Per esempio si prenda $X = C[0, 1]$ munito della norma indotta dalla distanza
$$d(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$
Allora vale che la palla $\mathcal{B}_1 = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ non é compatta (si prenda $f_n(x) = x^n$ e si verifichi che non ammette sottosuccessioni convergenti.)

Proposizione 2.13. *In uno spazio normato $(X, \|\cdot\|_X)$ sono equivalenti i seguenti fatti:*

(1) *ogni insieme $K \subseteq X$ chiuso e limitato è compatto;*
(2) *la palla unitaria $\mathcal{B}_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é compatta;*
(3) *per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $R > 0$ la palla $\mathcal{B}_R(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq R\}$ é compatta;*
(4) *ogni successione $(x_n) \subseteq X$, limitata in $(X, \|\cdot\|_X)$ (ossia tale che $\sup_n ||x_n|| \in \mathbb{R}$), ammette un'estratta convergente in X;*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Essendo $\mathcal{B}_1$ chiusa e limitata, allora $\mathcal{B}_1$ è compatta;

(2) $\Longrightarrow$ (3): per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $R > 0$ la funzione $t_{R,x_0} : X \to X$ definita come $t_{R,x_0}(x) = Rx + x_0$ é un'applicazione continua in quanto lipschitziana. Infatti

$$|t_{R,x_0}(x) - t_{R,x_0}(y)| = R|x - y| \; \forall x, y \in X$$

e come tale trasforma insiemi compatti in insiemi compatti. Poiché $t_{R,x_0}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_R(0)$ segue che la palla $\mathcal{B}_R(x_0)$ é compatta.

(3) $\Longrightarrow$ (4): se $(x_n) \subseteq X$ é una successione limitata allora $(x_n) \subseteq \mathcal{B}_R(0)$ dove $R = \sup_n ||x_n||$. Essendo la palla $\mathcal{B}_R(0)$ compatta in uno spazio metrico, è anche seq. compatta e quindi esiste una sottosuccessione estratta da (x_n) convergente in $\mathcal{B}_R(x_0)$.

(4) $\Longrightarrow$ (1): sia $K \subseteq X$ chiuso e limitato. Grazie alla (4), K è seq. compatto. Essendo X uno spazio metrico, allora K è compatto. □

Il seguente teorema caratterizza gli spazi normati completi (per esercizio):

Teorema 2.14. (Criterio di Weirstrass per le serie) *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

(1) *X é di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|$;*
(2) *per ogni successione $(x_n) \subseteq X$, se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge allora esiste $y \in X$ tale che la successione $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ delle somme parziali converge a y nella norma $\|\cdot\|$ (ossia $\exists y \in X$ tale che $\|s_n - y\| \to 0$). Inoltre $\|y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.*

Definizione 2.15. *Siano $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ due norme su uno spazio vettoriale X. Esse si dicono* **equivalenti** *se esistono due costanti $c, C > 0$ tali che per ogni $v \in X$*

$$c|v| \leq \|v\| \leq C|v|.$$

Osservazione 2.16. Siano $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ due norme equivalenti sullo spazio X e $(x_n) \subseteq X$. Dal fatto che

$$c|x_n - x_m| \leq \|x_n - x_m\| \leq C|x_n - x_m| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

segue che (x_n) é di Cauchy rispetto a $|\cdot|$ se e solo se (x_n) é di Cauchy rispetto a $||\cdot||$. Inoltre per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$c|x_n - x_0| \leq \|x_n - x_0\| \leq C|x_n - x_0|$$

e quindi

$$||x_n - x_0|| \to 0 \Longleftrightarrow |x_n - x_0| \to 0$$

ossia ogni successione in X convergente rispetto ad una norma converge allo stesso limite anche rispetto ad ogni altra norma ad essa equivalente. In particolare se $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ sono due norme equivalenti allora

$$(X, |\cdot|) \text{ é completo } \Longleftrightarrow (X, ||\cdot||) \text{ é completo}$$

e

$$\{x \in X : |x| \leq 1\} \text{ é compatta in } (X, |\cdot|) \Longleftrightarrow \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \text{ é compatta in } (X, \|\cdot\|).$$

Esercizio 2.17. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazio metrici e sia $T : X \to Y$ un' **isometria** ossia tale che
$$d_Y(T(x), T(y)) = d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$
Dimostrare che
(1) se X é completo, allora $T(X)$ é chiuso in Y;
(2) se X e Y sono completi, allora $T(X)$ é uno spazio completo;
(3) se T è suriettiva, allora
$$X \text{ é completo} \iff Y \text{ é completo}.$$

2.3. **Gli spazi normati di dimensione finita.**

Proposizione 2.18. *Sia X uno spazio vettoriale su K di $dim_K X = N$. Sia $(e_1, \cdots, e_N)$ una base canonica. Per ogni $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i \in X$ con $v_i \in K$ sia $||v||_1 := \sum_{i=1}^N |v_i|$. Allora*
(1) *$(X, ||\cdot||_1)$ é un spazio normato completo;*

(2) *da ogni successione in X limitata rispetto alla norma $||\cdot||_1$ si può estrarre una sottosuccessione convergente (ossia vale la la proprietà di Bolzano-Weirstrass);*
(3) *tutte le norme su X sono equivalenti alla norma $||\cdot||_1$.*

Dimostrazione.
(1) Dalle proprietà del modulo segue facilmente che $\|\cdot\|_1$ é una norma. Lo spazio prodotto $K^N = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{N \text{ volte}}$ munito della norma "prodotto" è completo. X munito della $\|\cdot\|_1$ è isometrico allo spazio prodotto K^N munito della topologia prodotto. Quindi X è completo.
(2) Verifichiamo che ogni altra norma è equivalente alla norma $\|\cdot\|_1$. Sia $||\cdot||$ un'altra norma su X. Allora, posto $C = \max_{0\le i\le N} ||e_i||$, per ogni $v \in X$ vale che
$$||v|| \le C\|v\|_1.$$
Infatti se
$$v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$$
allora
$$||v|| \le \sum_{i=1}^N ||v_i e_i|| \le \sum_{i=1}^N |v_i|||e_i|| \le C\sum_{i=1}^N |v_i| = C\|v\|_1.$$
Ora per assurdo assumiamo che non esista una costante $C > 0$ tale che $\|v\|_1 \le C\|v\|$ per ogni $v \in X$, ossia assumiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista $v_n \in X$ tale che $\|v_n\|_1 \ge n\|v_n\|$. Definiamo $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_1}$. Allora $\|w_n\|_1 = 1$ e $\|w_n\| \le \frac{1}{n}$. Segue che $w_n \to 0$ rispetto alla norma $\|\cdot\|$. Inoltre, dal punto (2), esiste una sottosuccessione w_{k_n} convergente a $w \in X$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. In particolare $\|w\|_1 = \lim_n \|w_{k_n}\|_1 = 1$. Infine poiché
$$||w_{k_n} - w|| \le C\|w_{k_n} - w\|_1,$$
si ha che $||w_{k_n} - w|| \to 0$ da cui, per unicità del limite, $w = 0$. Assurdo. □

Corollario 2.19. *Sia X uno spazio vettoriale su K e $dim_K X = N$. Allora*
(1) *tutte le norme sono tra loro equivalenti;*
(2) *X é completo qualunque sia la norma considerata;*
(3) *un sottoinsieme $K \subseteq X$ è compatto se e solo se é chiuso e limitato;*
(4) *la palla unitaria $\mathcal{B}_1 = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ é compatta;*
(5) *le palle chiuse rispetto qualunque norma sono compatte;*

(6) *da ogni successione limitata (rispetto ad una qualunque norma) si puó estrarre una sottosuccessione convergente (ossia vale la proprietà di Bolzano Weirstrass);*

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2.18.

Osservazione 2.20. Se lo spazio X ha dimensione infinita, la proprietà (4) del Teorema 2.18 (detta proprietà di Bolzano-Weirstrass) non vale. Vedi Esempio **??**. Lo stesso dicasi per la proprietà (1) della proposizione 2.19. Vedi Esempio 2.30(3).

Corollario 2.21. *Sia X uno spazio normato su K e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio di dimensione finita. Allora Y é chiuso in X.*

Dimostrazione. Poiché Y é completo rispetto a qualunque norma, Y é completo rispetto alla norma di X. In particolare é sequenzialmente chiuso rispetto alla norma di X e quindi chiuso. □

Proposizione 2.22. *Siano X, Y spazi normati su K e sia $T : X \to Y$ lineare. Se X ha dimensione finita allora T é una funzione lipschitziana e quindi continua.*

Dimostrazione. Sia $dim_K X = N$ e sia $(e_1, \cdots, e_N)$ una base canonica di X. Muniamo X della norma $|\cdot|$ definita in Proposition 2.18. Allora per ogni $v \in X$, $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$ si ha che

$$||T(v)||_Y = ||\sum_{i=1}^N v_i T(e_i)||_Y \leq C|v|$$

dove $C = \sup_{1 \leq i \leq N} ||T(e_i)||_Y$. In particolare per ogni $v, w \in X$,

$$||T(v) - T(w)||_Y = ||T(v - w)||_Y \leq C|v - w|$$

e quindi T é continuo essendo una funzione lipschitziana da X in Y. □

Definizione 2.23. *Uno spazio vettoriale E su K si dice* **infinito dimensionale** *se per ogni $N \in \mathbb{N}$ esistono $x_1, \cdots x_N \in E$ che risultano linearmente indipendenti.*

Si vede facilmente che E é **infinito dimensionale** se e solo $E \neq span\{x_1, \cdots x_N\}$ per ogni $x_1, \cdots x_N \in E$. In particolare se E ha dimensione infinita si può costruire una successione di sottospazi di dimensione finita $(E_n)_n$ tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$ strettamente. Inoltre in base al Corollario 2.21 E_n é chiuso per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il seguente teorema caratterizza gli spazi normati di dimensione finita:

Teorema 2.24 (di Riesz). *Sia X uno spazio normato. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

(i) *X ha dimensione finita*
(ii) *la palla chiusa unitaria $\mathcal{B}_1 := \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ é compatta.*

Ricordiamo che se (X, d) é uno spazio metrico e $Y \subseteq X$ allora

$$x_0 \in \bar{Y} \iff 0 = \inf\{d(x_0, y) : \ y \in Y\} =: d(x_0, Y).$$

Per dimostrare il Teorema 2.24 abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 2.25 (di Riesz). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato e sia $Y \subsetneq X$ un sottospazio chiuso. Allora*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists x_0 \in X \text{ tale che } x_0 \notin Y, \ ||x_0|| = 1 \text{ e } d(x_0, Y) \geq 1 - \epsilon.$$

Dimostrazione. Sia $x \in X$ tale che $x \notin Y$. Essendo Y chiuso, allora $d = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 0$. Si noti che se $0 < \epsilon < 1$ allora $\frac{d}{1-\epsilon} > d$. Quindi esiste $y_0 \in Y$ tale che

$$\|x - y_0\| \leq \frac{d}{1 - \epsilon}.$$

Poniamo $x_0 := \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}$. Allora $x_0 \notin Y$ (altrimenti $x \in Y$) e per ogni $y \in Y$ vale che

$$\|x_0 - y\| = \|\frac{x-y_0}{\|x-y_0\|} - y\| = \frac{\|x - y_0 - y\|x-y_0\|\|}{\|x-y_0\|} = \frac{\|x-y_1\|}{\|x-y_0\|} \geq d \cdot \frac{1-\epsilon}{d}$$

essendo $y_1 = y_0 - y\|x-y_0\| \in Y$. □

Dimostrazione. (del Teorema di Riesz)

(i) $\Longrightarrow$ (ii) segue dal Corollario 2.19.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): per assurdo X non sia di dimensione finita. Allora si può costruire una successione $(Y_n)_n$ di sottospazi di dimensione finita tali che $Y_{n-1} \subsetneq Y_n$. Grazie al Lemma di Riesz (applicato alla coppia di spazi Y_n e Y_{n-1} con $\epsilon = \frac{1}{2}$), si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in Y_n \setminus Y_{n-1}$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $d(x_n, Y_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. In particolare

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

per ogni $m \neq n$: infatti se, per esempio, $n < m$ allora $x_n \in Y_n \subseteq Y_{m-1}$ e

$$\|x_m - x_n\| = d(x_m, x_n) \geq d(x_m, Y_{m-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi non é possibile estrarre da $(x_n)_n \in \mathcal{B}_1$ alcuna sottosuccessione convergente contro l'ipotesi di compattezza della palla. □

Mettendo insieme il Teorema di Riesz con la Proposizione 2.13, otteniamo il seguente teorema:

Teorema 2.26. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato su K. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *X ha dimensione finita;*
2. *un sottoinsieme $K \subseteq X$ è compatto se e solo se é chiuso e limitato;*
3. *la palla unitaria $\mathcal{B}_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é compatta;*
4. *da ogni successione limitata si puó estrarre una sottosuccessione convergente (ossia vale la proprietà di Bolzano Weirstrass).*

2.4. **Esempi di spazi di funzioni.**

Definizione 2.27. *Sia X un insieme, $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazio normato e $f : X \to Y$. Si dice che f é* **limitata** *se esiste $M \geq 0$ tale che*

$$|f(x)|_Y \leq M \ \forall x \in X.$$

Proposizione 2.28. *Sia X un insieme, $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazio normato e sia*

$$B(X,Y) := \{f : X \to Y : \ f \ \text{limitata}\}.$$

Allora $B(X,Y)$ é uno spazio vettoriale su K (con l'usuale somma e moltiplicazione per uno scalare) e

$$||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|_Y$$

é una norma su $B(X,Y)$ (detta la norma del sup). Inoltre

$$(B(X,Y), ||\cdot||_\infty) \ \text{é completo} \iff (Y, |\cdot|_Y) \ \text{é completo.}$$

Dimostrazione. "$\Longleftarrow$": Sia $(f_n)_n$ una successione di Cauchy in $B(X,Y)$. Poiché

$$|f_n(x) - f_m(x)|_Y \leq ||f_n - f_m||_\infty$$

si ha che $(f_n(x))_n$ é una successione di Cauchy in Y per ogni $x \in X$. Quindi per ogni $x \in X$ esiste un unico $f(x) \in Y$ tale che $|f_n(x) - f(x)|_Y \to 0$ quando $n \to \infty$. Facciamo vedere che f_n converge a f in $(B(X,Y), ||\cdot||_\infty)$. Sia $\epsilon > 0$ e $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$||f_n - f_m||_\infty \leq \epsilon$$

per ogni $n, m \geq \nu_0$. Allora per ogni $x \in X$ e per ogni $n, m \geq \nu_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)|_Y \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \epsilon. \tag{2.1}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ in (2.1) si ottiene che per ogni $x \in X$

$$|f(x) - f_m(x)|_Y \leq \epsilon \quad \forall m \geq \nu_0$$

ossia

$$||f - f_m||_\infty \leq \epsilon \quad \forall m \geq \nu_0.$$

Da quest'ultima relazione segue che $f = (f - f_m) + f_m \in B(X, Y)$ e che $(f_n)_n$ converge a f.

"$\Longrightarrow$": Se $(y_n) \subseteq Y$ é una successione di Cauchy, é facile provare che la successione di funzioni costanti $f_n : X \to Y$ definite come $f_n \equiv y_n$ é una successione di Cauchy in $B(X, Y)$ e quindi converge a una funzione f anche essa costante, ossia esiste $y_0 \in Y$ tale che $f(x) = y_0$ per ogni $x \in X$. Segue facilmente che y_n converge a y_0 in Y. □

Definiamo

$$C(X, Y) := \{f : X \to Y : f \text{continua}\}$$

e

$$C_b(X, Y) := \{f : X \to Y : f \text{ limitata e continua}\}(= C(X, Y) \cap B(X, Y)).$$

Proposizione 2.29. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazi normato. Allora $C_b(X, Y)$ é uno sottospazio vettoriale chiuso di $(B(X, Y), ||\cdot||_\infty)$. In particolare*

$$(C_b(X, Y), ||\cdot||_\infty) \text{ é completo} \iff (Y, |\cdot|_Y) \text{ é completo.}$$

.

Dimostrazione. "$\Longleftarrow$" È facile provare che il limite uniforme di funzioni continue é una funzione continua. Inoltre, dalla proposizione precedente, sappiamo che il limite uniforme di funzioni limitate é una funzione limitata. Pertanto $(C_b(X, Y), ||\cdot||_\infty)$ é un sottospazio chiuso dello spazio completo $(B(X, Y), ||\cdot||_\infty)$. Pertanto é esso stesso completo. □

Osservazione 2.30. Dalla proposizione precedente segue che

(1) se una successione di funzioni continue e limitate $f_n : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ converge uniformemente ad una funzione f allora f é continua e limitata;
(2) sia (X, τ) é uno spazio topologico compatto (rispettovamente seq. compatto) e sia $f : X \to Y$ continua (rispettivamente seq. continua), allora f é limitata: infatti, per il teorema di Weistrass generalizzato (vedi Corollario 1.50 e 1.54), la funzione reale e continua $y \to -|f(y)|_Y$ ha minimo su X e quindi $y \to |f(y)|_Y$ ha massimo su X. In tal caso quindi lo spazio
$$C(X, Y) := \{f : X \to Y : f \text{ continua}\} \equiv C_b(X, Y),$$
ed é uno spazio di Banach munito della norma $||\cdot||_\infty$.

Esempio 2.31. Usando lo spazio delle funzioni continue diamo un esempio di spazio X di dimensione infinita che sia completo rispetto ad una norma e non completo rispetto ad un'altra. Si consideri per esempio lo spazio $X = C^0[-1, 1]$: esso é completo rispetto alla norma del sup. Non é invece completo rispetto alla norma

$$||u||_1 = \int_{-1}^{1} |u(x)| dx.$$

Infatti è noto che $C_c[-1, 1]$ è denso in $L^1(-1, 1)$ rispetto la norma $||\cdot||_1$. In particolare, essendo

$$C_c[-1, 1] \subseteq X \subseteq L^1(-1, 1)$$

segue che la chiusura di X rispetto la norma $||\cdot||_1$ è $L^1(-1,1)$. Quindi X non è completo. In particolare le norme $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_\infty$ su X non risultano essere equivalenti (vedi Osservazione 2.16).

Esercizio 2.32. Si consideri la successione

$$u_n(x) := \begin{cases} nx & se\ |nx| \leq 1 \\ 1 & se\ x \geq \frac{1}{n} \\ -1 & se\ x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}.$$

Per ogni $x \in [-1,1]$ si provi che $u_n(x)$ converge a

$$v(x) := \begin{cases} 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}.$$

Quindi $(u_n)_n$ non converge uniformemente e non può essere di Cauchy rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$. Utilizzando il teorema di Lebesgue si verifichi che $(u_n)_n$ é una successione convergente rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ alla funzione

$$w(x) := \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}.$$

In particolare $(u_n)_n$ é una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ che non converge in X.

Osservazione 2.33. Sia $C^1[a,b]$ lo spazio delle funzioni continue con derivata continua su $[a,b]$. Osserviamo che $C^1[a,b]$ non é chiuso rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$. Infatti, si consideri la successione $u_n(x) := \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n^2}}$ e sia $u(x) := |x - \frac{1}{2}|$. Allora $u_n \in C^1[0,1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $||u_n - u||_\infty \to 0$ ma $u \notin C^1[0,1]$.

Esercizio 2.34.
(1) Per ogni $u \in C^1[a,b]$ sia $||u||_{C^1} := ||u||_\infty + ||u'||_\infty$. Provare che $||\cdot||_{C^1}$ é una norma che rende lo spazio $C^1[a,b]$ uno spazio di Banach.
(2) Per ogni $u \in C^1[a,b]$ sia $||u||_a = |u(a)| + ||u'||_\infty$. Verificare che $\|\cdot\|$ é una norma che rende lo spazio $C^1[a,b]$ uno spazio di Banach. La norma $||\cdot||_a$ é equivalente alla norma $||\cdot||_{C^1}$?
(3) Sia K un compatto di $\mathbb{R}$ aventi N componenti connesse $(C_k)_{1\leq k\leq N}$. Sia $a_k \in C_k$ per ogni k. Per ogni $u \in C^1(K)$ sia $|||u||| = \sum_{i=1}^k |u(a_i)| + ||u'||_\infty$. Verificare che $|||\cdot|||$ é una norma equivalente alla norma $||\cdot||_{C^1}$.

Esercizio 2.35. Per ogni $u \in C^2[0,1]$ si definisca $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$. Dimostrare che $\|\cdot\|$ definisce una norma che rende $C^2[0,1]$ uno spazio di Banach.

2.5. **Spazi di successioni.**

Esercizio 2.36. Sia

$$\ell^\infty := \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \sup_n |a_n| < +\infty\}$$

lo spazio delle successioni reali limitate e sia

$$c_0 := \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : a_n \to 0\}$$

il sottospazio delle successioni reali infinitesime.

(1) Verificare che $||(a_n)_n||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ definisce una norma su ℓ^∞ rispetto alla quale ℓ^∞ é completo.
(2) provare che c_0 é chiuso in l^∞ (in particolare $(c_0, ||\cdot||_\infty)$ è uno spazio di Banach);
(3) provare che

$$c_{00} := \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n = 0\ \forall n \geq n_0.\}$$

il sottospazio delle successioni reali definitivamente nulle. Dimostrare che $\overline{c_{00}}^{\ell^\infty} = c_0$. In particolare c_{00} non è chiuso in l^∞.

Soluzione

(1) Ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può essere riguardata come una funzione $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ e viceversa con $(a_n)=(f(n))$. Pertanto $\ell^\infty = B(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Dalla Proposizione 2.28 segue che ℓ^∞ é uno spazio di Banach con la norma $\sup_{n\in\mathbb{N}}|f(n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$.

(2) Proviamo che c_0 é chiuso in ℓ^∞.

Sia $(a^{(k)})_k \subseteq c_0$ una successione convergente ad $a=(a_n)_n \in l^\infty$ e proviamo che $a \in c_{00}$: sia $\epsilon > 0$ e sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$||a^{(k)} - a||_\infty \le \epsilon \quad \forall\, k \ge n_0(\epsilon).$$

Indichiamo $a^{(k)} = (a^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora, fissato $k \ge n_0(\epsilon)$, per ogni $n\in\mathbb{N}$ segue che

$$|a_n| \le |a_n - a^k_n| + |a^k_n| \le ||a - a^{(k)}||_\infty + |a^k_n| \le \epsilon + |a^k_n|.$$

Mandando $n\to\infty$ otteniamo

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n| \le \epsilon + \limsup_{n\to\infty}|a^k_n| = \epsilon + \lim_{n\to\infty}|a^k_n| = \epsilon.$$

Per $\epsilon \to 0$ segue la tesi.

(3) Osserviamo che $c_{00}\subseteq c_0$ da cui segue che $\overline{c_{00}}^{\ell^\infty} \subseteq c_0$. Proviamo che $c_0 \subseteq \overline{c_{00}}^{\ell^\infty}$. Infatti ogni $a=(a_n)_n \in c_0$ é il limite (rispetto alla norma del sup) della successione $(a^{(k)})_k \subseteq c_{00}$, $a^{(k)} = (a^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita da

$$a^k_n := \begin{cases} a_n \text{ se } n \le k \\ 0 \text{ se } n > k \end{cases} .$$

Infatti

$$||a^{(k)} - a||_\infty = \sup_{k\ge n+1}|a_k| \to 0 \quad \text{per } k\to\infty$$

in quanto $a\in c_0$.

3. Gli operatori lineari e continui.

In generale, abbiamo visto che gli operatori lineari da uno spazio di dimensione finita su uno spazio normato qualunque sono funzioni continue (vedi Proposizione 2.22).

Tale risultato non vale se X ha dimensione infinita, come si vede nell'esempio seguente in cui $Y = \mathbb{R}$.

Esempio 3.1. Sia $X = C[0,1]$. Sia $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definito da

$$T(u) := u(1).$$

È facile verificare che T é lineare, continuo se muniamo X della norma $||\cdot||_\infty$ ma non è continuo se X è munito della norma $||\cdot||_1$. Infatti sia $u_n(x) = x^n$. Allora $||u_n||_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0$ mentre $T(u_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $(T(u_n))_n$ non converge a $T(0)$.

La seguente proposizione caratterizza i funzionali lineari e continui definiti su un spazio normato. L'ultima proprietà é quella che si utilizza concretamente per verificare che un funzionale lineare é continuo.

Proposizione 3.2. *Siano X, Y due spazi normati su K e sia $T : X \to Y$ lineare. Allora sono equivalenti le seguenti relazioni:*

(1) *T é continuo;*
(2) *T é continuo in 0;*
(3) *T é limitato in un intorno di 0;*
(4) *$\exists C > 0$ tale che $||T(x)||_Y \le C||x||_X$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. (1)$\Longrightarrow$ (2) ovvia;(2)$\Longrightarrow$ (3) ovvia;

(3)$\Longrightarrow$ (4) Sia T limitato in un intorno U di 0, ossia supponiamo che $\exists c > 0$ tale che

$$||T(x)||_Y \le c \ \forall x \in U.$$

Sia $\overline{B_X(0,r)} \subseteq U$. Poiché per ogni $x \in X$ vale che $||r\frac{x}{||x||}||_X \le r$, si ottiene che $||T(r\frac{x}{||x||_X})||_Y \le c$ per ogni $x \in X$ ossia

$$||T(x)||_Y \le \frac{c}{r}||x||_X \quad \forall x \in X.$$

La tesi segue scegliendo $C = \frac{c}{r}$.

(4)$\Longrightarrow$ (1) Per ogni $x, y \in X$ vale che

$$||T(x) - T(y)||_Y = ||T(x - y)||_Y \le C|x - y|$$

e quindi T é continuo essendo una funzione lipschitziana da X in Y. □

Nel seguito X, Y saranno due spazi normati su K. Poniamo

$$\boxed{L(X,Y) := \{T : X \to Y : T \text{ lineare}\}}$$

$$\boxed{X^* := \{T : X \to K : T \text{ lineare}\}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \to Y : T \text{ lineare e continuo}\},}$$

e chiamiamo **duale topologico** di X lo spazio vettoriale

$$\boxed{X' := \mathcal{L}(X,K) = \{T : X \to K : T \text{ lineare e continuo}\}.}$$

Se $Y = X$ poniamo $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

Grazie alla Proposizione 3.2 sappiamo che se X ha dimensione finita, allora

$$X' = X^*$$

ossia X' coincide con il duale algebrico X^*, mentre se X ha dimensione infinita $X' \subsetneq X^*$ e X' dipende dalla norma su X (vedi Esempio 3.1).

3.1. **La norma di un operatore.** Grazie alla Proposizione 3.2, sappiamo che, assegnato $T \in L(X,Y)$, allora

$$T \in \mathcal{L}(X,Y) \iff \exists\, C \in \mathbb{R}^+ \quad : \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X \iff \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty.$$

Sullo spazio $\mathcal{L}(X,Y)$ possiamo definire una norma nel modo seguente:

$$\boxed{||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.}$$

Dalla definizione di $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ segue che

$$||T(x)||_Y \leq ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} ||x||_X \quad \forall x \in X.$$

Osserviamo che

$$\boxed{||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1, x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y.}$$

Infatti banalmente

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq \sup_{\|x\|_X \leq 1, x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \geq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y \geq \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y.$$

D'altra parte per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x_\epsilon \in X$ tale che

$$\frac{\|T(x_\epsilon)\|_Y}{\|x_\epsilon\|_X} \geq ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} - \epsilon.$$

In particolare

$$\sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y \geq \|T(\frac{x_\epsilon}{\|x_\epsilon\|_X})\|_Y = \frac{\|T(x_\epsilon)\|_Y}{\|x_\epsilon\|_X} \geq ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} - \epsilon.$$

Per $\epsilon \to 0$ si ottiene che

$$\sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y \geq ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Si osservi che

$$\text{se } Y = \mathbb{R} \text{ allora} \qquad ||T||_{X'} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \frac{T(x)}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} T(x) = \sup_{\|x\|_X = 1} T(x)$$

in quanto

$$|T(x)| = \max\{T(x), -T(x)\} = \max\{T(x), T(-x)\} \quad \forall x \in X.$$

Quindi il sup della funzione $\frac{|T(x)|}{\|x\|_X}$ nei vari casi coincide con il sup della funzione $\frac{T(x)}{\|x\|_X}$.

Osservazione 3.3. Sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Per provare che $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = C \geq 0$ occorre provare che

(1) vale

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

e ciò implica che $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C$.
Equivalentemente si può provare che $\|T(x)\|_Y \leq C \quad \forall x \in X$ s.t. $\|x\|_X \leq 1$.

(2) $\exists (x_n)_n \subseteq X$ tale che $\|x_n\|_X \leq 1$ e $\sup_n \|T(x_n)\|_Y \geq C$. Questo implica che $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq C$. Equivalentemente si può provare che

$$\exists (x_n)_n \subseteq X \text{ tale che } \|x_n\|_X = 1 \text{ e } \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_Y \geq C.$$

In alcuni casi la (2) viene garantita dal fatto che la norma viene raggiunta, ossia dal fatto che $\exists\, \bar{x}$ tale che $\|\bar{x}\|_X \leq 1$ e $\|T(\bar{x})\|_Y = C$.

Esempio 3.4. Sia $m \in C[a,b]$ e sia $T_m : C[a,b] \to C[a,b]$ che a u associa la funzione

$$T_m(u) : [a,b] \to \mathbb{R}$$

cosí definita:

$$T_m(u)(x) = u(x)m(x).$$

Provare che $T : (C[a,b], \|\|_\infty) \to (C[a,b], \|\|_\infty)$ è continuo con

$$||T_m||_{\mathcal{L}(C[a,b])} = ||m||_\infty.$$

e che esiste $\bar{u}$ tale che $\|\bar{u}\|_\infty = 1$ e $||T_m(\bar{u})||_\infty = ||m||_\infty$.

Osservazione 3.5. Se lo spazio X é infinito dimensionale, non sempre la norma di un funzionale su X é raggiunta, ossia in generale non esiste il $\max_{|x|\leq 1} |T(x)|_Y$.

Si consideri infatti il seguente esempio. Per ogni $a = (a_n) \in c_0$ sia $T(a) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$. Proviamo che $T : (c_0, \|\|_\infty) \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo con $||T||_{c_0'} = e - 1$. Intanto T è **ben posto** in quanto per ogni $a = (a_n) \in c_0$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!} \leq \|a\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-1)\|a\|_\infty < +\infty$$

ossia $Ta \in \mathbb{R}$. Poi T **è lineare**: usando il fatto che se due serie $\sum_{i=1}^\infty x_n, \sum_{i=1}^\infty y_n$ sono semplicemente convergenti allora $\sum_{i=1}^\infty (\lambda x_n + \mu y_n)$ è semplicemente convergente per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e vale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_n + \mu \sum_{i=1}^{\infty} y_n,$$

allora, se $a = (a_n), b = (b_n) \in c_0$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vale che

$$T(\lambda a + \mu b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{n!} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} = T(a) + T(b).$$

Infine T **è continuo** in quanto

$$|T(a)| \leq \|a\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-1)\|a\|_\infty.$$

Questo implica che $||T||_{c_0'} \leq e - 1$. Inoltre se definiamo

$$x_n^k = \begin{cases} 1 \text{ se } n \leq k, \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

vale che $x^{(k)} = (x_n^k)_n \in c_0$, $\|x^{(k)}\|_\infty = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $T(x^{(k)}) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n!} \to e - 1$ per $k \to \infty$. Dimostriamo che $\nexists\, a \in c_0$ con $||a||_\infty = 1$ tale che $T(a) = e - 1$. Se esistesse $a \in c_0$ con $||a||_\infty = 1$

tale che $T(a) = e - 1$ allora $e - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e segue che

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - a_n}{n!}.$$

Poiché $a_n \in [-1, 1]$, abbiamo una serie a termini positivi la cui somma é zero. Allora ogni termine deve essere nullo, ossia $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Assurdo.

Nel caso in cui $Y = K$ si ha inoltre la seguente caratterizzazione:

Proposizione 3.6. *Siano X uno spazio normato su K e sia $T \in X^*$, $T \neq 0$. Allora sono equivalenti le seguenti relazioni:*

(1) *$T \in X'$;*
(2) *$kerT$ é chiuso;*
(3) *$kerT$ non é denso;*
(4) *T é limitato in un intorno di 0.*

Per provare l'implicazione (3)$\Longrightarrow$ (4) utilizzeremo la proprietà (1) del seguente esercizio:

Esercizio 3.7. *Siano X, Y due spazi vettoriali. Sia $C \subseteq X$ é un insieme convesso, ossia tale che*

$$\theta x + (1 - \theta)y \in C \quad \forall x, y \in C, \forall \theta \in [0, 1],$$

allora

(1) *se $T \in L(X, Y)$ allora $T(C)$ é convesso;*
(2) *Se X è normato allora $\bar{C}$ é convesso;*
(3) *$C + C \subseteq 2C$ dove $C + C := \{x + y : x, y \in C\}$ e $2C := \{2x : x \in C\}$;*
(4) *se X è uno spazio normato, allora le palle $B(x_0, r)$ sono convesse.*

Dimostrazione. (della Proposizione 3.6) Per semplicità sia $K = \mathbb{R}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Essendo T continua $kerT = T^{-1}(0)$ é chiuso.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Basta osservare che $\overline{kerT} = kerT \neq X$ in quanto $T \neq 0$.

(3)$\Longrightarrow$ (4) Per ipotesi $\overline{kerT} \neq X$. Allora esiste $B_X(x_0, r) = \{x \in X : \ ||x - x_0||_X < r\}$ tale che $B_X(x_0, r) \subseteq X \setminus \overline{kerT}$. Per assurdo supponiamo che T non è limitato su $B_X(0, r)$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists y_n \in \mathbb{R}^+$ ed $\exists x_n \in B_X(0, r)$ tali che $|T(x_n)| = y_n \to +\infty$. A meno di sostituire x_n con $-x_n$, supponiamo che $|T(x_n)| = T(x_n) = y_n$. Essendo $B_X(0, r))$ convesso, allora $T(B_X(0, r))$ é convesso. In particolare, siccome $\pm y_n \in T(B_X(0, r))$ allora $[-y_n, y_n] \subseteq T(B_X(0, r))$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ossia

$$\mathbb{R} = \bigcup_n [-y_n, y_n] = T(B_X(0, r)).$$

Quindi esiste $x \in B_X(0, r)$ tale che $T(x) = -T(x_0)$. Segue che $T(x + x_0) = 0$ che é assurdo in quanto $x + x_0 \in B_X(x_0, r) \subseteq X \setminus kerT$.
Infine l'implicazione (4)$\Longrightarrow$ (1) segue dalla Proposizione 3.2 . $\square$

Corollario 3.8. Sia X uno spazio normato. Sia $T : X \to \mathbb{R}$ lineare e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora T é continuo se e solo se $\{x \in X : \ T(x) = \alpha\}$ é chiuso in X.

Proposizione 3.9. *Siano X, Y due spazi normati su K. Allora $||\cdot||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ é una norma su $\mathcal{L}(X, Y)$ e se Y é uno spazio di Banach, anche $\mathcal{L}(X, Y)$ munito della norma $|| \cdot ||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ é uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(T_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$. Poiché

$$|T_n(x) - T_m(x)|_Y = |(T_n - T_m)(x)|_Y \leq ||T_n - T_m||_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X$$

si ha che $(T_n(x))_n$ é una successione di Cauchy in Y per ogni $x \in X$. Quindi per ogni $x \in X$ esiste un unico $T(x) \in Y$ tale che $|T_n(x) - T(x)|_Y \to 0$ quando $n \to \infty$. È facile verificare che $T : X \to Y$ é lineare.
Proviamo che T é continuo e T_n converge a T in $\mathcal{L}(X,Y)$. Sia $\epsilon > 0$ e $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$||T_n - T_m||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq \nu_0.$$

Allora per ogni $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$ e per ogni $n \geq \nu_0$

$$|T_n(x) - T_m(x)|_Y \leq ||T_n - T_m||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \epsilon. \tag{3.1}$$

Per $m \to \infty$ si ottiene cosí che per ogni $n \geq \nu_0$

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} |T_n(x) - T(x)|_Y \leq \epsilon$$

ossia $T - T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ per ogni $n \geq \nu_0$ da cui $T = (T - T_n) + T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. Inoltre

$$||T - T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \epsilon \quad \forall n \geq \nu_0.$$

Da quest'ultima relazione segue che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Osserviamo anche che vale un viceversa del teorema precedente:

Teorema 3.10. Siano X, Y due spazi normati tale che $X' \neq \{0\}$. Se $\mathcal{L}(X,Y)$ é uno spazio completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ allora Y é uno spazio completo.

Dimostrazione. Si fissi $f \in X'$, $f \neq 0$. Sia x tale che $f(x) \neq 0$. Sia $(y_n)_n \subseteq Y$ una successione di Cauchy e sia $(T_n)_n$ la successione di funzionali lineari e continui $T_n : X \to Y$ definiti da $T_n(x) = f(x)y_n$. Si provi che $(T_n)_n$ é di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$. Esiste quindi $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. Segue che $f(x)y_n = T_n(x) \to T(x)$ ossia $y_n \to (f(x))^{-1}T(x)$. □

Osservazione 3.11. Grazie al Teorema di Hahn-Banach, l'ipotesi $X' \neq \{0\}$ nel Teorema 3.10 può essere sostituita dalla condizione più naturale che $X \neq \{0\}$.

Osservazione 3.12. Si osservi che se $||T_n - T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ allora per ogni $x \in X$ vale che $T_n(x) \to T(x)$ ma non vale il viceversa. Sia infatti $T_k : c_0 \to \mathbb{R}$ definito come

$$T_k(x) = x_k$$

per ogni $x = (x_n)_n \in c_0$. Allora $T_k(x) \to 0$ per ogni $x \in c_0$ ma $||T_k - 0||_{c_0'} = 1 \not\to 0$.

Osservazione 3.13. Per ogni $n, \in N$ sia $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ dove X, Y sono spazi normati e assumiamo che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. Mostrare che se $x_n \to x$ in X allora $T_n(x_n) \to T(x)$ in Y.

3.2. **Esercizi.**

Esercizio 3.14. Siano $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ due spazi normati e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Provare che l'applicazione $||\cdot||_T : X \to \mathbb{R}$ definita da

$$||x||_T := \|Tx\|_Y + ||x||_X$$

é una norma su X. Dimostrare inoltre che tale norma é equivalente alla norma $\|\cdot\|_X$ se e solo se T é continuo da $(X, ||\cdot||_X)$ in $(Y, ||\cdot||_Y)$.

Esercizio 3.15. Sia T : $c_0 \to c_0$ (dove c_0 denota lo spazio di Banach delle successioni infinitesime, dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$) l'operatore lineare definito da

$$T(x) = (x_n - x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$.

(1) Provare che T é continuo e calcolarne la norma;

(2) Per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ sia
$$||x||_T = \|Tx\|_\infty + ||x||_\infty.$$
Si verifichi che $\|\cdot\|_T$ é una norma equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

(3) dimostrare che T é iniettivo;

(4) stabilire se T é suriettiva su c_0. In caso contrario determinare l'insieme $T(c_0)$.

Esercizio 3.16. Sia $X = C[0,1]$ munito della norma del massimo. Sia
$$T(u) = \int_0^1 u(x)dx - u(1).$$
Verificare che T é un funzionale lineare e continuo di norma 2. Provare che non esiste $u \in X$ di norma unitaria tale che $T(u) = 2$.

Risoluzione: si verifica facilmente che T é un funzionale lineare. Inoltre per ogni $u \in C^0[0,1]$ $||T(u)||_\infty \le ||u||_\infty + |u(1)| \le 2||u||_\infty$. Quindi $||T|| \le 2$. Per dimostrare che $||T|| = 2$ proviamo che esiste una successione $(u_n) \subseteq C^0[0,1]$ tale che $||u||_\infty = 1$ e $\lim_n |T(u_n)| = 2$. Sia
$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \le x \le 1-\frac{1}{n} \\ -2nx+2n-1 & se\ 1-\frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}.$$
(su $1-\frac{1}{n} \le x \le 1$ prendo il segmento che unisce i punti $(1-\frac{1}{n},1)$ e $(0,-1)$. Allora $u_n = -1$ e
$$T(u_n) = 1 - \frac{1}{n} + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (-2nx+2n-1)dx + 1 = 2 - \frac{1}{n^2}$$
che tende a 2 per $n \to \infty$.

Esercizio 3.17. Siano X, Y, Z tre spazi vettoriali normati su K e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Provare che
$$||ST||_{\mathcal{L}(X,Z)} \le ||S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$
In particolare se $X = Y = Z$ allora
$$||T^n||_{\mathcal{L}(X,X)} \le ||T||^n_{\mathcal{L}(X,X)}$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(Osservare inoltre che in generale $||ST||_{\mathcal{L}(X,Z)} < |S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Si considerino infatti le proiezioni $P_1(x,y) = (x,0))$ e $P_2(x,y) = (0,y)$ definite da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$...)

Esercizio 3.18. Siano X, Y due spazi vettoriali normati su K e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Provare che
$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = \min\{M \ge 0 :\ |T(x)|_Y \le M|x|_X\ \forall x \in X\}.$$

Esercizio 3.19. **(Serie di Neumann)** Sia $(X, |\cdot|)$ uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $||T||_{\mathcal{L}(X)} < 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n : X \to X$ definito da
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n T^k(x)$$
dove
$$\begin{cases} T^0 = I \\ T^k = T \circ T^{k-1} \quad \forall k \ge 1. \end{cases}$$

Allora

(1) la successione $(S_n)_n$ converge in $\mathcal{L}(X)$ all'operatore $S \in \mathcal{L}(X)$ dato da
$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} T^k(x)$$
(ossia $||S_n - S||_{\mathcal{L}(X)} \to 0$);

(2) $S = (I-T)^{-1}$; in particolare $(I-T)$ ha inverso continuo;

(3) $||(I-T)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(X)}}$.

Dimostrazione.

(1) Grazie all'Esercizio 3.17 e procedendo per induzione si prova facilmente che
$$||T^k||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||T||^k_{\mathcal{L}(X)}.$$
Poiché $||T||_{\mathcal{L}(X)} < 1$, segue che
$$\sum_{k=0}^{\infty} ||T^k||_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T||^k_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(X)}} \in \mathbb{R}.$$
Dal criterio di Weirstrass per le serie, la successione (S_n) risulta convergente nello spazio $\mathcal{L}(X)$ ossia esiste $S \in \mathcal{L}(X)$ tale che $||S_n - S||_{\mathcal{L}(X)} \to 0$. In particolare, usando la Proposizione 3.13,
$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad \forall x \in X.$$
Inoltre per ogni $x \in X$ vale che
$$\sum_{k=0}^{\infty} ||T^k(x)|| = \sum_{k=0}^{\infty} ||T^k(x)|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T||^k ||x|| = \frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(X)}} ||x|| < +\infty$$
che implica che la successione $||T^k(x)||_X \to 0$ ossia $T^k(x) \to 0$ in X. Inoltre, sempre dal criterio di Weirstrass per le serie,
$$||S||_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T^k||_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T||^k_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(X)}}.$$

(2) Dobbiamo provare che $(I-T)S = I = S(I-T)$. Proviamo per esempio che $S - TS = I$. Infatti, essendo T continuo e lineare,
$$S(x) - T(S(x)) = \lim_{n\to\infty} \big(\sum_{k=0}^{n} T^k(x) - T(\sum_{k=0}^{n} T^k(x)) \big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k(x) - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1}(x) = \lim_{n\to\infty} T^0(x) - T^{n+1}(x) = x.$$

□

Esercizio 3.20. **(Serie esponenziale)** Sia $(X, |\cdot|)$ uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n : X \to X$ definito da
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k(x)}{k!}.$$

Allora

(1) la successione $(S_n)_n$ converge in $\mathcal{L}(X)$ all'operatore $S \in \mathcal{L}(X)$ dato da
$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k(x)}{k!}.$$
(ossia $||S_n - T||_{\mathcal{L}(X)} \to 0$). Tale operatore viene indicato con $S = e^T$ ed è noto come **esponenziale di** T;
(2) $||e^T||_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{||T||_{\mathcal{L}(X)}}$;
(3) $e^0 = I$;
(4) se $TS = ST$ allora $(T+S)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} T^j S^{k-j}$ da cui
$$e^{T+S} = e^T \circ e^S = e^S \circ e^T.$$
(5) poiché $T(-T) = (-T)T = -T^2$ sia ha che $I = e^0 = e^{T-T} = e^T \circ e^{-T}$. Analogamente $I = e^{-T}e^T$, Quindi l'operatore e^T è invertibile e $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Esercizio 3.21. Sia $T : X \to Y$ un funzionale lineare e iniettivo. Allora si ha che l'operatore inverso $T^{-1} : T(X) \to X$ é continuo $\iff \inf\{||T(x)||_Y : \ |x| = 1\} = \alpha > 0$. In tal caso $||T^{-1}||_{(T(X),Y)} = \frac{1}{\alpha}$.

Esercizio 3.22. Siano X, Y spazi normati e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Dimostrare che $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ se e solo se $T(A)$ é limitato in Y per ogni sottoinsieme limitato $A \subseteq X$.

Esercizio 3.23. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un funzionale lineare la cui matrice associata $A = (a_{ij})$ sia diagonale. Dimostrare che $||T|| = \sup\{|a_{ii}| : 1 \leq i \leq n\}$.

Esercizio 3.24. Sia c_0 munito della norma del sup. Sia $T_k : c_0 \to c_0$ tale che $T_k(x) = (x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.
(1) Provare che T_k é un operatore lineare e continuo per ogni k;
(2) calcolare la norma di T_k;
(3) provare che $|T_k(x)|_{c_0} \to 0$ quando $k \to \infty$;
(4) $T_k \to 0$ in c_0'?

Esercizio 3.25. Sia c_0 lo spazio delle successioni reali che tendono a 0. Muniamo c_0 della norma del sup. Sia $T : c_0 \to \mathbb{R}$
$$T((a_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$
Dimostrare che T é continuo e calcolare la norma. Esiste un elemento $a \in c_0$ tale che $||a||_\infty = 1$ e $T(a) = 2$?

Esercizio 3.26. Siano $f_n \in C(K)$ dove K é un compatto di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $f_n \to f$ rispetto alla norma del sup. Allora
(1) $|f_n| \to |f|$ rispetto alla norma del sup;
(2) per ogni $(x_n) \subseteq K$ se $x_n \to x_0$ allora $f_n(x_n) \to f(x_0)$;
(3) se $f_n(x_n) = \min_K f_n$ e $x_n \to x_0$ allora $f(x_0) = \min_K f$;
(4) se $f_n(x_n) = \max_K f_n$ e $x_n \to x_0$ allora $f(x_0) = \max_K f$.

Esercizio 3.27. Sia $X = C^0[0,1]$ munito della norma del massimo. Sia $x_0 \in (0,1)$ e sia
$$T_{x_0}(u) = u(x_0) - \int_0^1 u(x)dx.$$
Verificare che T_{x_0} é un funzionale lineare e continuo di norma 2. Esiste $u \in X$ tale che $||u||_\infty = 1$ e $T_{x_0}(u) = 2$?

Esercizio 3.28. Sia $X = C^1[0,1]$ munito della norma del massimo e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$T_n(u) = \int_0^1 u(x)dx - \frac{1}{n}u(1)$$

Verificare che T_n é un funzionale lineare e continuo di norma $1 + \frac{1}{n}$. Dimostrare che T_n converge nella norma di X' all'operatore $T(u) = \int_0^1 u(x)dx$.

Esercizio 3.29. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia inoltre X uno spazio di Banach e sia $T \in X'$ un operatore con norma $||T|| < R$. Si provi che

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| ||T||^n \in \mathbb{R}$
(2) l'operatore $A : X \to \mathbb{R}$ definito da

$$A(v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n(v)$$

é ben definito, lineare e continuo, con norma

$$||A|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| ||T||^n;$$

(3) $AT = TA$.

(si confronti con la serie di Neumann)

Esercizio 3.30. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che l'insieme

$$GL = \{T \in \mathcal{L}(X) : \exists\, T^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

é aperto in $\mathcal{L}(X)$.

Sia $T \in GL$. Sia G tale che $|T - G|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$ con ϵ da scegliere in modo che $G \in GL$. Ora

$$G \in GL \iff G = T + (G - T) = T \circ (I + T^{-1}(G - T)) \in GL \iff I + T^{-1}(G - T) \in GL.$$

Per l'esercizio precedente basta scegliere $\epsilon > 0$ in modo che $|T^{-1}(G - T)|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ ossia basta scegliere $\epsilon < \frac{1}{|T^{-1}|}$.

4. Gli spazi $L^p_\mu(\Omega)$.

Definizione 4.1. *Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Σ si dice una* **σ-algebra** *o* **tribù** *se*

(1) $\emptyset \in \Sigma$;
(2) *per ogni $U \in \Sigma$ si ha $U^c (:= \Omega \setminus U) \in \Sigma$.*
(3) *per ogni famiglia $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ si ha che $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in \Sigma$.*

La coppia (Ω, Σ) si dice **spazio misurabile***.*

Osservazione 4.2. Si osservi che

(1) grazie alla proprietà (2), nella precedente definizione la proprietà (3) é equivalente alla:
  (3′) *per ogni famiglia $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ vale che $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \in \Sigma$;*
(2) $\mathcal{P}(\Omega)$ é una σ-algebra;
(3) l'intersezione di una famiglia qualunque di σ-algebre é ancora una σ-algebra.

Definizione 4.3. *Sia $\Omega \neq \emptyset$ un insieme e sia $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-algebra. Un'applicazione $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ si dice una* **misura (positiva)** *se*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;
(2) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n)$ *per ogni famiglia $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tale che $U_n \cap U_k = \emptyset$ per ogni $n \neq k$ (proprietà di σ-additività).*

La terna (Ω, Σ, μ) viene detta **spazio di misura** *e ogni insieme $E \in \Sigma$ si dice* **μ-misurabile***.*

Dalla proprietá di additivitá segue banalmente che una misura é monotona crescente rispetto l'inclusione.

Esempio 4.4. Un esempio di misura su $(\Omega, \sigma) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ é dato dalla **misura del contare** $\#$ definita su $E \subset \mathbb{N}$ come

$$\#(E) = \begin{cases} \text{numero di elementi di E} & \text{se E é finito;} \\ +\infty & \text{se E é infinito.} \end{cases}$$

Osservazione 4.5. Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura. Sia $F \subset \Omega$ si dice **μ-trascurabile** se esiste $N \in \Sigma$ tale che $F \subset N$ e $\mu(N) = 0$. Una misura μ si dice **completa** se ogni insieme μ-trascurabile appartiene a Σ. Se una misura μ non é completa, si può costruire il suo completamento in questo modo. La famiglia

$$\Sigma_\mu := \{E \cup F \ : \ E \in \Sigma,\ F \ \mu\text{-trascurabile}\}$$

é ancora una σ algebra e la misura μ si estende ad una misura $\tilde{\mu}$ su Σ_μ ponendo $\tilde{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Quando parleremo di misure, le intenderemo sempre complete.

Definizione 4.6. *Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura. Diremo che una proprietà $\mathcal{P}$ vale μ-q.o. $x \in \Omega$ se l'insieme $\{x \in \Omega; x \text{ non soddisfa } \mathcal{P}\}$ é un insieme di misura μ nulla.*

Definizione 4.7. *Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura e sia Y uno spazio topologico.*

(1) *Una funzione $f : \Omega \to Y$ si dice* **μ-misurabile** *se per ogni aperto $A \subset Y$ si ha che $f^{-1}(A)$ é μ-misurabile.*
(2) *Siano $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili. Diremo che $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ μ-q.o. $x \in \Omega$.*

Definizione 4.8. *Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura. Una funzione (misurabile) $s : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice* **semplice** *se se esiste $n \in \mathbb{N}$, esistono $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ ed $E_1, \cdots, E_n \in \Sigma$ disgiunti tali che, definita χ_{E_i} la funzione caratteristica associata a E_i, valga*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Definizione 4.9. *Sia $s : \Omega \to \mathbb{R}^+$ una funzione semplice della forma $s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$. Definiamo* **integrale** *di s su Ω rispetto alla misura μ*

$$\int_\Omega s d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i) (\in [0, +\infty]).$$

Definizione 4.10. *Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura.*

(1) *Sia $f : \Omega \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Definiamo integrale di f rispetto alla misura μ*

$$\int_\Omega f d\mu := \sup \left\{ \int_\Omega s d\mu : \ s(x) \leq f(x) \text{ a.e. } x, \ s \text{ funzione semplice} \right\}.$$

(2) *Sia $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile e siano $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = -(f \wedge 0)$. Diremo che f é μ-integrabile se $\int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$ non é una forma indeterminata. Se f é μ-integrabile, poniamo*

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

(3) *Sia $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Diremo che f é μ-sommabile se $\int_\Omega f^+ d\mu \in \mathbb{R}$ e $\int_\Omega f^- d\mu \in \mathbb{R}$ In particolare f é μ-sommabile se e solo se $|f|$ é μ-sommabile ossia se*

$$\int_\Omega |f| d\mu \in \mathbb{R}.$$

(4) *Per $1 \leq p < +\infty$ definiamo*

$$L^p_\mu(\Omega) := \{[u]_\sim : |u|^p \text{ sommabile}\}.$$

Per ogni $u \in L^p_\mu(\Omega)$ definiamo

$$\boxed{||u||_p := (\textstyle\int_\Omega |u|^p d\mu)^{1/p}};$$

(5) *per $p = \infty$ definiamo*

$$L^\infty_\mu(\Omega) := \{[u]_\sim : \text{ esiste } C \geq 0 \text{ tale che } |u(x)| \leq C \ \mu\text{-q.o.}x \in \Omega\}.$$

Per ogni $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$ definiamo

$$\boxed{||u||_\infty := \inf\{C \geq 0 : \ |u(x)| \leq C \ \mu\text{-q.o.}x \in \Omega\}.}$$

Per brevità scriveremo L^p in luogo di $L^p_\mu(\Omega)$.

Si osservi che per ogni $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$ vale

$$|u(x)| \leq ||u||_\infty \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in \Omega.$$

Teorema 4.11. *Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$ e sia $p' \in [1, \infty]$ l'esponente coniugato di p ossia tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (con la convenzione che $1' = \infty$ e $(\infty)' = 1$). Allora*

(1) *Lo spazio L^p ha la struttura di spazio vettoriale rispetto le usuali operazioni di somma di funzioni e prodotto per uno scalare*

(2) **(Disuguaglianza di Hölder)** *Per ogni $u \in L^p$ e $v \in L^{p'}$ si ha che $uv \in L^1$ e*

$$||uv||_1 \leq ||u||_p ||v||_{p'};$$

(3) **(Disuguaglianza di Minkoskii)** *Per ogni $u, v \in L^p$ si ha che $u + v \in L^p$ e*

$$||u + v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p;$$

(4) **(Teorema di Fisher-Riesz)** *lo spazio $(L^p, || \cdot ||_p)$ é uno spazio normato completo;*

(5) *se* $(u_n)_n \subseteq L^p$ *é tale che* $u_n \to u$ *in* L^p *allora esiste una sottosuccessione tale che* $u_{k_n}(x) \to u(x)$ *per q.o.* $x \in \Omega$.

Ricordiamo infine i seguenti teoremi di passaggio al limite:

Teorema 4.12 (**Teorema di Beppo-Levi**). *Sia* $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ *una successione crescente di funzioni misurabili. Allora*

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu$$

Teorema 4.13 (**Lemma di Fatou**). *Sia* $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ *una successione di funzioni misurabili. Allora*

$$\int_\Omega \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n d\mu.$$

Teorema 4.14 (**Teorema di Lebesgue**). *Sia* $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ *una successione di funzioni misurabili. Supponiamo che:*

(1) *esiste il* $\lim_n f_n(x) (:= f(x))$ *per* μ*-a.e.* $x \in \Omega$*;*
(2) *esiste* $g : \Omega \to [0, +\infty]$ μ*-sommabile tale che per* μ*-a.e.* $x \in \Omega$

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Allora

$$\lim_n \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Teorema 4.15. *Sia* (Ω, Σ, μ) *uno spazio di misura tale che* $\mu(\Omega) < +\infty$. *Sia* $1 \leq p < q \leq +\infty$. *Allora*

$$\boxed{||u||_p \leq \mu(\Omega)^{1/p - 1/q} ||u||_q \quad \forall u \in L^p_\mu(\Omega),}$$

ossia l'inclusione di $L^q_\mu(\Omega)$ *in* $L^p_\mu(\Omega)$ *è continua.*

Dimostrazione. Si consideri la funzione $v(x) \equiv 1 \in L^r_\mu(\Omega)$ e $r = \frac{q}{p} > 1$. Quindi $|u|^p \in L^r$ e $v \in L^{r'}$ da cui, applicando la disuguaglianza di Hölder, segue che

$$||u||_p^p = \int_\Omega |u|^p d\mu = \int_\Omega v(x)|u|^p d\mu \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{r'}} ||u^p||_r = (\mu(\Omega))^{1 - \frac{p}{q}} ||u||_q^p.$$

□

4.1. **Gli spazi** ℓ^p**.** Consideriamo $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ con la **misura del contare** $\#$ e identifichiamo ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con la successione reale $(a_n)_n$ definita come $a_n = f(n)$ e viceversa. Allora abbiamo l'identificazione tra la successione numerica $e_k = (\delta_k^n)_n$ e la funzione semplice $\chi_{\{k\}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ossia

$$e_k = (\delta_k^n)_n = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-posto}}, 0, 0, \cdots) \equiv \chi_{\{k\}}$$

il cui integrale, rispetto la misura del contare, vale 1. Allora ogni $a = (a_n) \in c_{00}$,

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_k, 0, 0, \cdots) = \sum_{h=1}^k a_h e_h = \sum_{h=1}^k a_h \chi_{\{h\}}$$

è una funzione semplice e

$$\int_{\mathbb{N}} a d\# = \sum_{h=1}^k a_h \#\{h\} = \sum_{h=1}^k a_h.$$

Si prova, in generale, che per ogni successione $a = (a_n)$ e per ogni $1 \le p < +\infty$

$$\int_{\mathbb{N}} |a|^p d\# = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$$

da cui

$$(a_n) \in L^p_{\#} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty.$$

Se $1 \le p < \infty$, lo spazio $L^p_{\#}$ viene identificato con lo spazio delle successioni

$$\boxed{\ell^p := \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\}}$$

munito della norma

$$||(a_n)||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$$

Dalla convergenza della serie sopra, segue che $\ell^p \subseteq c_0$.

Analogamente lo spazio $L^{\infty}_{\#}$ viene identificato con lo spazio ℓ^{∞} delle successioni

$$\boxed{\ell^{\infty} := \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \ (a_n)_n \text{ limitata}\}}$$

munito della norma

$$||(a_n)||_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Possiamo riscrivere il Teorema 4.11 nel modo seguente

Teorema 4.16. *Sia $p \in [1, \infty]$. Allora lo spazio ℓ^p ha la struttura di spazio vettoriale rispetto le usuali operazioni di somma di funzioni e prodotto per uno scalare. Inoltre*

(1) **(Disuguaglianza di Hölder)** *per ogni $a = (a_n) \in \ell^p$ e $b = (b_n) \in \ell^{p'}$ si ha che la successione $(ab) = (a_n b_n) \in \ell^1$ e*
$$||ab||_1 \le ||a||_p ||b||_{p'};$$
(2) **(Disuguaglianza di Minkoskii)** *per ogni $a = (a_n), b = (b_n) \in \ell^p$ si ha che $a + b = (a_n + b_n)_n \in \ell^p$ e*
$$||a + b||_1 \le ||a||_p + ||b||_p;$$
(3) **(Teorema di Fisher-Riesz)** *lo spazio $(\ell^p, || \cdot ||_p)$ é uno spazio di Banack;*
(4) *se $a^{(n)} = (a^n_k)_k \in \ell^p$ é tale che $||a^{(n)} - a||_p \to 0$ dove $a = (a_k) \in \ell^p$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che $a^n_k \to a_k$ per $n \to \infty$.*

Proposizione 4.17. *Sia $1 \le p < q \le +\infty$. Allora $c_{00} \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^q$ e*

$$||a||_q \le ||a||_p \quad \forall a \in \ell^p,$$

ossia l'inclusione di ℓ^p in ℓ^q è continua. Inoltre c_{00} é denso in ℓ^p per ogni $1 \le p < +\infty$ ossia

$$\overline{c_{00}}^{\ell^p} = \ell^p \quad \forall p \in [1, +\infty).$$

Dimostrazione. L' inclusione $c_{00} \subseteq \ell^p$ è banale. Se $q = +\infty$ segue dal fatto che ogni successione $a = (a_n) \in \ell^p$ è infinitesima e quindi appartiene a l^{∞}. Inoltre per ogni $a = (a_n) \in \ell^p$ vale che

$$|a_n| = (|a_n|^p)^{1/p} \le (\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p)^{1/p} = ||a||_p \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui
$$\sup_n |a_n| \leq ||a||_p.$$
Se $q < +\infty$ allora se $a = 0$ è banale. Supponiamo $a \neq 0$ e definiamo $b = (\frac{a_n}{||a||_\infty})$. Se proviamo che $||b||_q \leq ||b||_p$, segue che
$$\frac{||a||_q}{||a||_\infty} \leq \frac{||a||_p}{||a||_\infty}$$
da cui $||a||_q \leq ||a||_p$.

Ricordiamo che

(1) se $1 \leq p < q$ allora
$$|x| \leq 1 \Longleftrightarrow |x|^q \leq |x|^p;$$
(2) $\alpha > 0 \Longrightarrow x \to x^\alpha$ è monotona crescente su $\mathbb{R}^+$;
(3) $a > 1 \Longrightarrow x \to a^x$ è monotona crescente.

Poiché $||b|| = 1$ vale che $|b_n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ che implica, per la (1),
$$|b_n|^q \leq |b_n|^p$$
da cui
$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p < +\infty$$
e quindi, per la (2),
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{1/q}.$$
Poi osserviamo che $||b||_\infty = 1$ e $b \in c_0$. Quindi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|b_n| < \frac{||b||}{2}$ $\forall n \geq n_0 - 1$. Quindi $1 = ||b|| = \max_{n \leq n_0 - 1} |b_n|$. Pertanto
$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p$$
che implica, per la (3),
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{1/p}$$
da cui la tesi.

Infine, poiché ℓ^p é uno spazio di Banach, vale che $\overline{c_{00}}^{\ell^p} \subseteq \ell^p$. Per concludere basta osservare che ogni $x = (x_n)_n \in \ell^p$ é il limite (rispetto alla norma $\| \cdot \|_p$) della successione $(x^{(n)})_n \subseteq c_{00}$ definita come $x^{(n)} = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots,)$. Infatti
$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x||_p = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$
grazie al criterio di Cauchy per le serie convergenti. □

Esercizio 4.18. *Provare che se $p < q$ allora esiste $x \in \ell^q \setminus \ell^p$.*

4.2. **Gli spazi duali di ℓ^p e $L^p_\mu(\Omega)$.**

Teorema 4.19. *Sia (Ω,Σ,μ) uno spazio di misura, sia $1 \le p \le \infty$ e sia $u \in L^{p'}_\mu(\Omega)$. Allora l'operatore $T_u : L^p_\mu(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito come*

$$T_u(v) := \int_\Omega uv d\mu.$$

é un funzionale lineare e continuo su $L^p_\mu(\Omega)$ la cui norma soddisfa la relazione

$$||T_u||_{(L^p_\mu(\Omega))'} = ||u||_{L^{p'}_\mu(\Omega)}.$$

In particolare l'applicazione $T : L^{p'}_\mu(\Omega) \to (L^p_\mu(\Omega)'$, definita da $T(u) := T_u$, è un'isometria.

Corollario 4.20 (Caso $(\Omega,\Sigma,\mu) = (\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\#)$)**.** *Sia $1 \le p \le \infty$. Sia $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}$ con p' il coniugato di p. Allora l'operatore $T_b : \ell^p \to \mathbb{R}$ definito da*

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

é un operatore lineare e continuo di norma $||T_b||_{(\ell^p)'} = ||b||_{\ell^{p'}}$. In particolare l'applicazione $T : \ell^{p'} \to (\ell^p)'$ definita da $T(b) = T_b$ é un'isometria.

Dimostrazione. [**del Teorema 4.19**] La linearità di T_u segue dalla linearità dell'integrale. Dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$||T_u||_{(L^p_\mu(\Omega))'} \le ||u||_{L^{p'}_\mu(\Omega)}. \tag{4.1}$$

Inoltre

(1) se $1 < p < \infty$ per
$$v(x) := |u(x)|^{p'-1} segn(u(x))$$
(con $v(x) = 0$ se $u(x) = 0$) si ha che $v \in L^p(\Omega)$ e $||v||_{L^p_\mu(\Omega)} = ||u||^{p'/p}_{L^p_\mu(\Omega)}$. Da ciò segue che
$$||T_u||_{(L^p(\Omega))'} \ge \frac{|T_u(v)|}{||v||_{L^p_\mu(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega |u|^{p'} d\mu}{||u||^{p'/p}_{L^{p'}_\mu(\Omega)}} = ||u||_{L^{p'}_\mu(\Omega)}$$
che, insieme alla (4.1), implica
$$||T_u||_{(L^p_\mu(\Omega))'} = ||u||_{L^{p'}_\mu(\Omega)}.$$

(2) se $p = 1$ allora $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$. Per ogni $\epsilon > 0$ sia $B_\epsilon \subset \Omega$ misurabile tale che $\mu(B_\epsilon) \in (0,+\infty)$ e
$$|u(x)| > ||u||_\infty - \epsilon \quad \forall x \in B_\epsilon.$$
Allora la funzione $v_\epsilon(x) := \frac{1}{\mu(B_\epsilon)}\chi_{B_\epsilon}$ é tale che $||v_\epsilon||_{L^1_\mu(\Omega)} = 1$ e
$$T(v_\epsilon) = \int_\Omega v_\epsilon u d\mu \ge ||u||_\infty - \epsilon$$
da cui $||T_u|| \ge ||u||_\infty - \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$. Per $\epsilon \to 0$ segue $||T_u|| \ge ||u||_\infty$ che, insieme alla (4.1), implica $||T_u||_{(L^1(\Omega))'} = ||u||_{L^\infty(\Omega)}$.

(3) se $p = \infty$, allora $u \in L^1_\mu(\Omega)$ e la funzione
$$v(x) := segn(u(x))$$

(con $v(x) = 0$ se $u(x) = 0$) é tale che $v \in L^\infty_\mu(\Omega)$ e $||v||_{L^\infty(\Omega)} = 1$. Dalla definizione di norma di T_u segue che

$$||T_u||_{(L^\infty_\mu(\Omega))'} \geq T_u(v) = \int_\Omega u \cdot segn(u) d\mu = \int_\Omega |u| d\mu = ||u||_{L^1_\mu(\Omega)}$$

che, insieme alla (4.1), implica

$$||T_u||_{(L^\infty_\mu(\Omega))'} = ||u||_{L^1_\mu(\Omega)}.$$

□

Esempio 4.21. Sia $X = \ell^1$ e sia $T : \ell^1 \to \mathbb{R}$ cosí definito: per ogni $a = (a_n) \in \ell^1$

$$T(a) := \sum_{n=1}^\infty a_n (1 - \frac{1}{n}).$$

Provare che T é lineare e continuo con $||T|| = 1$. Esiste $a \in \ell^1$ con $|a|_{\ell^1} = 1$ tale che $T(a) = 1$?

Risoluzione: poiché T é della forma

$$T(a) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$$

con $b = (b_n)_n = (1 - \frac{1}{n})_n \in \ell^\infty$, basta applicare il Corollario **??** per concludere che $T \in (\ell^1)'$ con $||T|| = |b|_\infty = 1$. Infine se esistesse $a \in \ell^1$ con $|a|_{\ell^1} = 1$ tale che $T(a) = 1$ avremmo

$$\sum_{n=1}^\infty a_n (1 - \frac{1}{n}) = 1 = \sum_{n=1}^\infty |a_n|$$

che implicherebbe

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| - a_n (1 - \frac{1}{n}) = 0.$$

Poiché $a_n(1 - \frac{1}{n}) \leq |a_n(1 - \frac{1}{n})| < |a_n|$ tale serie é una serie a termini strettamente positivi con somma nulla. Assurdo.

Esercizio 4.22. Sia $X = \ell^1$ e sia $F_n : X \to \mathbb{R}$ la successione di funzionali cosí definiti:

$$F_n(x) = \frac{x_n + x_{n+1}}{n}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in N} \in X$.

(1) Calcolare $||F_n||$;

(2) Dimostrare che $F_n \to 0$ in X'.

Esercizio 4.23. Sia $F_n : \ell^2 \to \mathbb{R}$ la successione di funzionali cosí definiti:

$$F_n(x) = x_n$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in N} \in \ell^2$.

(1) Calcolare $||F_n||_{(\ell^2)'}$;

(2) Dimostrare che $F_n(x) \to 0$ per ogni $x \in \ell^2$ ma F_n non converge a zero in $(\ell^2)'$.

Osservazione 4.24. Alla fine del corso, dimostreremo che nel caso $1 \leq p < +\infty$ l'isometria nel Teorema 4.19 é suriettiva. Per ora lo dimostriamo nel caso degli spazi ℓ^p. Inoltre, nel caso $p = \infty$ sarà esibito un funzionale T su $L^\infty_\mu(\Omega)$ che non é rappresentabile nella forma

$$T(v) = \int_\Omega uv d\mu$$

con $u \in L^1_\mu(\Omega)$.

Il Corollario 4.20 afferma che l'operatore $T : \ell^{p'} \to (\ell^p)'$ definito da $T(b) = T_b$ é un'isometria. **Se $p \neq \infty$ si prova che tale isometria é suriettiva.**

Teorema 4.25 (Teorema di rappresentazione). *Sia $1 \leq p < +\infty$. Allora l'applicazione $T : \ell^{p'} \to (\ell^p)'$ definita da $T(b) = T_b$ é un'isometria suriettiva ossia*

(1) $||T_b||_{(\ell^p)'} = ||b||_{\ell^{p'}}\ \forall\, b \in \ell^{p'}$

(2) $\forall\, \varphi \in (l^p)'$ *esiste uno ed un solo* $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}$ *tale che* $\varphi = T_b$.

In particolare il duale di ℓ^p é lo spazio $\ell^{p'}$.

Osservazione 4.26. Nel caso $p = \infty$ nell'Esempio 8.11 verrà esibito un funzionale lineare e continuo su ℓ^∞ che non é rappresentabile nella forma

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \forall a \in \ell^\infty$$

con $b \in \ell^1$.

Dimostrazione del Teorema 4.25, parte (2). Sia $\varphi \in (\ell^p)'$ e poniamo $b_n := \varphi(e_n)$. Proviamo che

(i) $b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}$

(ii) $\varphi = T_b$ ossia $\varphi(a) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n \quad \forall a = (a_n) \in \ell^p$.

Allo scopo di provare la parte (i) distinguiamo due casi.

Primo caso: $p = 1$ (da cui $p' = \infty$). Sia $x^{(n)} = (x^n_k)_k$ definita come

$$x^{(n)} = (segn(b_n)\delta^k_n)_k = (0, \cdots, 0, \underbrace{segn(b_n)}_{n\text{-posto}}, 0, \cdots)$$

Ovviamente (escludendo il caso banale $b = 0$) si ha che $||x^{(n)}||_{\ell^1} = 1$ e, dalla continuità di φ, segue che

$$+\infty > ||\varphi||_{(l^1)'} \geq |\varphi(x^{(n)})| = |b_n|$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo implica che $\sup_n |b_n| \leq ||\varphi||_{(\ell^1)'} < +\infty$ da cui $b \in \ell^\infty$ e $||\varphi||_{(\ell^1)'} \geq ||b||_{\ell^\infty}$.

Secondo caso: $1 < p < \infty$. Sia $x^{(n)} = (x^n_k)_k \in c_{00}$ definita da

$$x^n_k = \begin{cases} |b_k|^{p'-1} segn(b_k) & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora si ha che $x^{(n)} \in c_{00} \subset \ell^p$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(x^{(n)})| = |\sum_{k=1}^n segn(b_k)|b_k|^{(p'-1)}\varphi(e_k)| = \sum_{k=1}^n |b_k|^{p'}$$

da cui segue che

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p'} = |\varphi(x^{(n)})| \leq ||\varphi||_{(\ell^p)'}||x^{(n)}||_{\ell^p} = ||\varphi||_{(\ell^p)'}(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p(p'-1)})^{\frac{1}{p}}$$

ossia

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p'} \leq ||\varphi||_{(\ell^p)'}(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p'})^{\frac{1}{p}}$$

essendo $p(p'-1) = p'$.

Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\big(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p'}\big)^{\frac{1}{p'}} \leq ||\varphi||_{(\ell^p)'}.$$

In particolare la serie $\big(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^{p'}\big)^{\frac{1}{p'}} < +\infty$ da cui segue che $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}$ e

$$||b||_{p'} \leq ||\varphi||_{(\ell^p)'}. \tag{4.2}$$

Proviamo ora la parte (ii). Per ogni $x = (x_n)_n \in c_{00}$, vale che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$. Grazie alla linearità di φ e di T_b si ottiene che

$$T_b(x) = T_b(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n T_b(e_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n b_n = \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi(e_n) = \varphi(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n) = \varphi(x)$$

ossia $T_b = \varphi$ su c_{00} che é denso in ℓ^p ed entrambi sono operatori lineari e continui. Allora segue che $T_b = \varphi$ su ℓ^p. □

Osservazione 4.27. Sia $1 \leq p \leq \infty$ e $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supponiamo **di sapere** che $T_c : \ell^p \to \mathbb{R}$ definito da

$$T_c(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \quad \forall a \in \ell^p$$

é un operatore lineare e continuo. Proviamo che $(c_n) \in \ell^{p'}$ e $||T_c||_{(\ell^p)'} = ||c||_{\ell^{p'}}$. Infatti se $1 \leq p < +\infty$, per ogni n vale che $c_n = T(e_n)$ e basta quindi applicare il Teorema di rappresentazione 4.25. Invece se $p = +\infty$, si consideri $x^{(n)} = (x_k^n)$ definita da

$$x_k^n = \begin{cases} segn(c_k) & \text{se } k \leq n \text{ e } c_k \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora si ha che se almeno un b_k è $\neq 0$ con $k \leq n$ allora

$$||x^{(n)}||_{\ell^\infty} \leq 1 \vee 0$$

(altrimenti è 0) e, usando la continuità di T, segue che

$$+\infty > ||T_c||_{(\ell^\infty)'} \geq |T_c(x^{(n)})| = \sum_{k=1}^{n}|c_k| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue che

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \leq ||T_c||_{(\ell^\infty)'} < +\infty$$

e quindi $c \in \ell^1$. A questo punto applicando il Corollario 4.20 segue che $||T_c||_{(\ell^p)'} = ||c||_{\ell^{p'}}$.

4.3. **Esercizi.**

Esercizio 4.28. Sia $X = l^1$ e sia $F_n : X \to \mathbb{R}$ la successione di funzionali cosí definiti:

$$F_n(x) = \frac{x_n + x_{n+1}}{n}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in N} \in X$.

(1) Calcolare $||F_n||$;

(2) Dimostrare che $F_n \to 0$ in X'.

Esercizio 4.29. Sia $X = l^1$ e sia $T : l^1 \to \mathbb{R}$ cosí definito: per ogni $a = (a_n) \in l^1$

$$T(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1 - \frac{1}{n}).$$

Provare che T é lineare e continuo con $||T|| = 1$. Esiste $a \in l^1$ con $|a|_{l^1} = 1$ tale che $T(a) = 1$?

Risoluzione: Si ha che

$$|T((a_n))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

e scelta la successione $(a_k)_k \subseteq l^1$ definita da $a_k = (\delta_n^k)_n$ si ha che $|a_k|_{l^1} = 1$ e

$$T(a_k) = (1 - \frac{1}{k}) \to 1$$

quando $k \to \infty$. Quindi $||T|| = 1$.
(Oppure: poiché T é della forma

$$T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

con $b = (b_n)_n = (1 - \frac{1}{n})_n \in l^\infty$, basta applicare il teorema di rappresentazione del duale di l^1 per concludere che T é un funzionale lineare e continuo su l^1 con $||T|| = |b|_\infty = 1$.) Infine non esiste alcun $a \in l^1$ con $|a|_{l^1} = 1$ tale che $T(a) = 1$. Infatti se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1 - \frac{1}{n}) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

che implicherebbe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - a_n(1 - \frac{1}{n}) = 0.$$

Poiché

$$a_n(1 - \frac{1}{n}) \leq |a_n(1 - \frac{1}{n})| < |a_n|$$

tale serie é una serie a termini strettamente positivi con somma nulla. Assurdo.

Esercizio 4.30. Sia $X = l^2$ e sia $F_n : X \to \mathbb{R}$ la successione di funzionali cosí definiti:

$$F_n(x) = x_n$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in N} \in X$.

(1) Calcolare $||F_n||$;

(2) Dimostrare che $F_n(x) \to 0$, per ogni $x \in X$ ma F_n non converge a zero in X'.

Esercizio 4.31. Sia $T_k : l_1 \to l_1$ tale che $T_k(x) = (\frac{x_{n+k}}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$.

(1) Provare che T_k é un operatore lineare e continuo per ogni k;
(2) calcolare la norma di T_k;
(3) provare che $|T_k(x)|_{l_1} \to 0$ quando $k \to \infty$;
(4) $T_k \to 0$ in norma?

5. **Lemma di Zorn**

Ricordiamo che una relazione d'ordine su un insieme X é una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se su X é data una relazione d'ordine $\leq$, l'insieme X o meglio la coppia $(X, \leq)$ si dice insieme parzialmente ordinato.

Definizione 5.1. *Sia $(X, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, sia $Q \subseteq X$ e $M \in X$.*

- *M si dice* **maggiorante per** Q *se $q \leq M$ per ogni $x \in Q$;*
- *Q si dice* **totalmente ordinato** *se per ogni $q, q' \in Q$ vale che $q \leq q'$ o $q' \leq q$;*
- *M si dice* **massimale in X** *se non esiste $x \in X \setminus \{M\}$ tale che $M \leq x$;*
- *X si dice* **induttivo** *se ogni sottoinsieme $Q \subseteq X$ totalmente ordinato ammette un elemento maggiorante in X.*

Lemma 5.2 (di Zorn). *Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto, parzialmente ordinato e induttivo. Allora X possiede elementi massimali.*

Nei prossimi esercizi utilizzeremo il lemma di Zorn per dimostrare l'esistenza di una base di Hamel e di un operatore lineare e non continuo su un qualunque spazio vettoriale normato di dimensione infinita.

Sia E uno spazio vettoriale su K. Ricordiamo che un sottoinsieme qualunque $S \subseteq E$ é un **sistema di vettori linearmente indipendenti** se ogni sottoinsieme finito di vettori di S é linearmente indipendente.

Teorema 5.3 (di esistenza di basi di Hamel). Sia E uno spazio vettoriale infinito dimensionale su K.

(1) Sia $\mathcal{S} := \{S \subseteq E : \ S$ sistema di vettori linearmente indipendenti$\}$. Dimostrare che esiste un elemento $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ massimale rispetto alla relazione di inclusione tra insiemi.

(2) Dimostrare che per ogni $v \in E$ esiste un unico $n \in \mathbb{N}$, un'unica scelta di $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ distinti tra loro ed un'unica scelta di $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

(per tale motivo $\mathcal{B}$ si dice **base algebrica o base di Hamel**).

Dimostrazione.

(1) Sia

$$\mathcal{S} := \{S \subseteq E : \ S \text{ linearmente indipendente in } E\}.$$

Tale famiglia é non vuota ed é ordinata parzialmente per inclusione.
Proviamo che $\mathcal{S}$ è induttivo. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ un sottoinsieme totalmente ordinato. Allo scopo di provare che $\mathcal{F}$ ha un maggiorante, si osservi che l'insieme $M := \cup_{S \in \mathcal{F}} S$ costituisce un sistema di vettori linearmente indipendenti: infatti se $x_1, \cdots x_N \in M$ allora per ogni $i \in \{1, \cdots, N\}$ esiste $S_i \in \mathcal{F}$ tale che $x_i \in S_i$. Poiché $\mathcal{F}$ é totalmente ordinato, a meno di permutazioni, possiamo supporre $S_i \subseteq S_{i+1}$. Segue che $x_1, \cdots x_N \in S_N$ ed essendo S_N linearmente indipendente in E segue che $x_1, \cdots x_N$ sono linearmente indipendenti in E. In particolare $M \in \mathcal{S}$ ed é un maggiorante per $\mathcal{F}$ poiché $S \subseteq M$ per ogni $S \in \mathcal{F}$.
Poiché $\mathcal{S}$ verifica tutte le ipotesi del lemma di Zorn, si ha che $\mathcal{S}$ ha almeno un elemento massimale $\mathcal{B}$.

(2) Sia $v \in E \setminus \mathcal{B}$, $v \neq 0$ (altrimenti é banale). Poiché l'insieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{v\}$, si ha che $\mathcal{B} \cup \{v\}$ deve essere linearmente dipendente (per non contraddire la massimalitá di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{S}$). Quindi devono esistere $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ e $a_0, \cdots, a_n \in K$ non tutti nulli tali che

$$a_0 v + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$$

Poiché $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, deve essere $a_0 \neq 0$ da cui segue che

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \quad \text{ con } \lambda_i = \frac{a_i}{a_0} b_i.$$

Infine, proviamo che l'unicità della rappresentazione. Supponiamo

$$v = \sum_{i \leq k} \lambda_i b_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{j \leq k} \mu_i b_i + \sum_{j=k+1}^{m} \mu_i \beta_i$$

con $k \geq 0$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_m \in K \setminus \{0\}$
e $\{b_1, \cdots, b_k, b_{k+1}, \cdots b_n, \beta_{k+1}, \cdots, \beta_m\}$ elementi distinti di $\mathcal{B}$. Allora da

$$\sum_{i \leq k} (\lambda_i - \mu_i) b_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i b_i - \sum_{j=1+k}^{m} \mu_i \beta_i = 0$$

segue che $k = n = m$ (altrimenti esisterebbero degli elementi λ_i o μ_i uguali a 0) e $\lambda_i = \mu_i$ per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

□

Esempio 5.4. *Nello spazio c_{00} l'insieme numerabile $\mathcal{B} := (e_n)_n$ con $e_n = (\delta_k^n)_k$ è una base di Hamel. Infatti ogni successione $x = (x_k)_k \in c_{00}$ è tale che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ per cui*

$$x = \sum_{i=1}^{n_0} x_i e_i.$$

Analogamente la famiglia $\mathcal{B} := \{p_n\}$, con $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il polinomio monico definito come $p_n(t) = t^n$, è una base di Hamel numerabile dello spazio dei polinomi $\mathcal{P}$ di variabile reale t.

Proposizione 5.5. Sia X uno spazio vettoriale normato infinito dimensionale su $\mathbb{R}$. Allora esiste un'applicazione $T : X \to \mathbb{R}$ che sia lineare e non continua.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base di Hamel di X e senza perdere di generalità supponiamo che $||b_\alpha|| = 1$ per ogni $\alpha \in I$. Scegliamo un sottoinsieme numerabile $\mathcal{B}' = (\beta_n)_n \subseteq \mathcal{B}$. Per il Teorema 5.3, per ogni $x \in X$, si ha che esistono $k, h \geq 0$, esiste $F = \{b_{\alpha_1}, \cdots, b_{\alpha_h}\} \subseteq \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ e $x_1, \cdots, x_k, \lambda_1, \cdots, \lambda_h \in K$ (eventualmente nulli) tali che

$$x = \sum_{n \leq k} x_n \beta_n + \sum_{i \leq h} \lambda_i b_{\alpha_i}.$$

Considero l'operatore $T : X \to \mathbb{R}$ lineare che vale $T(\beta_n) = n$ e $T(b) = 0$ se $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ ossia

$$T(x) = \sum_{n \leq k} n x_n.$$

Risulta che T non é continuo in quanto

$$\sup_{x \in X, ||x|| \leq 1} |T(x)| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} |T(\beta_n)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} n = +\infty.$$

□

Esercizio 5.6. Dare un esempio di funzionale lineare non continuo su c_{00} munito della norma del sup.

Esercizio 5.7. Data una famiglia finita $x_1, \cdots x_n$ di vettori linearmente indipendenti di uno spazio normato E di dimensione infinita, dimostrare che esiste almeno una base di Hamel che li contiene. (Suggerimento: applicare lemma di Zorn).

6. Il Lemma di Baire

Teorema 6.1 (**Lemma di Baire**)**.** *Sia X uno spazio metrico completo. Sia $(D_n)_n$ una famiglia numerabile di aperti densi in X. Allora $\bigcap_n D_n$ é denso in X.*

Dimostrazione. Definiamo $D := \bigcap_n D_n$. Proviamo che per ogni aperto $A \subseteq X$ vale che $A \cap D \neq \emptyset$. Sia $B_0 := B(x_0, r_0)$ tale che $\overline{B_0} \subseteq A$. Poiché D_1 é denso, vale che l'aperto $B_0 \cap D_1$ é $\neq \emptyset$. Pertanto esiste $B_1 := B(x_1, r_1)$ tale che $\overline{B_1} \subseteq B_0 \cap D_1$ con $r_1 < \frac{r_0}{2}$. Ripetendo il ragionamento, vale che l'aperto $B_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ e quindi esiste $B_2 := B(x_2, r_2)$ con $r_2 < \frac{r_1}{2} < \frac{r_0}{2^2}$ tale che $\overline{B_2} \subseteq B_1 \cap D_2$. In tal modo costruiamo una successione di palle aperte $(B_n)_n$, $B_n = B(x_n, r_n)$, tali che

$$r_{n+1} < \frac{r_n}{2} < \frac{r_0}{2^{n+1}}$$

e

$$\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n \cap D_{n+1} \subseteq B_0.$$

La successione (x_n) risulta di Cauchy in X in quanto se $m > n$ allora $B_m \subset B_n$ e quindi $d(x_n, x_m) < r_n < \frac{r_0}{2^n}$. Essendo X completo, esiste $\bar{x} \in X$ tale che $d(x_n, \bar{x}) \to 0$. Proviamo che $\bar{x} \in A \cap D$. Infatti da una parte $(x_n) \subset B_0$ per costruzione. Quindi $\bar{x} \in \overline{B_0} \subseteq A$. Dall'altra, fissato $n \in \mathbb{N}$, per ogni $m \geq n$ vale che $x_m \in B_n$. In particolare $\bar{x} \in \overline{B_n} \subseteq D_n$. Quindi $\bar{x} \in D$. □

In particolare vale la seguente formulazione debole:

Teorema 6.2 (**Forma debole del Lemma di Baire**)**.** *Sia X uno spazio metrico completo non vuoto. Sia $(D_n)_n$ una famiglia numerabile di aperti densi in X. Allora $\bigcap_n D_n \neq \emptyset$.*

Definizione 6.3. Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $E \subseteq X$ si dice **mai denso** se l'interiore della chiusura é vuoto ossia $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$.

Osservazione 6.4. Si osservi che $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$ non é equivalente a $\overset{\circ}{E} = \emptyset$. Infatti $\overset{\circ}{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$ (ossia $\mathbb{Q}$ non é mai denso) mentre $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$!

Osservazione 6.5. Vale che

(1) E é mai denso se e solo se $\bar{E}$ é mai denso;
(2) se C é chiuso allora

$$C \text{ é mai denso } \iff X \setminus C \text{ é denso.}$$

Infatti, usando il fatto che C é chiuso, abbiamo che

$$X \setminus C \text{ é denso } \iff X = \overline{X \setminus C} = X \setminus \overset{\circ}{C} \iff \overset{\circ}{C} = \emptyset \iff \overset{\circ}{\overline{C}} = \emptyset.$$

Equivalentemente: se A é aperto allora

$$A \text{ é denso } \iff A^c \text{ é mai denso.}$$

Il lemma di Baire risulta essere equivalente al seguente:

Teorema 6.6. *Sia X uno spazio metrico completo. Sia $(C_n)_n$ una famiglia numerabile di chiusi mai densi. Allora $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_n C_n}} = \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $(C_n)_n$ una famiglia numerabile di chiusi mai densi e sia $D_n = X \setminus C_n$. Allora, grazie all'osservazione 6.5, si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme D_n é aperto e denso. Cosí applicando il lemma di Baire otteniamo che $\overline{\bigcap_n D_n} = X$ che implica

$$\overbrace{\bigcup_n C_n}^{\circ} = \overbrace{\bigcup_n (X \setminus D_n)}^{\circ} = \overbrace{X \setminus \bigcap_n D_n}^{\circ} = X \setminus \overline{\bigcap_n D_n} = \emptyset.$$

□

Viceversa dimostriamo che il Teorema 6.6 implica il lemma di Baire 6.1.

Sia $(D_n)_n$ una famiglia numerabile di aperti densi e sia $C_n = X \setminus D_n$. Allora, grazie all'osservazione 6.5, per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme C_n é chiuso e mai denso. Cosí applicando il teorema 6.6 otteniamo

$$\overbrace{\bigcup_n C_n}^{\circ} = \emptyset$$

che implica

$$X \setminus \overline{\bigcap_n D_n} = \overbrace{\bigcup_n (X \setminus D_n)}^{\circ} = \overbrace{\bigcup_n C_n}^{\circ} = \emptyset$$

ossia

$$\overline{\bigcap_n D_n} = X.$$

Il seguente corollario é equivalente alla versione debole del lemma di Baire.

Teorema 6.7. *Sia X uno spazio metrico completo non vuoto. Sia $(C_n)_n$ una famiglia numerabile di chiusi tali che $\bigcup_n C_n = X$. Allora esiste n_0 tale che $\overset{\circ}{C}_{n_0} \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ fosse $\overset{\circ}{C}_n = \emptyset$ allora, gli insiemi C_n sarebbero chiusi mai densi e, grazie al Teorema 6.6, avremmo che $\emptyset = \overbrace{\bigcup_n C_n}^{\circ} = \overset{\circ}{X} = X$. Assurdo. □

In particolare ogni spazio metrico completo non vuoto non può essere unione di insiemi mai densi (altrimenti sarebbe unione di insiemi chiusi mai densi). Gli spazi che godono di questa proprietà si dicono di seconda categoria.

Definizione 6.8. Sia X uno spazio topologico ed $E \subseteq X$.

(1) E si dice **magro** o di **prima categoria in** X se E é unione numerabile di insiemi mai densi;
(2) E si dice **di seconda categoria in** X se non é di prima categoria in X.

In particolare il Lemma di Baire afferma che **ogni spazio metrico completo (non vuoto) é di seconda categoria**. Per questo viene chiamato anche **Teorema della categoria**.

Esempio 6.9. (1) $\mathbb{R}$ è di seconda categoria;
(2) $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$ é di prima categoria in $\mathbb{R}$;
(3) $\mathbf{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è di seconda categoria in $\mathbb{R}$ (altrimenti $\mathbb{R} = \mathbf{I} \cup \mathbb{Q}$ sarebbe di prima categoria);
(4) L'intervallo chiuso $[a, b]$ é di seconda categoria essendo uno s.m.c. Conseguentemente (a, b) non é di prima categoria, altrimenti lo sarebbe $[a, b]$. In particolare gli ultimi due esempi mostrano che esistono spazi metrici non completi che sono di seconda categoria.

Esercizio 6.10. Provare che

(i) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non si può scrivere come unione numerabile di chiusi;

(ii) $\mathbb{Q}$ non si può scrivere come intersezione numerabile di aperti.

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che grazie all'osservazione 1.5, le due affermazioni (i) e (ii) sono equivalenti. Basta quindi provare la (i). Se per assurdo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \cup_n C_n$ con C_n chiuso, allora

$$\mathbb{R} = (\cup_n C_n) \bigcup (\cup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}).$$

Applicando il lemma di Baire esisterebbe n_0 tale che $\overset{\circ}{C}_{n_0} \neq \emptyset$. Ciò implicherebbe l'esistenza di un aperto contenuto in C_{n_0} ossia in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Assurdo per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. ☐

Proposizione 6.11. *Sia X uno spazio di Banach. Allora X é finito dimensionale o ha una base di Hamel più che numerabile.*

Dimostrazione. Per assurdo esista una base numerabile $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di X. Definiamo

$$V_n = span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

Allora $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Ogni V_n é un sottospazio finito dimensionale e pertanto é chiuso. Inoltre é un sottospazio proprio. Quindi $\overset{\circ}{V}_n = \emptyset$ (altrimenti, se V_n contenesse una palla, per traslazione conterrebbe una pallina centrata in 0. Per dilatazione conterrebbe tutto lo spazio). Segue che ogni V_n é mai denso. Assurdo per il Lemma di Baire. ☐

Notare che la dimostrazione dell'Esercizio 6.9 si fonda sul fatto che $\{q\}$ é un s.i. chiuso di $\mathbb{R}$ a parte interna vuota. Se uno spazio metrico E é privo di punti isolati, tutti i s.i. del tipo $\{x\}$ con $x \in E$ sono chiusi a parte interna vuota. Applicando quindi la stessa dimostrazione dell'esercizio precedente, si può dimostrare che

Esercizio 6.12. Sia X uno spazio metrico completo privo di punti isolati. Allora ogni insieme denso numerabile non può essere intersezione numerabile di aperti.

Risolvere il seguente esercizio:

Esercizio 6.13. Ogni spazio metrico completo numerabile ha almeno un punto isolato.

Dimostrazione. Sia $X = \cup_n \{x_n\}$. Dal lemma di Baire esiste n_0 tale che $\{x_{n_0}\}$ ha interiore non vuoto, ossia esiste un aperto $A \subseteq \{x_{n_0}\}$. Allora $A = \{x_{n_0}\}$. Quindi x_{n_0} é un punto isolato. ☐

Da questo esercizio si ritrova che $\mathbb{Q}$ non può essere completo, altrimenti dovrebbe avere un punto isolato.

7. Il Teorema di Banach-Steinhaus

Sia $(T_i)_{i\in I}$ una famiglia qualsiasi di operatori lineari e continui di X in Y tale che

$$\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)} = M < +\infty \quad \textbf{(UL)}.$$

Allora per ogni $x \in X$

$$\sup_i ||T_i(x)||_Y \le \sup_{i\in I}(||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)}||x||_X) = (\sup_{i\in I}(||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)})||x||_X) = M||x||_X < +\infty \quad \textbf{(PL)}$$

ossia la limitatezza di $(T_i)_{i\in I}$ nello spazio $\mathcal{L}(X,Y)$ implica la limitatezza di $(T_i(x))_{i\in I}$ nello spazio Y per ogni $x \in X$. Quindi la proprietà di *l'uniforme limitatezza* **(UL)** degli operatori implica la proprietà di *puntuale limitatezza* **(PL)** . Se X è di Banach, tale implicazione si inverte.

Teorema 7.1 (di Banach-Steinhaus o di Uniforme Limitatezza). *Sia X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $(T_i)_{i\in I}$ una famiglia di operatori lineari e continui di X in Y. Assumiamo che per ogni $x \in X$ esista una costante $M_x \ge 0$ tale che*

$$\sup_{i\in I} ||T_i(x)||_Y = M_x$$

(ossia la famiglia $(T_i)_{i\in I}$ é puntualmente limitata). Allora esiste una costante $M \ge 0$ tale che

$$\boxed{\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)} = M}$$

ossia esiste $M \ge 0$ tale che $\forall x \in X, \forall i \in I$

$$||T_i(x)||_Y \le M||x||_X$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$C_n := \{x \in X : \sup_{i\in I} ||T_i(x)||_Y \le n\} = \bigcap_{i\in I}\{x \in X : ||T_i(x)||_Y \le n\}.$$

Osserviamo che l'applicazione $g_i : X \to \mathbb{R}$ definita come $g_i(x) := ||T_i(x)||_Y$ é un'applicazione continua (essendo composizione di funzioni continue) e quindi l'insieme

$$\{x \in X : ||T_i(x)||_Y \le n\} = g^{-1}(-\infty, n])$$

é chiuso. Poiché C_n é intersezione di chiusi, si ha che C_n é chiuso e per ogni $x \in X$, scelto $n \ge c_x$ vale che $x \in C_n$. Quindi $X = \bigcup_n C_n$. Dal Lemma di Baire esiste almeno un C_{n_0} tale che $\overset{\circ}{C}_{n_0} \neq \emptyset$. In particolare esiste una palla chiusa $\bar{B}_r(x_0) \subseteq C_{n_0}$. In particolare se $z \in X$ é tale che $|z| \le r$ vale che $z + x_0 \in \bar{B}_r(x_0)$ e perciò

$$\|T_i(z)\|_Y \le \|T_i(x_0)\|_Y + \|T_i(z + x_0)\|_Y \le \sup_i \|T_i(z + x_0)\|_Y + \sup_i \|T_i(x_0)\|_Y \le 2n_0$$

da cui

$$\sup_i \|T_i(z)\|_Y \le 2n_0.$$

Da qui si ricava facilmente che per ogni $z \in X$

$$\sup_i \|T_i(z)\|_Y \le \frac{2n_0}{r}\|z\|_Y$$

ossia

$$\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \frac{2n_0}{r}.$$

□

Corollario 7.2. *Sia X uno spazio di Banach, $B' \subseteq X'$. Allora*

$$B' \textit{ é limitato in } X' \iff \{f(x) : f \in B'\} \textit{ é limitato in } \mathbb{R}\ \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Sia $B' = \{f_i\}_{i\in I}$. Allora, applicando il Teorema di B.S alla famiglia di funzionali $(f_i)_{i\in I}$, si ha che

$$B' \text{ é limitato in } X' \iff \sup_{i\in I} ||f_i|| < +\infty \iff \sup_{i\in I} |f_i(x)| < \infty \ \forall x \in X.$$

Esempio 7.3. Proviamo che senza l'ipotesi di completezza su X completo, la puntuale limitatezza di una famiglia di operatori lineari e continui non implica l'uniforme limitatezza. Osserviamo che essendo c_{00} generato da una base numerabile, c_{00} non é completo rispetto ad alcuna norma (vedi Proposition 6.11). Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo il funzionale $T_m(x) = m \cdot x_m$. T_m é un funzionale lineare e continuo su X: infatti

$$T_m(ax + by) = m(ax_m + by_m) = aT_m(x) + bT_m(y).$$

Poi $\sup_{||x||\le 1} |T_m(x)| \le m$. Se scelgo $x = (x_n)$ tale che $x_m = 1$ e $x_n = 0$ per ogni $n \neq m$ allora $||x|| = 1$ e $T_m(x) = m$. Quindi $||T_m|| = m$. Osserviamo che per ogni $x \in c_{00}$ si ha $\sup_m |T_m(x)| < +\infty$. Infatti se $x \in c_{00}$ esiste n_0 tale che $x_n = 0$ per ogni $n > n_0$. Quindi $\sup_m |T_m(x)| = \sup_m |mx_m| = \sup_{m\le n_0} |mx_m| \le n_0||x|| \in \mathbb{R}$. Invece $\sup_m ||T_m|| = +\infty$.

Corollario 7.4. *Sia X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $(T_n)_n$ una successione di operatori lineari e continui di X in Y. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $\lim_n T_n(x) = T(x)$. Allora T é un operatore lineare continuo da X in Y,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} \in \mathbb{R}$$

e

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \liminf_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Dimostrazione. È facile provare che T é un operatore lineare. Inoltre per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))_n$ é limitata in Y in quanto convergente. Quindi per il Teorema di Banach-Steinhaus, la successione delle norme $(||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)})_n$ é limitata. In particolare il

$$\liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \sup_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Infine dalla relazione

$$||T_n(x)|| \le ||T_n||||x||_X$$

segue che per ogni $x \in X$

$$||T(x)|| = \liminf_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \le (\liminf_{n\to\infty} ||T_n||)||x||_X$$

da cui segue che T é un operatore continuo con

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \liminf_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

□

Esercizio 7.5. Sia $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ dove X, Y sono di Banach e assumiamo che $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in X$. Mostrare che se $x_n \to x$ allora $T_n(x_n) \to T(x)$.

Dimostrazione. Quindi per il Teorema di Banach-Steinhaus, la successione delle norme $(||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)})_n$ é limitata ossia

$$M = \sup_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

. Inoltre

$$\begin{aligned}|T_n(x_n) - T(x)| &\le |T_n(x_n) - T_n(x)| + |T_n(x) - T(x)|\\ &\le ||T_n|| \cdot |x_n - x| + |T_n(x) - T(x)|\\ &\le M|x_n - x| + |T_n(x) - T(x)|\end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0. □

Esercizio 7.6. Sia $1 < p < \infty$, sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a^k x_k.$$

Dimostrare che

(1) $T_n \in (\ell^p)'$ e si esprima la sua norma;
(2) si supponga che esista finito il $\lim_{n\to\infty} T_n(x)(:= T(x))$. Si provi che T è lineare e continuo, $a \in (-1,1)$ e

$$||T||_{(\ell^p)'} = \left(\frac{|a|^{p'}}{1-|a|^{p'}}\right)^{1/p'}$$

Si discuta infine il caso $p = \infty$.

Esercizio 7.7. *Sia $X = \ell^p$ con $1 \le p \le +\infty$ e sia $\{b_n\}_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da*

$$T_k(a) = \sum_{n=1}^{k} b_n a_n \ \forall a \in X.$$

(1) *Provare che se $1 < p \le +\infty$ allora T_k é un funzionale lineare e continuo con*

$$||T_k|| = (\sum_{n=1}^{k} |b_n|^{p'})^{\frac{1}{p'}};$$

(2) *provare che se $p = 1$ allora T_k é un funzionale lineare e continuo con*

$$||T_k|| = \sup_{1\le n\le k} |b_n|.$$

(3) *Supponendo che per ogni $a \in X$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ abbia limite finito si provi che la successione $\{b_n\}_n \in \ell^{p'}$.*

Esercizio 7.8 (17-09-2012)**.** *Sia X spazio di Banach, $T_n : X \to X$ una famiglia di operatori lineari e continui e $\mathcal{D} \subseteq X$ un sottoinsieme denso tale che:*

$$T_n x \to x \text{ per } n \to \infty, \ \forall x \in \mathcal{D}$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} < \infty$

(2) $T_n x \to x, \ \forall x \in X$

Esercizio 7.9. *Siano X, Y spazi di Banach, $T_n : X \to Y$ una famiglia di operatori lineari e continui, $T : X \to Y$ un operatore lineare, $\mathcal{D} \subseteq X$ un sottoinsieme denso tale che:*

$$T_n x \to Tx \text{ per } n \to \infty, \ \forall x \in \mathcal{D}$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) *T é continuo e $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} < \infty$;*

(2) $T_n x \to Tx, \ \forall x \in X$

Esercizio 7.10. Sia E lo spazio delle funzioni reali continue a supporto compatto in $(0,1)$. Muniamo E con la norma del sup. Sia $T_n : E \to \mathbb{R}$ cosí definito $T_n(u) = nu(\frac{1}{n})$. Provare che

(1) $\sup_n |T_n(u)| < +\infty$ per ogni $u \in E$;
(2) $\sup_n ||T_n|| = +\infty$ e spiegare perché non viene contraddetto il teorema di B.S.

Soluzione

(1) Sia $u \in E$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $u(\frac{1}{n}) = 0$ per ogni $n \geq n_0$. In particolare
$$\sup_n |T_n(u)| = \sup_{n<n_0} |T_n(u)| \leq n_0 ||u||_\infty < +\infty;$$

(2) Sia $u_n \in E$ tale che abbia massimo $= 1$ nel punto $\frac{1}{n}$. Quindi $||u||_\infty = 1$ e $|T_n(u_n)| = n$ che implica $\sup_n ||T_n|| = +\infty$. Non viene contraddetto il teorema di B.S. poich é lo spazio E non é completo rispetto alla norma del sup: infatti consideriamo la successione
$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{2n}{n-2}x - \frac{2}{n-2} & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
dove u é una qualunque funzione continua tale che $u(\frac{1}{2}) = 1$ e $u = 0$ per $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$. Tale successione converge uniformemente alla funzione continua
$$v(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
ma la funzione $v \notin E$.

Esercizio 7.11. Sia $X = c_0$ munito della norma del sup.

(1) Sia $\{b_n\}_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : c_0 \to \mathbb{R}$ definito da
$$T_k(a) = \sum_{h=1}^{k} b_h a_h$$
per ogni $a \in c_0$. Provare che T_k é un funzionale lineare e continuo con
$$||T_k|| = \sum_{h=1}^{k} |b_h|.$$

(2) Supponiamo che per ogni $a \in c_0$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ abbia limite finito; si provi allora che il funzionale $T : c_0 \to \mathbb{R}$,
$$T(a) = \lim_{k\to\infty} T_k(a)$$
é lineare e continuo, con $||T|| = \sum_{h=1}^{\infty} |b_h|$ e che $||T_k - T|| \to 0$.

Soluzione

(1) Si può procedere in 2 modi distinti.

<u>Primo modo</u> Osservare che per ogni k la successione (troncata) $x_k = (b_1, \cdots, b_k, 0, \cdots)$ appartiene a l^1 per ogni p e quindi applicare il teorema di rappresentazione del duale di c_0 per dedurre che T_k é un operatore lineare e continuo con norma $||T_k|| = |x_k|_{l^1} = \sum_{h=1}^{k} |b_h|$;

<u>Secondo modo</u> Dimostrare direttamente che l'operatore é lineare. Poi far vedere che
$$|T_k(a)| \leq (\sum_{h=1}^{k} |b_h|) \|a\|_\infty$$
(e ciò garantisce la continuità dell'operatore). Infine scegliere $\bar{a}_k = (a_h^k)_h$ definito da
$$a_h^k = \begin{cases} segno(b_h) = \frac{b_h}{|b_h|} & \text{se } b_h \neq 0 \text{ e } h \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
per ottenere che $||\bar{a}_k||_\infty = 1$ e $T_k(\bar{a}_k) = \sum_{h=1}^{k} |b_h|$.

(2) Si può procedere in 2 modi distinti per ottenere che $\sum_{h=1}^{\infty} |b_h|$ converge.

Primo modo Per un corollario di BS, il funzionale T, che é limite puntuale di funzionali lineari e continui, é esso stesso lineare e continuo. Inoltre essendo $T(a) = \lim_k T_k(a) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h a_h$, grazie al teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su c_0 segue che la successione $(b_h)_h$ é in l^1 e $||T|| = \sum_{h=1}^{\infty} |b_h|$.

Secondo modo Per il Teorema di B.S., esiste $M \geq 0$ tale che

$$\sup_k ||T_k|| = \sup_k \sum_{h=1}^{k} |x_h| \leq M.$$

Ciò implica che la serie $\sum_{h=1}^{\infty} |x_h|$ converge. In particolare $\sum_{h=1}^{\infty} x_h a_h$ converge per ogni $a = (a_h) \in c_0$ e quindi $T(a) = \lim_k \sum_{h=1}^{k} x_h a_h = \sum_{h=1}^{\infty} x_h a_h$. Inoltre, dal corollario al Teorema di B.S., T é un operatore lineare e continuo tale che

$$|(T - T_k)(a)| = |\sum_{h=k+1}^{\infty} x_h a_h| \leq \sum_{h=k+1}^{\infty} |x_h||a_h| \leq \epsilon ||a||_\infty$$

per $k \geq k_0(\epsilon)$ abbastanza grande (criterio di Cauchy per le serie). Quindi

$$||T - T_k||_{c_0'} \leq \epsilon$$

per $k \geq k_0(\epsilon)$. Ossia $||T - T_k||_{c_0'} \to 0$. Infine

$$||T||_{c_0'} = \lim_k ||T_k||_{c_0'} = \lim_k \sum_{h=1}^{k} |x_h| = \sum_{h=1}^{\infty} |x_h|.$$

Esercizio 7.12. *Sia X uno spazio di Banach e $f : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare che é separatamente continua in ogni variabile. Provare che esiste $C > 0$ tale che $|f(x,y)| \leq C|x||y|$ per ogni $x, y \in X$. Dedurre che f é continua.*

Dimostrazione. Sia $y \in X$. Poiché $f(\cdot, y)$ é continua, allora esiste $c_y > 0$ tale che

$$|f(x,y)| \leq c_y |x|$$

per ogni $x \in X$. Ora per ogni $x \in X \setminus 0$ sia $f_x(y) = \frac{f(x,y)}{|x|}$. Allora

$$\sup_{x \in X \setminus 0} |f_x(y)| \leq c_y.$$

Per il teorema di B.S. (applicato alla famiglia di funzionali lineari e continui $(f_x)_{x\in X}$) vale che esiste $C > 0$ tale che

$$\sup_{x \in X \setminus 0} ||f_x||_{X'} \leq C,$$

da cui

$$|f(x,y)| \leq C|y||x|$$

per ogni $y \in X$ e per ogni $x \in X$. Infine siano $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ tali che $x_n \to x \in X$ e $y_n \to y \in X$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x_n,y_n) - f(x,y)| &= |f(x_n,y_n) - f(x,y_n) + f(x,y_n) - f(x,y)| \\ &\leq |f(x_n,y_n) - f(x,y_n)| + |f(x,y_n) - f(x,y)| \leq C|x_n - x||y_n| + C|x||y_n - y| \to 0. \end{aligned}$$

8. **Teorema di Hahn-Banach: Versione analitica**

8.1. **Versione analitica reale.**

Teorema 8.1 (**Teorema di Hahn-Banach: Versione analitica reale).** *Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ un'applicazione tale che*

(1) *$p(\lambda x) = \lambda p(x)$ per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $x \in X$;*
(2) *$p(x + y) \le p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$.*

Sia $G \subseteq E$ un sottospazio vettoriale e $g \in G^*$ tale che $g(x) \le p(x)$ per ogni $x \in G$. Allora esiste $f \in E^*$ tale che

$$f = g \text{ su } G \text{ e } f(x) \le p(x) \text{ per ogni } x \in E.$$

Dimostrazione. Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{P} := \{h : D(h) \to \mathbb{R} : D(h) \text{ è un sottosp. vett. di } E, h \text{ prolung. lineare di } g, h \le p \text{ su } D(h)\}.$$

Ovviamente $\mathcal{P}$ è non vuoto in quanto $g \in \mathcal{P}$. Su $\mathcal{P}$ definiamo la seguente relazione: per ogni $h, k \in \mathcal{P}$ diciamo che

$$h \le k \iff D(h) \subseteq D(k) \text{ e } k_{|D(h)} = h$$

Allora tale relazione è di ordine parziale. Dimostriamo che $\mathcal{P}$ è induttivo: se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ è totalmente ordinato, definiamo

$$D := \bigcup_{h \in \mathcal{F}} D(h).$$

È facile provare che D è un sottospazio vettoriale di E. Definiamo $\tilde{h} : D \to \mathbb{R}$ come $\tilde{h}(x) = h(x)$ se $x \in D(h)$.

Allora $\tilde{h}$ è ben posta: infatti se $x \in D(h) \cap D(k)$ allora, essendo $\mathcal{F}$ totalmente ordinato, vale che $h \le k$ o $k \le h$. Se vale la prima, allora $D(h) \subseteq D(k)$ e $k_{|D(h)} = h$. In particolare $h(x) = k(x)$. Quindi il valore di $\tilde{h}(x)$ non dipende dalla scelta di $h \in \mathcal{F}$ tale che $x \in D(h)$. Inoltre è facile provare che $\tilde{h}$ è lineare, è un prolungamento di g e soddisfa $\tilde{h} \le p$ su D.

Essendo soddisfatte tutte ipotesi del Lemma di Zorn, esiste $f \in \mathcal{P}$ elemento massimale. Se proviamo che $D(f) = E$ abbiamo finito.

Per assurdo, sia $D(f) \ne E$. Sia $x_0 \in E \setminus D(f)$ e consideriamo $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $\tilde{f} = f$ su $D(f)$ e definita su

$$D(\tilde{f}) := span\{x_0, D(f)\} = \{x + \lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}, x \in D(f)\}.$$

Quindi $\tilde{f}$ è un prolungamento lineare di f e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ deve valere

$$\tilde{f}(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda \tilde{f}(x_0).$$

Selezioneremo $\tilde{f}(x_0)$ in modo che $\tilde{f} \in \mathcal{P}$ (contraddicendo la massimalità di f). Intanto vale che $\tilde{f} = f = g$ su G. Resta solo da provare che $\tilde{f}(x) \le p(x) \quad \forall x \in D(\tilde{f})$ ossia che

$$f(x) + \lambda \tilde{f}(x_0) \le p(x + \lambda x_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in D(f). \tag{8.1}$$

Sceglieremo $\tilde{f}(x_0)$ in modo che sia soddisfatta la (8.1). Se $\lambda = 0$, la (8.1) segue dal fatto che $f \le p$ su $D(f)$. Resta da provare che

$$f(x) + \lambda \tilde{f}(x_0) \le p(x + \lambda x_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \forall x \in D(f). \tag{8.2}$$

Osserviamo che (8.2) è equivalente a richiedere

$$\begin{cases} f(x) + \tilde{f}(x_0) \le p(x + x_0) & \forall x \in D(f) \\ f(x) - \tilde{f}(x_0) \le p(x - x_0) & \forall x \in D(f). \end{cases} \tag{8.3}$$

Banalmente (8.2) implica (8.3). Viceversa, assumiamo che valga la (8.3). Se $\lambda > 0$, dalla linearità di f e dalla proprietà (1) soddisfatta da p, segue che

$$f(x) + \lambda\tilde{f}(x_0) = \lambda(f(\lambda^{-1}x) + \tilde{f}(x_0)) \leq \lambda p(\lambda^{-1}x + x_0) = p(x + \lambda x_0).$$

Se $\lambda < 0$, dalla linearità di f e dalla proprietà (1) soddisfatta da p, segue che

$$f(x) + \lambda\tilde{f}(x_0) = -\lambda(f(-\lambda^{-1}x) - \tilde{f}(x_0)) \leq -\lambda p(-\lambda^{-1}x - x_0) = p(x + \lambda x_0).$$

Quindi ci resta da trovare $\tilde{f}(x_0)$ tale che valga la (8.3). Osserviamo che $\forall x, z \in D(f)$ vale che

$$f(z) + f(x) = f(z + x) \leq p(z + x) = p(z - x_0 + x_0 + x) \leq p(z - x_0) + p(x + x_0)$$

da cui segue che

$$f(z) - p(z - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \quad \forall x, z \in D(f) \tag{8.4}$$

e quindi

$$M = \sup_{z\in D(f)} f(z) - p(z - x_0) \leq \inf_{x\in D(f)} p(x + x_0) - f(x) = m$$

Esiste quindi un valore $\tilde{f}(x_0) \in [M, m]$ che soddisfa (8.3) e quindi la (8.1). $\square$

8.2. **Corollari su spazi normati.**

Corollario 8.2. *Sia X uno spazio* **normato**, *$Y \subseteq X$ un sottospazio vettoriale e sia $g \in Y'$. Allora esiste $\tilde{g} \in X'$ tale che*

$$\tilde{g}(y) = g(y) \quad \forall y \in Y.$$

Inoltre

$$||g||_{Y'} = ||\tilde{g}||_{X'}.$$

Dimostrazione. Applicando il Teorema 8.1 con $G = Y$, $p(x) := ||g||_{Y'}||x||_X$ si ha che esiste $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ lineare tale che $\tilde{g}(y) = g(y)$ $\forall y \in Y$. Inoltre $\tilde{g}(x) \leq p(x) = ||g||_Y||x||_X$ per ogni $x \in X$. In particolare

$$\text{-}\tilde{g}(x) = \tilde{g}(\text{-}x) \leq p(\text{-}x) = ||g||_Y||\text{-}x||_X = ||g||_Y||x||_X \quad \forall x \in X.$$

Quindi

$$||\tilde{g}(x)| \leq ||g||_Y||x||_X \quad \forall x \in X$$

ossia $\tilde{g} \in X'$ e

$$|\tilde{g}||_{X'} \leq ||g||_{Y'}.$$

D'altra parte

$$|\tilde{g}||_{X'} = \sup_{\{x\in X, ||x||\leq 1, x\neq 0\}} \frac{|\tilde{g}(x)|}{||x||} \geq \sup_{\{x\in Y, ||x||\leq 1, x\neq 0\}} \frac{|g(x)|}{||x||} = ||g||_{Y'}.$$

$\square$

Corollario 8.3. *Se X é uno spazio normato, allora per ogni $x_0 \in X$ esiste $f_0 \in X'$ tale che $||f_0||_{X'} = ||x_0||$ e $f_0(x_0) = ||x_0||^2$.*

Dimostrazione. Applicando il Corollario 8.2 al sottospazio $G = \mathbb{R}x_0$ e al funzionale lineare e continuo $g : G \to \mathbb{R}$ definito come $g(tx_0) = t||x_0||^2$, segue che esiste $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{g} = g$ su G e $||g||_{G'} = ||\tilde{g}||_{X'}$. Allora $\tilde{g}(x_0) = g(x_0) = ||x_0||^2$. Inoltre

$$||\tilde{g}||_{X'} = ||g||_{G'} = \sup_{x\in G} \frac{|g(x)|}{||x||} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|t|||x_0||^2}{||tx_0||} = ||x_0||^2.$$

Basta scegliere quindi $f_0 = \tilde{g}$. $\square$

Corollario 8.4. *Se X é uno spazio normato, allora per ogni $x \in X$*

$$\boxed{||x|| = \max_{f \in X', ||f||_{X'} \leq 1} |f(x)|.}$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$. Banalmente si ha che $\sup_{f \in X', ||f||_{X'} \leq 1} |f(x_0)| \leq ||x_0||$. Per il viceversa, grazie al Corollario 8.3 esiste $f_0 \in X'$ tale che $f(x_0) = ||x_0||^2$ e $||f_0||_{X'} = ||x_0||$. Allora $f := \frac{f_0}{||x_0||_X}$ ha norma 1 e
$$\sup_{f \in X', ||f||_{X'} \leq 1} |f(x_0)| \geq \frac{|f_0(x_0)|}{||x_0||_X} = ||x_0||.$$
□

Corollario 8.5. *Se $X \neq \{0\}$ é uno spazio normato, allora $X' \neq \{0\}$.*

Dimostrazione. Poiché esiste $x_0 \in X \setminus \{0\}$, per il Corollario 8.3 esiste $f \in X'$ tale che $||f||_{X'} = ||x_0||$. In particolare $f \neq 0$. □

Corollario 8.6 (di separazione)**.** *Sia X é uno spazio normato. Allora per ogni $x, y \in X$, se $x \neq y$ esiste $f \in X'$ tale che $f(x) \neq f(y)$.*

Dimostrazione. Per il Corollario 8.3 (applicato a $x_0 = x - y$) esiste $f \in X'$ tale che $||f||_{X'} = ||x - y||$ e $f(x - y) = ||x - y||^2$. In particolare
$$f(x) - f(y) = f(x - y) = ||x - y||^2 \neq 0.$$
□

Esercizio 8.7 (Operatore trasposto). Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \to X'$ l'operatore definito da
$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$
Provare che T^* é continuo e che
$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = ||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')}.$$

Esercizio 8.8. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$. Provare i seguenti fatti:

(1) per ogni $x, y \in X$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$;

(2) per ogni $x \in X$ vale che T_x é un funzionale lineare e continuo su X' tale che $||T_x||_{X''} = |x|_X$.

8.3. **Applicazione del Teorema di Hahn Banach+Teorema di Banach-Steinhaus.** Dal Teorema di BS segue facilmente il seguente corollario che caratterizza i sottoinsiemi limitati di X' (vdi Corollario 7.2).
Corollario. Sia X uno spazio di Banach, $B' \subseteq X'$. Allora
$$B' \text{ é limitato in } X' \iff \{f(x) : \ f \in B'\} \text{ é limitato in } \mathbb{R} \ \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Sia $B' = \{f_i\}_{i \in I}$. Allora, applicando il Teorema di B.S alla famiglia di funzionali $(f_i)_{i \in I}$, si ha che
$$B' \text{ é limitato in } X' \iff \sup_{i \in I} ||f_i|| < +\infty \iff \sup_{i \in I} |f_i(x)| < \infty \ \forall x \in X.$$
□

Usando il Teorema di HB, possiamo dare una caratterizzazione dei sottoinsiemi limitati di X.

Corollario 8.9. *Sia X uno spazio normato e $B \subseteq X$. Allora B é limitato se e solo se per ogni $f \in X'$ l'insieme*

$$f(B) = \{f(b) : b \in B\}$$

é limitato in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per ogni $b \in B$ sia $\varphi_b : X' \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da $\varphi_b(f) = f(b)$. Applicando un corollario al teorema di HB si ha che

$$||b|| = \sup_{f\in X', ||f||_{X'}\leq 1} |f(b)| = \sup_{f\in X', ||f||_{X'}\leq 1} |\varphi_b(f)| = ||\varphi_b||_{X''}.$$

Poiché per ogni $f \in X'$ vale che

$$\sup_{b\in B} |\varphi_b(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < +\infty$$

applicando il Teorema di B.S. alla famiglia di funzionali $(\varphi_b)_{b\in B}$ definiti sullo spazio di Banach X', esiste $C > 0$ tale che

$$\sup_{b\in B} ||b||_X = \sup_{b\in B} ||\varphi_b||_{X''} \leq C. \tag{8.5}$$

□

Esercizio 8.10. *Siano X, Y spazi di Banach* e sia $T \in L(X, Y)$ tale che $f \circ T \in X'$ per ogni $f \in Y'$. Provare che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che

$$T \text{ é continuo } \iff \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} ||T(x)||_Y < +\infty$$

$$\iff \text{l'insieme } B = \{T(x) : x \in X,\ \|x\| \leq 1\} \text{ é limitato in } Y.$$

Grazie al corollario 8.9 vale che

$$B \text{ é limitato in } Y \iff \forall f \in Y'\ f(B) = \{f(T(x)) : x \in X, \|x\| \leq 1\} \text{ é limitato in } \mathbb{R}$$

$$\iff \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |f \circ T(x)| < +\infty$$

Infine, grazie alla linearità di $f \circ T$ possiamo concludere che

$$\sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |f \circ T(x)| < +\infty \iff f \circ T \in X'.$$

□

(*) Basta X, Y normati

Vediamo infine la seguente applicazione del Teorema di HB:

Esempio 8.11. Proviamo che esiste $\tilde{\varphi} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ funzionale lineare e continuo che non é rappresentabile da un elemento di ℓ^1 (ossia l'inclusione di ℓ^1 in $(\ell^\infty)'$ é in generale stretta). Sia c il sottospazio di ℓ^∞ costituito dalle successioni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali convergenti. Sia $\varphi : c \to \mathbb{R}$ che ad $x = (x_n)_n$ associa $\varphi(x) = \lim_n x_n$. Allora T é lineare e poiché

$$|\varphi(x)| \leq ||x||_\infty$$

abbiamo che φ é continuo. Si osservi inoltre che se $x = (1)_n$ allora $T(x) = 1 \geq ||x||_\infty$. Quindi $||\varphi||_{c'} = \sup_{\{x\in c\, ||x||_\infty \leq 1\}} |\varphi(x)| = 1$. Dal Teorema di Hahn Banach esiste $\tilde{\varphi} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ lineare e continuo (chiamato *limite di Banach*) tale che $\tilde{\varphi} = \varphi$ su c e $||\tilde{\varphi}||_{(\ell^\infty)'} = 1$. Per assurdo esista $a = (a_n)_n \in \ell^1$ tale che $\tilde{\varphi} = T_a$ ossia tale che

$$\tilde{\varphi}(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \forall b = (b_n) \in \ell^1.$$

Sia $x^{(k)} = (x_n^k) \in c$ cosí definita: $x_n^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che $\varphi(x^{(k)}) = \tilde{\varphi}(x^{(k)}) = 0 = \sum_{n=1}^{k} a_n$ mentre se scegliamo $x = (1)_n \in c$ vale che

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Assurdo. □

Esercizio 8.12 (15-05-2012)**.** *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T_n : X \to Y$ una successione di funzionali lineari e continui tali che per ogni $f \in Y'$ la successione $(f \circ T_n)_n$ sia limitata in X'. Dimostrare che la successione $(T_n)_n$ é limitata in $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Esercizio 8.13 (11-01-2013)**.** *Siano X, Y spazi di Banach e sia $\alpha : X \to Y$ una funzione.*

(1) *Dimostrare che α ha immagine limitata se e solo se per ogni $f \in Y'$ si ha che $f \circ \alpha : X \to \mathbb{R}$ ha immagine limitata.*
(2) *Sia $\alpha \in L(X, Y)$ e $T : Y' \to X^*$ é l'applicazione lineare definita da $T(f) = f \circ \alpha$. Provare T é iniettiva se e solo se $\alpha(X)$ é denso in Y.*

Esercizio 8.14. Data una famiglia finita $x_1, \cdots x_n$ di vettori linearmente indipendenti di uno spazio normato E di dimensione infinita e dati comunque $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, dimostrare che esiste $f \in E'$ con la proprietà: $f(x_k) = a_k$ per ogni $k = 1, \cdots, n$.

(*Suggerimento: considerare G lo span dei vettori $x_1, \cdots x_n$, costruire il funzionale lineare g su G tale che $g(x_k) = a_k$ per ogni $k = 1, \cdots, n$. Poiché G ha dimensione finita, si ha che g é continuo e per H.B. può essere esteso...*)

Esercizio 8.15. Siano X, Y due spazi di Banach e assumiamo che la successione di operatori M_n in $\mathcal{L}(X, Y)$ verifica: per ogni $f \in Y'$ $f(M_n(x)) \to f(M(x))$ dove $M(x) \in Y$. Provare che $M \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Dimostrazione. Proviamo che $M \in L(X, Y)$: per ogni $x, y \in X$ e per ogni $f \in Y'$ si ha che $f(M_n(x + y)) \to f(M(x + y))$. D'altra parte dalla linearitàdi M_n e di f, si ha che

$$f(M_n(x + y)) = f(M_n(x) + M_n(y))$$

$$= f(M_n(x)) + f(M_n(y)) \to f(M(x)) + f(M(y)) = f(M(x) + M(y)).$$

Quindi per ogni $f \in Y'$ si ha che

$$f(M(x + y)) = f(M(x) + M(y)).$$

Dal Corollario 8.6 segue che per ogni $x, y \in X$

$$M(x) + M(y) = M(x + y).$$

Analogamente si prova che $M(\lambda x) = \lambda M(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Per provare che $M \in \mathcal{L}(X, Y)$, osserviamo che per ogni $f \in Y'$ vale che $(f \circ M_n)_n$ é una successione di funzionali lineari e continui su X tali che $f \circ M_n(x) \to f \circ M(x)$, dal Corollario 7.4 al teorema di B.S. segue che $f \circ M \in X'$. Grazie all'Esercizio 8.10 segue che $M \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Esercizio 8.16 (09-07-2012)**.** *Sia X uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0, 1] \to X$ tale che valga la seguente proprietà: se $(x_n)_n \subseteq [0, 1]$ é convergente, allora per ogni $f \in X'$ la successione reale $f(\alpha(x_n))$ é limitata. Provare che α é limitata su $[0, 1]$.*

8.4. **Versione analitica del Teorema di Hahn Banach nel caso complesso.**

Esercizio 8.17. Sia $f \in L(E, \mathbb{C})$ dove E é uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora le funzioni $u = \Re(f) : E \to \mathbb{R}$ e $v = \Im(f) : E \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

sono funzionali $\mathbb{R}$-lineari. Inoltre sono legati dalla relazione

$$v(x) = -u(ix) \quad \forall x \in E$$

(equivalentemente dalla relazione $u(x) = v(ix)$ $\forall x \in E$).

Dimostrazione. La prima parte é banale. Riguardo la seconda, osserviamo che $iu(x) - v(x) = if(x) = f(ix) = u(ix) + iv(ix)$.

Esercizio 8.18. Siano $u \in L(E, \mathbb{R})$ dove E é uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora il funzionale $f : E \to \mathbb{C}$ definito da

$$f(x) = u(x) - iu(ix)$$

é un funzionale $\mathbb{C}$-lineare. Inoltre se $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ allora $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ e $||u||_{E'} = ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$.

Dimostrazione. Facilmente segue che per ogni $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ e per ogni $x \in \mathbb{C}$ vale che

$$f((\alpha + i\beta \in \mathbb{C})x) = (\alpha + i\beta)f(x).$$

Poi osserviamo che

$$|f(x)| = \sqrt{\Re^2(f(x)) + \Im^2(f(x))} \geq |u(x)|$$

da cui segue che $||u||_{E'} \leq ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$. Viceversa

$$|f(x)| = f(x)e^{-\theta(x)} = f(xe^{-\theta(x)}) = \Re(f(xe^{-\theta(x)}) = u(xe^{-\theta(x)}) \leq ||u|| \cdot |xe^{-\theta(x)}| = ||u|| \cdot |x|.$$

Quindi segue che $||u||_{E'} \geq ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$.

Esercizio 8.19 (Versione analitica del Teorema di Hahn Banach nel caso complesso). Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia $p : E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Sia $G \subseteq E$ un sottospazio e sia $g : G \to \mathbb{C}$ tale che $|g(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$. Allora esiste $\tilde{g} : E \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineare tale che $\tilde{g} = g$ su G e $|\tilde{g}(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

Dimostrazione. Sia $u(x) := \Re(g(x))$. Allora $u : G \to \mathbb{R}$ e $u(x) \leq |u(x)| \leq |g(x)| \leq p(x)$. Applichiamo allora ad u e G la versione analitica reale del teorema di Hahn Banach. Allora esiste $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare tale che $\tilde{u} = u$ su G e $\tilde{u}(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$. In particolare il funzionale $\tilde{g}(x) := \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)$ é $\mathbb{C}$-lineare ed é tale che

$$\tilde{g}(x) = \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix) = u(x) - iu(ix) = g(x) \quad \forall x \in G$$

e

$$|\tilde{g}(x)| = \tilde{g}(x)e^{-\theta(x)} = \tilde{g}(xe^{-\theta(x)}) = \tilde{u}(xe^{-\theta(x)}) \leq p(xe^{-\theta(x)}) = |e^{-\theta(x)}|p(x) = p(x) \quad \forall x \in E.$$

9. **Versione geometrica del Teorema di Hahn Banach**

9.1. **Iperpiani.**

Definizione 9.1. *Sia E spazio vettoriale e sia $H \subseteq E$ un sottospazio proprio (ossia $H \neq E$). H si dice un* **iperpiano** *se H é un sottospazio massimale rispetto l'inclusione, ossia non esiste un altro sottospazio diverso da E e da H che lo contenga.*

In generale, grazie alla seguente proposizione, vale che gli iperpiani in uno spazio vettoriale sono tutti e solo della forma $Kerf$ con $f \in X^*$, $f \neq 0$.

Proposizione 9.2. *Sia E spazio vettoriale su K e sia $H \subset X$ un sottospazio. Dimostrare che sono equivalenti:*
1. *H é un iperpiano (ossia un sottospazio proprio massimale);*
2. *H ha codimensione 1 (ossia il sottospazio quoziente E/H ha dimensione 1);*
3. *esiste $f \in E^*$, $f \neq 0$ tale che $H = Kerf$.*

Dimostrazione. (**non svolta a lezione**)
1. $1 \implies 2$. Se H é un iperpiano sia $\sim_H$ la relazione $x \sim_H y \iff x - y \in H$ e sia $X_{\sim_H}$ lo spazio quoziente. Proviamo che la dimensione di $X_{\sim_H}$ é 1. Ovviamente, siccome $H \subsetneq X$ allora $dim X_{\sim_H} \geq 1$. Se $dim X_{\sim_H} > 1$ allora esisterebbero $x, y \in X$ tali che $[x]_{\sim_H}$ e $[y]_{\sim_H}$ sono linearmente indipendenti in $X_{\sim_H}$.
2. $2 \implies 1$ Proviamo che H é massimale. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbe V sottospazio tale che $H \subsetneq V \subsetneq X$. In particolare esisterebbero $x, y \in X$ tali che $x \in V \setminus H$ e $y \in X \setminus V$. Siccome la dimensione di $X_{\sim_H}$ é 1 segue che $[x]_{\sim_H}$ e $[y]_{\sim_H}$ sono linearmente dipendenti in $X_{\sim_H}$. Quindi esiste $\lambda \in K$ tale che $[x]_{\sim_H} = \lambda[y]_{\sim_H}$ allora $x - \lambda y \in H$ da cui segue che $y \in V$. Assurdo.
3. $2 \implies 3$ Poiché H ha codimensione 1 esiste $T : X_{\sim_H} \to K$ lineare e biettiva. Sia $I : X \to X_{\sim_H}$ l'applicazione quoziente. Poniamo $f := T \circ I$. Vale che $f \in X^*$ e $H = Kerf$.
4. $3 \implies 2$ Siccome $H = Kerf \subsetneq X$ allora $dim X_{\sim_H} \geq 1$. D'altra parte l'applicazione $T : X_{\sim_H} \to K$ definita da $T([x]_{\sim_H}) = f(x)$ é ben posta ed é iniettiva. Quindi $dim\, X_{\sim_H} = dim\, T(X_{\sim_H}) \leq dim\, K = 1$. Quindi $dim\, X_{\sim_H} = 1$.

□

Proposizione 9.3. *Sia X é uno spazio normato di dimensione infinita. Allora ogni H iperpiano di X é chiuso o é denso.*

Dimostrazione. Basta osservare che se H non é chiuso, allora $\bar{H}$ é ancora un sottospazio che contiene strettamente H. Essendo H un iperpiano, $\bar{H} = X$. □

Proposizione 9.4. *Sia X é uno spazio normato su K. Sia $f \in X^* \setminus \{0\}$. Allora $H = Kerf$ é un iperpiano chiuso se e solo $f \in X'$.*

Dimostrazione. Se $f \in X'$, $f \neq 0$, e $H = Kerf$, allora, grazie alla Proposizione 9.2 segue che H é un iperpiano ed é chiuso in quanto $H = f^{-1}(0)$ dove f é continua. Viceversa se H é un iperpiano chiuso, allora dalla Proposizione 3.6 segue che $f \in X'$. □

Corollario 9.5. *Sia X spazio normato di dimensione infinita, $X \neq \{0\}$. Allora in X esiste almeno un iperpiano chiuso che non é denso ed almeno un iperpiano denso che non é chiuso.*

Dimostrazione. Sia $f \in X^* \setminus X'$, (la cui esistenza é garantita dalla Proposizione 5.5). Allora per la Proposizione 9.2 vale che $J = Kerf$ é un iperpiano. Per la proposizione 9.4 J non è chiuso. Allora é denso. Se invece si considera $f \in X' \setminus \{0\}$ (la cui esistenza é garantita dal Corollario 8.5) segue che $H = Kerf$ é un iperpiano chiuso. □

Definizione 9.6. *Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Chiamiamo iperpiano affine ogni sottoinsieme del tipo*

$$\boxed{H := \{x \in X,\ f(x) = \alpha\}}$$

dove $f \in E^* \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si osservi che

$$H \text{ è un iperpiano affine } \iff \exists\, x_0 \in E, \quad \text{tale che } H = Ker f + x_0.$$

Infatti, se H è un iperpiano affine, basta prendere $x_0 \in H$. Allora, per ogni $x \in H$ vale che

$$f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = \alpha - \alpha = 0$$

ossia $x - x_0 \in Ker f$ da cui segue $H \subseteq Ker f + x_0$. L'inclusione opposta è banale.
Viceversa sia $H = Ker f + x_0$. Allora, posto $\alpha := f(x_0)$ vale che $H \equiv \{x \in E,\ f(x) = \alpha\}$.

9.2. **Una famiglia di seminorme: i funzionali di Minkoskii.**

Definizione 9.7. *Sia E uno spazio vettoriale. Sia $A \subseteq E$. A si dice*

(1) **assorbente o radiale** *se per ogni $x \in E$ esiste $t = t(x) > 0$ tale che $x \in tA$;*
(2) **equilibrato** *se per ogni $x \in A$ e per ogni $|t| \leq 1$ vale che $tx \in A$.*

Esercizio 9.8. Sia E uno spazio vettoriale.

(1) se A è radiale o equilibrato, allora $0 \in A$;
(2) Sia p una seminorma su E. Provare che l'insieme

$$A := \{x \in E :\ p(x) < 1\}$$

é convesso, radiale ed equilibrato. Inoltre $0 \in A$.

La seguente nozione troverà applicazione nella dimostrazione della forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach.

Definizione 9.9. *Sia X uno spazio normato e sia $A \subseteq X$ un insieme convesso e radiale. Si definisce* **gauge** *di A o* **funzionale di Minkoskii** *associato ad A la funzione $p_A : X \to \mathbb{R}^+$ definita da*

$$p_A(x) := \inf\{t > 0 :\ x \in tA\}.$$

Teorema 9.10. *Sia $A \subseteq X$ un insieme convesso e radiale. Allora*

(1) *$p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ per ogni $x \in X$ e $\lambda > 0$ (ossia p_A é positivamente omogenea di grado 1);*
(2) *$\{x \in X :\ p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X :\ p_A(x) \leq 1\}$. Se A é aperto, allora $A \equiv \{x \in X : p_A(x) < 1\}$;*
(3) *$p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ per ogni $x, y \in X$ (ossia p_A è subadditiva);*
(4) *se A é equilibrato allora p_A é una seminorma .*

Dimostrazione.

(1) Per ogni $x \in X$ e $\lambda > 0$ si ha che

$$p_A(\lambda x) = \inf\{t > 0 :\ \lambda x \in tA\} = \lambda \inf\{\lambda^{-1} t > 0 :\ x \in \lambda^{-1} tA\} = \lambda p_A(x).$$

(2) Se $p_A(x) < 1$ allora esiste $0 < t < 1$ tale che $t^{-1}x \in A$. Poiché $0 \in A$ e A è convesso, vale che $tt^{-1}x + (1 - t) \cdot 0 \in A$ ossia $x \in A$. L'altra inclusione é banale. In particolare, $\frac{x}{p_A(x)+\epsilon} \in A$ e $\frac{y}{p_A(y)+\epsilon} \in A$ da cui, essendo A convesso, segue che il segmento

$$[\frac{x}{p_A(x) + \epsilon}, \frac{y}{p_A(y) + \epsilon}] \subseteq A.$$

Ora é facile dimostrare che esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$\frac{x+y}{p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon} = t\frac{x}{p_A(x)+\epsilon} + (1-t)\frac{y}{p_A(y)+\epsilon}.$$

Ciò implica che $\frac{x+y}{p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon} \in A$ e quindi

$$p_A\Big(\frac{x+y}{p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon}\Big) \leq 1.$$

Dalla proprietà (1) segue che $p_A(x+y) \leq p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon$. Per $\epsilon \to 0$ segue la tesi.

(3) per esercizio.

□

Proposizione 9.11. *Se X é uno spazio normato e A é un convesso tale che $0 \in \overset{\circ}{A}$, allora A é radiale ed esiste $C > 0$ tale che*

$$p_A(x) \leq C||x|| \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Sia $B(0,r) := \{x \in X : \ ||x|| < r\} \subseteq A$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $x \in X$ si ha che $\frac{x}{||x||+\epsilon} r \in A$. In particolare A é radiale e per definizione

$$p_A(x) \leq \frac{||x||+\epsilon}{r}$$

per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $x \in X$ Per $\epsilon \to 0$ si ottiene

$$p_A(x) \leq \frac{||x||}{r}$$

□

9.3. **Teoremi di separazione.**

Definizione 9.12. *Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $A, B \subseteq E$, $f \in E^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremo che l'iperpiano (affine) $H = \{x \in E, \ f(x) = \alpha\}$ separa A e B in senso largo, se*

$$\boxed{A \subseteq \{x \in E, \ f(x) \leq \alpha\} \text{ e } B \subseteq \{x \in E, \ f(x) \geq \alpha\}.}$$

Diremo che l'iperpiano (affine) $H = \{x \in E, \ f(x) = \alpha\}$ separa A e B in senso stretto, se esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\boxed{A \subseteq \{x \in E, \ f(x) \leq \alpha - \epsilon\} \text{ e } B \subseteq \{x \in E, \ f(x) \geq \alpha + \epsilon\}.}$$

Teorema 9.13 (Prima Forma geometrica del Teorema di Hahn Banach). *Sia X uno spazio normato e siano $A, B \subseteq X$ tali che*

(1) *A, B sono convessi, A è aperto;*
(2) *$A \cap B = \emptyset$.*

Allora esiste $H \subseteq X$ iperpiano (affine) chiuso che separa A e B in senso largo, ossia esiste $f \in X'$ ed esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$A \subseteq \{x \in X, \ f(x) \leq \alpha\} \text{ e } B \subseteq \{x \in X, \ f(x) \geq \alpha\}.$$

Teorema 9.14 (Seconda Forma geometrica del Teorema di Hahn Banach). *Sia X uno spazio normato e siano $A, B \subseteq X$ tali che*

(1) *A, B sono convessi;*
(2) *A è compatto e B è chiuso;*
(3) *$A \cap B = \emptyset$.*

Allora esiste $H \subseteq X$ iperpiano (affine) chiuso che separa A e B in senso stretto, ossia esiste $f \in X'$, esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ e ed $\epsilon > 0$ tali che

$$A \subseteq \{x \in X,\ f(x) \leq \alpha - \epsilon\} \text{ e } B \subseteq \{x \in X,\ f(x) \geq \alpha + \epsilon\}.$$

Lemma 9.15. *Sia X uno spazio normato, $x_0 \in X$ e C un convesso aperto e non vuoto tale che $x_0 \notin C$. Allora esiste $f \in X' \setminus \{0\}$ tale che $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in C$.*

Dimostrazione. A meno di traslare C, supponiamo che $0 \in C$ e sia p_C la gauge di C. Sia $G := \mathbb{R}x_0$ e $g : G \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita come $g(tx_0) = t$. Quindi $g(x_0) = 1$ e $g \in G^*$. Proviamo che

$$g(tx_0) \leq p_C(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Infatti essendo C aperto vale che $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$e dal momento che $x_0 \notin C$ deve valere $p_C(x_0) \geq 1$ da cui segue che

- se $t > 0$ allora $p_C(tx_0) \geq t = tg(x_0) = g(tx_0)$;
- se $t \leq 0$ allora $p_C(tx_0) \geq 0 \geq t = tg(x_0) = g(tx_0)$.

Applicando il Teorema 8.1 e il Corollario (9.11) con $p = p_C$ esiste $\tilde{g} \in X^*$ e $C \geq 0$ tali che $\tilde{g} = g$ su G e

$$\tilde{g}(x) \leq p_C(x) \leq C|x| \text{ per ogni } x \in X.$$

In particolare

$$\tilde{g}(x_0) = g(x_0) = 1$$

mentre

$$\tilde{g}(x) \leq p_C(x) < 1 \quad \text{per ogni } x \in C.$$

La tesi segue definendo $f := \tilde{g}$. □

Osservazione 9.16. *Sotto le notazioni del lemma precedente, l'iperpiano $H = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ separa C e x_0 in senso largo.*

Dimostrazione del Teorema 9.13. Supponiamo che A sia aperto. Sia

$$C := A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

In particolare essendo $A - b := \{a - b : a \in A\}$ vale che

$$C = \cup_{b \in B}(A - b).$$

Essendo $A \cap B = \emptyset$ si ha che $0 \notin C$. Inoltre è facile provare che C è un convesso aperto. Grazie al Lemma 9.17 esiste $f \in X' \setminus \{0\}$ tale che $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in C$ ossia tale che $f(a) - f(b) < f(0) = 0$ per ogni $a \in A, b \in B$ ossia

$$f(a) < f(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Quindi

$$m = \sup_{a \in A} f(a) \leq \inf_{b \in B} f(b) = M.$$

Scelto $\alpha \in [m, M]$ vale che l'iperpiano $H = \{x \in X,\ f(x) = \alpha\}$ separa A e B in senso largo. □

Dimostrazione del Teorema 9.14. Sia

$$C := A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

Essendo $A \cap B = \emptyset$ si ha che $0 \notin C$. Inoltre è facile provare che C è un convesso. Proviamo che C è chiuso: infatti se $c_n = a_n - b_n \to x_0 \in X$ allora, a meno di passare per una sottosuccessione (usando la compattezza di A), si ha che esiste $a \in A$ tale che $a_n \to a \in A$. In particolare $b_n \to a - x_0 = b \in B$. Quindi $x_0 = a - b \in C$. Allora $X \setminus C$ è un aperto e quindi esiste una pallina aperta $B(0, r) := \{x \in X : ||x|| < r\}$ tale che $B(0, r) \cap C = \emptyset$. In particolare, applicando il Teorema 9.13

ai convessi chiusi C e $B(0,r)$ segue che esiste $f \in X' \setminus \{0\}$ tale che $f(a-b) \le f(-rz)$ per ogni $a \in A$, $b \in B$, $z \in B(0,1)$ da cui

$$rf(z) \le f(b) - f(a) \quad \forall |z| < 1.$$

Quindi, tenendo conto della continuità di f,

$$r||f|| = r \sup_{z \in B(0,1)} f(z) \le f(b) - f(a) \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Scelto $\epsilon = \frac{r}{2}||f||$, vale che

$$f(a) + \epsilon \le f(b) - \epsilon \quad \forall a \in A, b \in B$$

da cui

$$\sup_{a \in A} f(a) + \epsilon \le \inf_{b \in B} f(b) - \epsilon.$$

Quindi scelto $\alpha \in [m+\epsilon, M-\epsilon]$ con $m = \sup_{a \in A} f(a), M = \inf_{b \in B} f(b)$ vale che l'iperpiano $H = \{x \in X,\ f(x) = \alpha\}$ separa A e B in senso stretto. □

Dalla seconda forma geometrica di HB segue una versione più forte del Lemma 9.17:

Corollario 9.17. *Sia X uno spazio normato, $x_0 \in X$ e C un convesso chiuso e non vuoto tale che $x_0 \notin C$. Allora esiste $f \in X' \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) < \alpha < f(x_0)$ per ogni $x \in C$.*

Dalla seconda forma geometrica del Teorema di HB segue il seguente corollario:

Corollario 9.18. *Sia X é uno spazio normato e $Y \subseteq X$ un suo sottospazio vettoriale. Allora Y é denso in X se e solo se per ogni $f \in X'$ vale che "$f = 0$ su $Y \Longrightarrow f = 0_{X'}$."*

Per la sua dimostrazione premettiamo la seguente proposizione.

Proposizione 9.19. *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, Y sottospazio di X e sia $f \in X^*$ tale che f sia limitato superiormente o inferiormente su Y. Allora f si annulla su Y.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia limitato superiormente ossia $f(y) \le \alpha$ per ogni $y \in Y$. Allora $f(-y) \le \alpha$ per ogni $y \in Y$ e quindi $|f(y)| \le \alpha$ per ogni $y \in Y$. In particolare per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $y \in Y$ vale $|f(ty)| \le \alpha$ ossia $|f(y)| \le \frac{\alpha}{t}$. Per $t \to +\infty$ segue $f(y) = 0$ per ogni $y \in Y$. □

Dimostrazione del Corollario 9.18. "$\Longrightarrow$" Se Y é denso e $f = 0$ su Y, allora vale che $f = 0$ su X;

"$\Longleftarrow$" Se Y non fosse denso, allora esisterebbe $x_0 \in X \setminus \bar{Y}$. In particolare, per la seconda versione geometrica del Teorema di HB applicato al convesso chiuso $\bar{Y}$ (che é un sottospazio) e al compatto $\{x_0\}$ esisterebbe $f \in X' \setminus \{0\}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f(y) < \alpha < f(x_0)$ per ogni $y \in Y$. Per la Proposizione 9.19 seguirebbe che $f = 0$ su Y. Allora, dall' ipotesi, otterremmo che $f = 0$ su X. Assurdo. □

9.4. **Esercizi.**

Esercizio 9.20. *Sia E uno spazio vettoriale infinito dimensionale su $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $f \in E^*$, $f \neq 0$, il sottospazio $H := Ker f$ é un iperpiano. In particolare esiste almeno un iperpiano.*

Dimostrazione. (**non svolta a lezione**) Sia $f \in E^*$, $f \neq 0$. Allora $H := Ker f$ é un sottospazio. Proviamo che H é un iperpiano ossia H é massimale rispetto la relazione di inclusione. Sia F un sottospazio tale che $H \subsetneq F \subseteq E$. Proviamo che $F = E$. Sia $x_0 \in F \setminus H$ e posta $\sim_H$ é la relazione definita da

$$x \sim_H y \Longleftrightarrow x - y \in H$$

proviamo che lo spazio quoziente $E_{\sim_H} = span\{[x_0]_{\sim_H}\}$. Infatti, essendo $f \neq 0$, vale che $dim E_{\sim_H} \geq 1$. D'altra parte l'applicazione $T : E_{\sim_H} \to K$ definita da $T([x]_{\sim_H}) = f(x)$ é ben posta ed é iniettiva. Quindi $dim E_{\sim_H} = dim(T(E_{\sim_H}) \leq 1$ da cui segue che

$$dim E_{\sim_H} = 1$$

e quindi $E_{\sim_H} = span\{[x_0]_{\sim_H}\}$.

In particolare, se $y \in E$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $[y]_{\sim_H} = \lambda[x_0]_{\sim_H}$ ossia $y - \lambda x_0 \in H \subseteq F$ da cui $y = (y - \lambda x_0) + \lambda x_0 \in H + F \subset F$. □

Esercizio 9.21. Sia X uno spazio normato.

(1) Sia M un sottospazio di X. Definiamo

$$M^\perp := \{f \in X' : \ f(x) = 0 \ \forall x \in M\}.$$

Provare che $M^\perp$ é un sottospazio chiuso di X (detto **ortogonale o annichilatore** di M).

(2) Sia N un sottospazio di X'. Definiamo

$$N^\perp := \{x \in X : \ f(x) = 0 \ \forall f \in N\}.$$

Provare che $N^\perp$ é un sottospazio chiuso di X' (detto **ortogonale o annichilatore** di N).

(3) Usando la seconda forma geometrica del Teorema di H.B. provare che $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$. In particolare se M é chiuso allora $(M^\perp)^\perp = M$.

Dimostrazione.

(1) E' facile provare (dalla definizione) che se $f, g \in M^\perp$ allora per ogni $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ vale che $\lambda f + \mu g \in M^\perp$. Quindi $M^\perp$ é un sottospazio. Proviamo che $M^\perp$ é chiuso: sia $(f_n) \subseteq M^\perp$ tale che $f_n \to f$ in X'. Allora $f_n(x) = 0 \ \forall x \in M$ da cui, passando al limite per $n \to \infty$ segue $f(x) = 0 \ \forall x \in M$ ossia $f \in M^\perp$.

(2) Facilmente segue che $N^\perp$ é un sottospazio. Proviamo che $N^\perp$ é chiuso: sia $(x_n) \subseteq N^\perp$ tale che $x_n \to x$ in X. Allora $f(x_n) = 0 \ \forall f \in N$ da cui, passando al limite per $n \to \infty$, segue $f(x) = 0 \ \forall f \in N$ ossia $x \in N^\perp$.

(3) Proviamo prima di tutto che $M \subseteq (M^\perp)^\perp$, da cui, passando alle chiusure, seguirá che $(\bar{M}) \subseteq (M^\perp)^\perp$. Sia $x \in M$ e sia $f \in M^\perp$. Allora, dalla definizione di $M^\perp$, vale che $f(x) = 0$. Siccome $f(x) = 0$ per ogni $f \in M^\perp$ allora $x \in (M^\perp)^\perp$. Quindi $M \subseteq (M^\perp)^\perp$. Viceversa, supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in (M^\perp)^\perp$ tale che $x_0 \notin \bar{M}$. Allora per la seconda forma geometrica del teorema di HB esiste $f \in X'$ ed esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_0) < \alpha$ e $f(x) > \alpha$ per ogni $x \in \bar{M}$. Siccome $\bar{M}$ é un sottospazio ed f é limitato inferiormente su $\bar{M}$, dalla Proposizione 9.19 segue che $f = 0$ su $\bar{M}$. Allora $f \in M^\perp$ da cui $f(x_0) = 0$ in quando $x_0 \in (M^\perp)^\perp$. Assurdo.

□

Esercizio 9.22. Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X'. Definiamo

$$M^0 := \{f \in X' : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in M\}$$

(e lo chiamiamo **polare** di M) e

$$N^0 := \{x \in X : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall f \in N\}$$

(e lo chiamiamo **polare di** N). Provare che

(1) se $B_X := \{x \in X : \ ||x|| \leq 1\}$ e $B_{X'} = \{f \in X' : \ ||f|| \leq 1\}$ allora $B_X^0 = B_{X'}$ e $B_{X'}^0 = B_X$.

(2) se M é un sottospazio allora $M^0 = M^\perp$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la parte (2). Se M é un sottospazio ed $f \in M^0$ allora f é limitato su M. Questo implica, dalla Proposizione 9.19, che $f = 0$ su M ossia $f \in M\perp$. Il viceversa é banale. □

Riportiamo infine la risoluzione del seguente esercizio con alcune osservazioni:

Esercizio 9.23. Sia

$$K := \{(x_n) \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}.$$

(1) Si provi che K é un sottospazio chiuso di l^1;
(2) Si trovino tutti gli elementi $y = (y_n) \in l^\infty$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = 0$$

per ogni $x \in K$;
(3) Si dimostri che $K \cap l^2$ é un sottospazio denso in l^2.

Risoluzione:

(1) Si osservi che $K = KerT_b$ dove $b = (b_n)_n \in l^\infty$ e $b_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Essendo $T_b \in (l^1)'$, segue che K é un iperpiano chiuso.
(2) Se $y \in l^\infty$ é tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = 0$$

per ogni $x \in K$, scegliendo $x_h \in K$ definito da

$$x_n^h = \begin{cases} 1 & \text{se } n = h \\ -1 & \text{se } n = h+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

segue che

$$y_h - y_{h+1} = 0 \quad \text{per ogni } h.$$

Quindi y é una successione costante. Si osservi che

$$\{y \in l^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = 0 \ \forall x \in K\} = K^0$$

Quindi abbiamo ottenuto che

$$K^0 = \{(y_n) \in l^\infty : y_n = y_{n+1} \forall n\}.$$

(3) Per dimostrare che $K \cap l^2$ é un sottospazio denso in l^2 usiamo il Corollario 9.18: sia $f \in (l^2)'$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in K$. Dal Teorema di rappresentazione esiste $b \in l^2$ tale che $f = T_b$ e quindi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n = 0$ per ogni $x \in K$. Dalla parte 2, poiché $b \in l^2 \subseteq l^\infty$ segue che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale $b_n = c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $b_n \to 0$ allora $c = 0$ e quindi $b = 0$, ossia $f = 0$.

9.5. **In dimensione finita.** Concludiamo con la versione geometrica del Teorema di HB nel caso di spazi di dimensione finita.

Esercizio 9.24. Sia X uno spazio normato, $C \subseteq X$ e sia

$$co(C) := \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i c_i : \ k \in \mathbb{N}, c_i \in C, \theta_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \Big\}.$$

Provare che

(1) $co(C)$ é un convesso ed é il più piccolo convesso contenente C (per questo motivo é detto inviluppo convesso di C);
(2) se C é aperto in X, allora $co(C)$ é aperto in X;
(3) se C é limitato in X allora $co(C)$ é limitato in X;
(4) se C ha un numero finito di punti, allora $co(C)$ é compatto;
(5) se C é convesso, $x \in \overset{\circ}{C}$ e $y \in C$ allora $tx + (1-t)y \in \overset{\circ}{C}$ per ogni $t \in [0,1[$;
(6) se C é convesso allora $\bar{C}$ é convesso e $\overset{\circ}{C}$ é convesso.

Esercizio 9.25 (**Hahn Banach in dimensione finita).** Sia E uno spazio vettoriale normato di dimensione finita. Sia C un convesso, non vuoto tale che $0 \notin C$. Provare che esiste un iperpiano che separa C e 0 in senso largo. Dedurre che se C_1 e C_2 sono due convessi, non vuoti e disgiunti esiste un iperpiano che li separa in senso largo.

Dimostrazione. Prima di tutto osservare che possiamo supporre $E = \mathbb{R}^k$ dove $k = dimE$. Si provino i seguenti steps:

(1) si scelga un insieme numerabile $D = (c_n)_n$ denso in C (perché esiste D?). Definiamo $C_n = co(c_1, \cdots, c_n)$. Provare che C_n é compatto e che $\bigcup_n C_n$ é densa in C;
(2) mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in \mathbb{R}^k$ tale che $||x_n|| = 1$ e $x_n \cdot c \geq 0$ per ogni $c \in C_n$. (Sia $||y_n|| = \min_{\{c \in C_n\}} ||c|| > 0$ e sia H_n l'iperpiano non omogeneo di equazione $y_n \cdot (x - y_n) = 0$. Allora per ogni $c \in C_n$ vale che $y_n \cdot (c - y_n) \geq 0$. (Infatti se per assurdo $y_n \cdot (\bar{c} - y_n) < 0$ con $c \in C$ allora la funzione
$$f(t) = ||ty_n + (1-t)\bar{c}||^2 - ||y_n||^2 = (t-1)[(t+1)||y_n||^2 + (1-t)||c||^2 + 2tc \cdot y_n)]$$
definita per $t \in (0,1)$ tende a 0^- per $t \to 1^{-1}$ e quindi é negativa in un intorno di 1 contraddicendo la minimalitá di y_n.) Basta quindi porre $x_n = \frac{y_n}{||y_n||}$;
(3) dedurre che esiste $x \in \mathbb{R}^k$ tale che $||x|| = 1$ e $x \cdot c \geq 0$ per ogni $c \in C$..

10. I Teoremi della mappa aperta e del grafico chiuso

Ricordiamo che una funzione $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ si dice aperta se trasforma aperti in aperti. In generale se $f : X \to Y$ é continua e suriettiva, non é detto che f sia aperta. Infatti siano $X = Y = \mathbb{R}$ e sia $f(x) = x - x^3$. Allora $f(0, +\infty) = (-\infty, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$.

Questo vale se gli spazi sono di Banach ed f é un funzionale lineare. In questa sezione per ogni $r > 0$ e $x_0 \in X$ indicheremo con $B_X(x_0, r) := \{x \in X \ : ||x - x_0||_X < r\}$. Analoga definizione per $B_Y(y_0, r)$ con $y_0 \in Y$. Invece con $B_X := \{x \in X \ : ||x||_X \le 1\}$. Analoga definizione per B_Y.

Teorema 10.1 (**Teorema della mappa aperta).** *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un funzionale lineare, continuo e suriettivo. Allora esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$.*

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che se C é un insieme convesso di X allora:

(1) se $T : X \to Y$ é lineare allora $T(C)$ é convesso;
(2) $\bar{C}$ é convesso;
(3) $C + C \subseteq 2C$.

Primo step. Proviamo che se X é uno spazio normato, Y é uno spazio di Banach e $T : X \to Y$ é un operatore lineare e suriettivo, allora esiste $c > 0$ tale che

$$B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}.$$

Allo scopo di dimostrare tale asserto, cominciamo con l'osservare che

$$Y = T(X) = T(\bigcup_n nB_X(0, 1)) = \bigcup_n nT(B_X) \subseteq \bigcup_n n\overline{T(B_X(0, 1))} \subseteq Y$$

ossia $Y = \bigcup_n n\overline{T(B_X)}$.

Poiché Y é uno spazio di Banach, dal lemma di Baire, deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0\overline{T(B_X)}$ abbia interiore non vuoto. Pertanto esiste $B_Y(\bar{y}, 4c) \subseteq \overline{T(B_X)}$. Proviamo ora che $B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$. Poiché $\bar{y} \in \overline{T(B_X)}$ anche $-\bar{y} \in \overline{T(B_X)}$ (dalla simmetria della palla e dalla linearitàdell'operatore). Segue che se $x \in B_Y(0, 4c)$ si ha che

$$x = (x + \bar{y}) - \bar{y} \in B_Y(\bar{y}, 4c) + \overline{T(B_X)} \subseteq \overline{T(B_X)} + \overline{T(B_X)}$$

ossia $B_Y(0, 4c) \subseteq \overline{T(B_X)} + \overline{T(B_X)}$. Poiché $B_X)$ é convesso, dalla proprietà (1), (2) sopra, si ha che $\overline{T(B_X)}$ é convesso. Quindi, applicando la proprietà (3), abbiamo che

$$\overline{T(B_X)} + \overline{T(B_X)} \subseteq 2\overline{T(B_X)}$$

da cui segue che $B_Y(0, 4c) \subseteq 2\overline{T(B_X)}$ e quindi $B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$.

Secondo step. Proviamo che se X é uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $T : X \to Y$ é un operatore lineare e continuo tale che $B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$ per qualche $c > 0$ allora $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$.

Infatti, sia $y_0 \in B_Y(0, c)$. Allora $2y_0 \in B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$ e quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $w \in B_X$ tale che

$$||2y_0 - Tw||_X < \epsilon.$$

In particolare

$$\exists\, w_1 \in B_X \text{ tale che } ||2y_0 - T(w_1)||_X < c$$

ossia

$$||y_0 - T(\frac{w_1}{2})||_X < \frac{c}{2}.$$

Posto $x_1 := \frac{w_1}{2}$ abbiamo quindi dimostrato che

$$\exists\, x_1 \in \overline{B_X(0, \frac{1}{2})} \ \text{ tale che } ||y_0 - Tx_1||_Y < \frac{c}{2}.$$

Poiche' $y_1 = 2(y_0 - Tx_1) \in B_Y(0, c)$ applichiamo l'argomento precedente ad y_1. Allora

$$\exists\, w_2 \in B_X \text{ tale che } ||2y_1 - T(w_2)||_X < c$$

ossia

$$||y_0 - Tx_1 - T(\frac{w_2}{4})|| < \frac{c}{2^2}.$$

Posto $x_2 := \frac{w}{2^2} \in \overline{B_X(0, \frac{1}{2^2})}$ abbiamo quindi dimostrato che

$$\exists\, x_2 \in \overline{B_X(0, \frac{1}{2^2})} \ \text{ tale che } ||y_0 - Tx_1 - Tx_2||_Y < \frac{c}{2^2}.$$

Procedendo cosí si costruisce una successione $(x_n) \subseteq X$ tale che $x_n \in \overline{B_X(0, \frac{1}{2^n})}$ e

$$||y_0 - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)||_Y < \frac{c}{2^n}.$$

Sia $z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Allora

$$||z_n||_X \leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i||_X \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$

e

$$||y_0 - Tz_n||_Y < \frac{c}{2^n}.$$

In particolare, $Tz_n \to y_0$ e, dal criterio di Weistrass, z_n converge a $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con

$$||z||_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

ossia $z \in B_X$. Poiché T é continuo allora $Tz_n \to Tz$. Quindi $Tz = y_0$. $\square$

Dal teorema della mappa aperta segue che un operatore lineare, continuo e suriettivo trasforma aperti in aperti e che un operatore lineare, continuo e biettivo ha inverso continuo.

Corollario 10.2. *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e suriettivo. Allora per ogni aperto V di X si ha che $T(V)$ é un aperto di Y.*

Dimostrazione. Sia V un aperto di X e sia $y_0 \in T(V)$. Allora esiste $x_0 \in V$ tale che $T(x_0) = y_0$. Poiché V é aperto, esiste $\overline{B_X(x_0, s)} \subseteq V$, ossia $x_0 + \overline{B_X(0, s)} \subseteq V$ da cui $y_0 + T(\overline{B_X(0, s)}) \subseteq T(V)$. Dal teorema della mappa aperta esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$ da cui segue che $B_Y(0, cs) \subseteq T(\overline{B_X(0, s)})$. Quindi $B_Y(y_0, cs) = y_0 + B_Y(0, cs) \subseteq y_0 + T(\overline{B_X(0, s)}) \subseteq T(V)$. $\square$

Corollario 10.3. *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e biettivo. Allora esiste $C > 0$ tale che*

$$\|x\|_X \leq C\|T(x)\|_Y$$

per ogni $x \in X$. In particolare T^{-1} é continuo.

Dimostrazione. Per il teorema della MA, esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$. In particolare
$$T^{-1}(B_Y(0, c)) \subseteq T^{-1} \circ T(B_X) = B_X.$$
In particolare per ogni $c' < c$ e per ogni $x \in X$ tale che $\|T(x)\|_Y \leq c'$ vale che $\|x\|_X \leq 1$. Poiché per ogni $x \in X$ si ha che $\|T(c' \frac{x}{|Tx|_Y})\|_Y = c'$, si ottiene che $c' \|\frac{x}{\|Tx\|_Y}\|_X \leq 1$ ossia $\|x\|_X \leq \frac{1}{c'}\|Tx\|_Y$ per ogni $c' < c$. In particolare, per $c' \to c$ si ottiene che la tesi vale per $C = \frac{1}{c}$. □

Corollario 10.4. *Sia X uno spazio normato e siano $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ due norme su X tali che*
(1) *X é completo rispetto ad entrambe*
(2) *esiste $c > 0$ tale che $|\cdot|_2 \leq c|\cdot|_1$.*

Allora le due norme sono equivalenti.

Dimostrazione. Basta osservare che l'operatore identità$I : (X, |\cdot|_1) \to (X, |\cdot|_2)$ é continuo e biettivo. Dal Corollario 10.3 esiste $C > 0$ tale che
$$|x|_1 \leq C|I(x)|_2 = C|x|_2$$
per ogni $x \in X$. Quindi le due norme sono equivalenti. □

10.1. **Teorema del grafico chiuso.** Siano X e Y spazi normati. Se una funzione $f : X \to Y$ é continua allora è facile provare che il suo grafico
$$Graf(f) := \{(x, f(x)) : \ x \in X\}$$
è chiuso in $X \times Y$ nella topologia prodotto. Osserviamo che in generale il viceversa é falso: la funzione $f : [0, +\infty) \to [0, \infty)$, data da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
ha grafico chiuso pur essendo discontinua. Infatti
$$Graf = \{(x, \frac{1}{x}) : \ x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$
che é chiuso in quanto unione di insiemi chiusi. Se X e Y sono spazi di Banach e $f : X \to Y$ è lineare, vale il viceversa.

Teorema 10.5 (Teorema del Grafico chiuso). *Siano $(X, |\cdot|_X)$ e $(Y, |\cdot|_Y)$ due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un funzionale lineare. Supponiamo che il grafico di T, ossia l'insieme $Graf(T) := \{(x, T(x)) : \ x \in X\}$, sia un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$. Allora T é continuo. In particolare T é continuo se e solo se $Graf(T)$ é chiuso.*

Dimostrazione. Consideriamo su X la norma $|x|_T = |x|_X + |Tx|_Y$. Allora $|x|_T \geq |x|_X$ ed essendo $Graf(T)$ chiuso, é facile dedurre che $(X, |\cdot|_T)$ é uno spazio di Banach. Dal corollario 10.4, la norma $|\cdot|_T$ é equivalente a quella iniziale e quindi esiste $C > 0$ tale che $|\cdot|_T \leq C|x|_X$ per ogni $x \in X$ che implica
$$|Tx|_Y \leq |x|_T \leq C|x|_X$$
per ogni $x \in X$.

□

Osservazione 10.6. (Grafico chiuso) Usare il Teorema del grafico chiuso per provare la continuitá di un operatore lineare T tra spazi di Banach, vuol dire dimostrare che
$$(*) \quad x_n \to x_0, Tx_n \to y_0 \Longrightarrow y_0 = Tx_0.$$
Equivalentemente, per concludere che un operatore lineare T tra spazi di Banach é continuo, si puó dimostrare che
$$(**) \quad x_n \to 0, Tx_n \to y_0 \Longrightarrow y_0 = 0.$$

Infatti proviamo che

$$(**) \Longleftrightarrow (*).$$

Supponiamo che valga $(*)$ e sia $x_n \to x_0, Tx_n \to y_0$. Allora $x_n - x_0 \to 0, T(x_n - x_0) = T(x_n) - T(x_0) \to y_0 - T(x_0)$. Applicando $(*)$ segue che $y_0 - T(x_0) = 0$ ossia $y_0 = Tx_0$. Quindi vale la $(**)$. Il viceversa é banale.

10.2. **Esempi e controesempi.**

Esempio 10.7. Muniamo $C^1[0,1]$ con la norma $||u||_{C^1} = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$ e $C[0,1]$ con la norma $||\cdot||_\infty$. Sia $I : C^1[0,1] \to C[0,1]$ l'operatore definito da $I(u) = u'$. I é lineare e continuo e ha norma 1. Infatti, per ogni $\epsilon > 0$ sia $u_\epsilon(x) = \epsilon \sin \frac{x}{\epsilon}$. Allora

$$u_\epsilon(x) = \epsilon \Longleftrightarrow \frac{x}{\epsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

Siccome $x = \frac{\pi}{2}\epsilon \in [0,1]$ per $\epsilon \leq \frac{2}{\pi}$ vale che $||u_\epsilon||_\infty = \epsilon$ per $\epsilon \leq \frac{2}{\pi}$. Poi $u'_\epsilon(x) = \cos\frac{x}{\epsilon}$ da cui $||u'_\epsilon||_\infty = 1$. Quindi $||u_\epsilon|| = 1 + \epsilon$ per $\epsilon \leq \frac{2}{\pi}$. In particolare

$$||I|| = \sup_{u \neq 0} \frac{||Iu||_\infty}{||u||_{C^1}} \geq \frac{||u'_\epsilon||_\infty}{||u_\epsilon||_{C^1}} = \frac{1}{1+\epsilon} \to 1$$

quando $\epsilon \to 0$. Ora, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, I é anche suriettivo. Applicando il teorema dell'applicazione aperta, segue che I é aperta. In particolare, se restringiamo I sull'insieme $M := \{u \in C^1[0,1] : \ u(0) = 0\}$, I risulta un isomorfismo da M su $C[0,1]$.

In generale, se X o Y non sono spazi di Banach, un funzionale lineare, continuo e biettivo potrebbe non essere aperto. L'esempio seguente si basa sul fatto che lo spazio $C[0,1]$ non é completo rispetto alla norma $||\cdot||_{L^1}$.

Esercizio 10.8. *Sia $I : (C[0,1], ||\cdot||_\infty) \to (C[0,1], ||\cdot||_{L^1})$ l'operatore identita'. Provare che*

(1) *I é lineare, biettivo e continuo;*
(2) *I non é una applicazione aperta.*

Dimostrazione. Osserviamo che $C[0,1]$ non é completo rispetto alla norma integrale $||\cdot||_{L^1}$ (vedi Osservazione 2.30). Ora é facile verificare che I é lineare, biettivo e continuo. Dimostriamo che I non può essere una mappa aperta. Per assurdo, se I fosse aperta, allora $I(B_X(0,1))$ dovrebbe contenere un aperto contenente 0 e quindi esisterebbe $C > 0$ tale $B_Y(0,c) \subseteq I(B_X(0,1)) \subseteq I(B_X)$. Ragionando come nel Corollario 10.3 si ottiene che I^{-1} è continua ossia esiste $C > 0$ tale che per ogni $u \in C[0,1]$

$$||u||_\infty = ||I(u)||_\infty \leq C||u||_1 \leq C||u||_\infty.$$

Ma allora la norma $||\cdot||_1$ risulterebbe essere equivalente alla norma $||\cdot||_\infty$. Assurdo.

Se nel Teorema del grafico chiuso togliamo l'ipotesi che gli spazi X e Y siano di Banach, il teorema é falso. Vediamo il seguente esempio basato sull'osservazione che $C^1[0,1]$, munito della norma $||\cdot||_\infty$, non é uno spazio di Banach.

Esempio 10.9. Ricordiamo che $C^1[0,1]$, munito della norma $||\cdot||_\infty$, non é uno spazio di Banach. Sia $T : (C^1[0,1], \|\cdot||_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot||_\infty)$ l'operatore definito da $T(u) = u'$. Allora

- T é un operatore lineare
- T ha grafico chiuso: infatti sia $(u_n)_n \subseteq C^1[0,1]$ tale che
  - $u_n \to u \in C[0,1]$ rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$
  - $u'_n = T(u_n) \to v \in C[0,1]$.

Dimostriamo che $u \in C^1[0,1]$ e $T(u) = v$. Infatti sia $x \in [0,1]$. Per $n \to \infty$, passando al limite sotto il segno di integrale grazie alla convergenze uniforme, otteniamo che

$$u(x) - u(0) = \lim_n (u_n(x) - u_n(0)) = \lim_n \int_0^x u_n'(t)dt = \int_0^x v(t)dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene allora che $u'(x) = v(x)$ per ogni $x \in [0,1]$ ossia $Tu = v$.

- T non é continuo: infatti, sia $u_n(x) := x^n$. Allora $u_n'(x) = nx^{n-1}$ da cui

$$\sup_{u \in C^1[0,1]} \frac{||T(u)||_\infty}{||u||_\infty} \geq \frac{||T(u_n)||_\infty}{||u_n||_\infty} = n \to \infty.$$

□

10.3. **Esercizi.**

Esercizio 10.10. *Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \to Z$ un operatore lineare e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e biettivo. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che J é continuo.*

Dimostrazione. Grazie al teorema della mappa aperta, l'operatore $T^{-1} : Y \to X$ é continuo. In particolare l'operatore $J = J \circ T \circ T^{-1}$ é continuo. □

Esercizio 10.11. *Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare, continuo e iniettivo. Provare che $T^{-1} : T(X) \to X$ é continuo se e solo se $T(X)$ é chiuso in Y.*

Esercizio 10.12. *Sia H uno spazio di Hilbert. Sia V un sottospazio di H e $x \in H$, $y \in V$ tali che*

$$(x - y, v) = 0 \ \forall v \in V.$$

Provare che $y = p_V(x)$.

Esercizio 10.13. *Sia H uno spazio di Hilbert e V un sottospazio di H. Provare che*

(1) $V^\perp = (\bar{V})^\perp$;
(2) $H = \bar{V} \oplus V^\perp$.

Esercizio 10.14. *(Teorema di Pitagora: prima versione) Sia H uno spazio di Hilbert, $v_1, v_2, \cdots v_n \in V$ tra loro ortogonali. Provare che*

$$||\sum_{i=1}^n v_i||^2 = \sum_{i=1}^n ||v_i||^2.$$

Esercizio 10.15. *(Teorema di Pitagora: seconda versione) Sia H uno spazio di Hilbert, $(v_n)_n \in V$ una successione di vettori tra loro ortogonali tali che $\sum_{i=1}^\infty ||v_i||^2 < +\infty$. Provare*

$$||\sum_{i=1}^\infty v_i||^2 = \sum_{i=1}^\infty ||v_i||^2.$$

Dimostrazione. Posto $s_n := \sum_{i=1}^n v_i$, si ha che la successione (s_n) é di Cauchy in H: a tal fine osservare che se $n > m$ si ha che

$$||s_n - s_m||^2 = ||\sum_{i=m+1}^n v_i||^2 = \sum_{i=m+1}^n ||v_i||^2.$$

In particolare esiste $s \in H$ tale che $s_n \to s(=: \sum_{i=1}^\infty v_i)$ in H....

Esercizio 10.16. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx, y) = (x, Ty)$ allora T é continuo.*

Dimostrazione. Proviamo che T é chiuso: sia $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$. Allora

$$(Tx_n, z) = (x_n, Tz)$$

per ogni $z \in H$ da cui

$$(y, z) = (x, Tz) = (Tx, z)$$

per ogni $z \in H$. In particolare $(y - Tx, y - Tx) = 0$ da cui $y = Tx$.

□

Esercizio 10.17. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx, x) \geq 0$ per ogni $x \in X$ allora T é continuo.*

Dimostrazione. Proviamo che T é chiuso: sia $x_n \to x$ e $Tx_n \to y \in H$. Senza perdere di generalita', supponiamo $x = 0$ e proviamo che $y = 0$. Per ipotesi, per ogni $t > 0$ $(T(x_n - ty), x_n - ty) \geq 0$ ossia

$$(T(x_n) - tT(y), x_n - ty) = (T(x_n), x_n) - t(T(x_n), y) - t(T(y), x_n) + t^2(T(y), y) \geq 0.$$

Passanso al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$-t(y, y) + t^2(T(y), y) \geq 0$$

per ogni $t > 0$. Quindi

$$||y||^2 \leq t(T(y), y)$$

per ogni $t > 0$. Per $t \to 0$ otteniamo che $y = 0$.

□

Esercizio 10.18. *Sia $C^1[0,1]$ munito della norma $||u||_{C^1} = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$ e $C[0,1]$ sia munito della norma $||\cdot||_\infty$. Sia $I : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = \int_0^t u(x)dx$. Verificare che I ha grafico chiuso. É continuo?*

Dimostrazione. Sia $u_n, u \in C^0[0,1]$ tale che $u_n \to u$ in $C[0,1]$ e $Iu_n \to v \in C^1[0,1]$. Proviamo che $v = Iu$. Poich é $u_n \to u$ uniformente, si può passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere che per ogni $t \in (0,1)$

$$v(t) = \lim_{n\to\infty} Iu_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t u_n(x)dx = \int_0^t u(x)dx$$

ossia

$$v(t) = \int_0^t u(x)dx.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che per ogni $t \in (0,1)$ $v'(t) = u(t)$ ossia per ogni $t \in (0,1)$

$$I(u)(t) = \int_0^t u(x)dx = \int_0^t v'(x)dx = v(t).$$

Infine I é continuo per il teorema del grafico chiuso essendo $C[0,1]$ e $C^1[0,1]$ spazi di Banach con le norme considerata. □

Esercizio 10.19. *Sia H uno spazio di Hilbert munito del prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ e sia $T : H \to H$ un operatore lineare e continuo. Provare che l'operatore (aggiunto) $T^* : H \to H$ definito da*

$$< T^*x, y > = < x, Ty > \quad \forall x, y \in H$$

é un operatore lineare e continuo.

Esercizio 10.20. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare e continuo che é un'isometria. Dimostrare che $T^*T = I$ (dove T^* é l'operatore aggiunto, I é l'identita').*

Risoluzione: sia $x \in H$. Allora per ogni $y \in Y$, essendo T un'isometria vale che

$$||x-y||^2 = ||T(x-y)||^2$$
$$= ||T(x)-T(y)||^2 = ||T(x)||^2 + ||T(y)||^2 - 2 < T(x), T(y) >=$$
$$= ||T(x)||^2 + ||T(y)||^2 - 2 < T^*T(x), y >=$$
$$= ||x||^2 + ||y||^2 - 2 < T^*T(x), y >$$

ossia

$$||x||^2 + ||y||^2 - 2 < x, y >= ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2 < T^*T(x), y > .$$

Cio' implica

$$< x, y >=< T^*T(x), y >$$

per ogni $y \in H$. Quindi $x = T^*T(x)$ per ogni $x \in H$ da cui $T^*T = I$.

Esercizio 10.21. *Sia X uno spazio di Banach e $T : X \to X'$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx)(y) = (Ty)(x)$ per ogni $x, y \in X$ allora T é continuo.*

Esercizio 10.22. *Sia X uno spazio di Banach e $T : X \to X'$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx)(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$ allora T é continuo.*

Esercizio 10.23. *Per ogni $u \in C^1[0,1]$ sia $||u|| = |u(0)| + ||u'||_\infty$.*

(1) *Verificare che $\|\cdot\|$ é una norma su $C^1[0,1]$ che rende lo spazio uno spazio di Banach.*
(2) *Sia $C[0,1]$ munito della norma $||\cdot||_\infty$ e sia $I : C^1[0,1] \to C[0,1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = u'(t)$. Verificare che I ha grafico chiuso. E' continuo?*

Riportiamo infine questa versione del teorema della mappa aperta.

Esercizio 10.24. *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un funzionale lineare e continuo. Se $T(X)$ é di seconda categoria in Y allora $T(X) = Y$ ed esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0,c) \subseteq T(B_X(0,1))$.*

Dimostrazione. Osserviamo che

$$T(X) = T(\bigcup_n nB_X(0,1)) = \bigcup_n nT(B_X(0,1)).$$

Poich é $T(X)$ é di seconda categoria in Y, dalla definizione di spazio di seconda categoria, deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0\overline{T(B_X(0,1)}$ abbia interiore non vuoto. In particolare segue che $\overline{T(B_X(0,1)}$ ha interiore non vuoto. Sia $B(y_0, 4c) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$. A questo punto la dimostrazione procede analogamente alla dimostrazione del Teorema 10.1. Inoltre se $y \in Y$ allora $c\frac{y}{|y|+1} \in B_Y(0,c)$. Quindi esiste $x \in B_X(0,1)$ tale che $T(x) = c\frac{y}{|y|+1}$ ossia $T(\frac{|y|+1}{c}x) = y$. $\square$

Osservazione 10.25. *Si osservi in generale che se (X, τ) e (Y, σ) sono due spazi topologici, Y separato, e $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ é continua, allora Graff $= \{(x, f(x))\ x \in X\}$ é chiuso nella topologia prodotto di $X \times Y$ (in particolare é sequenzialmente chiuso).*

Proviamo infatti che $X \times Y \setminus Graff$ é aperto: sia $(x, y) \notin$ Graff. Allora $f(x) \neq y$. Quindi esiste U_1 intorno di $f(x)$ in Y e U_2 intorno di y in Y tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Usando la continuitá di f esiste V τ-aperto contenente x tale che $f(V) \subseteq U_1$.
In particolare $V \times U_2$ é un aperto per la topologia prodotto di $X \times Y$, contiene (x, y) e $V \times U_2 \subseteq (X \times Y) \setminus$ Graff.

Esercizio 10.26. Siano X e Y sono due spazi normati, e $T : X \to Y$ un operatore lineare tale che esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$. Allora l'applicazione T è suriettiva e aperta.

□

Esercizio 10.27. Siano X e Y due spazi normati e $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e biettivo. Se esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$ allora T^{-1} é continuo.

11. **Le topologie deboli.**

11.1. **La topologia debole $\sigma(X, X')$.** Ricordiamo quanto fatto nella sottosezione 1.8. Se

- $X \neq \emptyset$,
- $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ è una famiglia di spazi topologici assegnati
- $(\varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di funzioni con $\varphi_i : X \to Y_i$

possiamo costruire su X la una topologia σ **meno fine che renda continue** le assegnate funzioni $\varphi_i : (X, \sigma) \to (Y_i, \tau_i)$ usando come base la famiglia

$$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i) : \ V_i \in \tau_i \}.$$

Sia ora X uno spazio normato e sia X' il suo duale topologico. Vogliamo costruire su X la topologia meno fine che renda continue tutte le applicazioni

$$f : X \to \mathbb{R},\ f \in X'.$$

Chiameremo **topologia debole** tale topologia e la indicheremo con $\sigma(X, X')$ (mentre chiameremo **topologia forte** quella indotta dalla norma e la indicheremo con $\beta(X)$). Ovviamente

$$\sigma(X, X') \prec \beta(X)$$

ossia ogni aperto "debole" è un aperto "forte". Una base di aperti per questa topologia é la famiglia di intersezioni finite

$$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{finita} f_i^{-1}(V_i) : \ V_i \text{ aperto di } \mathbb{R},\ f_i \in X' \}.$$

Inoltre se $(x_n) \subseteq X$ e $x_0 \in X$ scriveremo $x_n \rightharpoonup x_0$ per indicare che la successione (x_n) σ-converge a x_0 e diremo che la successione (x_n) **converge debolmente** a x_0. Inoltre, grazie alla Proposizione 1.46, si ha che

$$x_n \rightharpoonup x_0 \Longleftrightarrow f(x_n) \to f(x_0)\ \forall f \in X'. \tag{11.1}$$

Grazie alla seguente proposizione, il limite debole é unico:

Proposizione 11.1. *La topologia debole $\sigma(X, X')$ é separata.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Da un corollario al teorema di HB, esiste $f \in X'$ tale che $f(x) \neq f(y)$. Supponiamo $f(x) < f(y)$ e sia $f(x) < \alpha < f(y)$. Allora gli insiemi disgiunti $U := f^{-1}(-\infty, \alpha)$ e $V := f^{-1}(\alpha, +\infty)$ sono aperti rispetto alla topologia debole e sono tali che $x \in U$, $y \in V$. □

In seguito indicheremo con

$$< f, x >= f(x)$$

l'azione di $f \in X'$ su $x \in X$ e allo scopo di indicizzare la famiglia di tutti i funzionali $f \in X'$ indicheremo con φ_f la funzione $f \in X'$. Quindi $\varphi_f(x) = f(x)$.

Sia ora $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_n \in X'$ e $U_i :=]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon[$. Definiamo

$$U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) := \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i).$$

Quindi

$$x \in U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) \Longleftrightarrow f_i(x_0) \in U_i \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$\Longleftrightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon\ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$\Longleftrightarrow | < f_i, x - x_0 > | < \epsilon \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Proposizione 11.2. *Per ogni $x_0 \in X$ la famiglia di aperti*

$$\mathcal{U}(x_0) := \{U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) : \ \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}, \ f_i \in X' \ \forall i \in \{1,2,\cdots,n\} \ \}$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni del punto x_0 rispetto alla topologia debole $\sigma(X, X')$.

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $\epsilon > 0$ e $f \in X'$, posto

$$U :=]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[,$$

vale che $f^{-1}(U)$ é aperto rispetto alla topologia debole $\sigma(X, X')$. Quindi gli insiemi $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ sono $\sigma(X, X')$-aperti. Poi se $x_0 \in A$ dove A é un $\sigma(X, X')$-aperto allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x_0 \in B \subseteq A$. Quindi esiste $n \in \mathbb{N}$, esistono $f_1, \cdots, f_n \in X'$ e $V_i, \cdots, V_n$ aperti di $\mathbb{R}$ tali che

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subseteq A.$$

Quindi $f_i(x_0) \in V_i \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ da cui segue che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$U_i :=]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon[\subseteq V_i \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Quindi

$$U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subseteq A.$$

□

Osservazione 11.3. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita, $x_0 \in X$, $f_1, \cdots, f_n \in X'$, $\epsilon > 0$. Allora l'intorno $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ contiene una retta passante per x_0. Infatti sia $T : X \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare definita da $T(x) = (f_i(x))_{1 \le i \le n}$. Essendo T non iniettiva (altrimenti X di dimensione finita), esiste $\bar{x} \neq 0$ tale che $T(\bar{x}) = 0$. Allora la retta $x_0 + t\bar{x}$ ($t \in \mathbb{R}$) é tutta contenuta in $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ in quanto

$$|f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0)| = 0 < \epsilon$$

per ogni $1 \le i \le N$.
In particolare ogni intorno "debole" in spazi di di dimensione infinita contiene rette e quindi gli aperti "deboli" sono illimitati. Segue che le palle $B(x_0, r) = \{x \in X : \ \|x - x_0\| < r\}$ hanno interiore vuoto rispetto alla topologia debole e non possono essere aperte per la topologia debole. La topologia debole é quindi strettamente meno fine della topologia forte negli spazi di dimensione infinita.

Osservazione 11.4. Sia X uno spazio normato di dimensione finita N. Allora la topologia debole $\sigma(X, X')$ coincide con la topologia forte. Infatti, ovviamente un aperto "debole" é aperto "forte".

Per provare il viceversa é sufficiente dimostrare che per ogni palla $B(x_0, r)$ esiste V intorno "debole" di x_0 tale che $V \subseteq B(x_0, r)$ (questo implica che ogni aperto "forte" si rappresenta come unioni di aperti deboli ed è quindi un aperto "debole"). Sia $\{e_1, \cdots, e_N\}$ una base ortonormale di X e per ogni $i \in \{1, \cdots, N\}$ sia $f_i : X \to \mathbb{R}$ la proiezione sull'i-ma componente ossia se $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, allora $f_i(x) = x_i$. Allora f_i é lineare e continua (essendo X di dimensione finita). Se $\epsilon > 0$ è tale che $\epsilon N < r$ allora per ogni $x \in U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ vale che

$$||x - x_0|| \le \sum_{i=1}^{N} |x_i - x_{0,i}| = \sum_{i=1}^{N} |f_i(x) - f_i(x_0)| \le \epsilon N < r$$

ossia $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) \subseteq B(x_0, r)$.

Proposizione 11.5. *Sia X uno spazio normato e sia $(x_n) \subseteq X$. Allora vale che:*

(i) *se $x_n \to x_0$ in X (ossia se $||x_n - x_0|| \to 0$) allora $x_n \rightharpoonup x_0$;*

(ii) *se $x_n \rightharpoonup x_0$ allora la successione (x_n) é limitata in X e*
$$||x_0|| \le \liminf_n ||x_n||$$
(ossia la norma é sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole);

(iii) *se $x_n \rightharpoonup x_0$ e $(f_n) \subseteq X'$ é tale che $||f_n - f_0||_{X'} \to 0$ allora $f_n(x_n) \to f(x_0)$.*

Dimostrazione.

(i) Se $x_n \to x_0$ in X e $f \in X'$ vale che $f(x_n) \to f(x_0)$. Quindi dalla (11.1) segue la tesi;

(ii) se $x_n \rightharpoonup x_0$ allora per ogni $f \in X'$ vale che $f(x_n) \to f(x_0)$. Quindi la successione $(f(x_n))_n$ é limitata in $\mathbb{R}$ per ogni $f \in X'$. Applicando il corollario 8.9 a $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ segue che la successione $(x_n)_n$ é limitata in X. Inoltre per ogni $f \in X'$ con $||f||_{X'} = 1$ vale che
$$|f(x_0)| = \lim_n |f(x_n)| \le \liminf_n ||x_n||$$
da cui, applicando uno dei corollari al Teorema di HB, segue che
$$||x_0|| = \sup_{f \in X',\ ||f||_{X'}=1} |f(x)| \le \liminf_n ||x_n||;$$

(iii) se $x_n \rightharpoonup x_0$, per la parte (ii) esiste $M > 0$ tale che $\sup_n ||x_n|| \le M$. Sia $(f_n) \subseteq X'$ tale che $||f_n - f_0||_{X'} \to 0$ allora
$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x_0)| &\le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \\ &\le ||f_n - f||_{X'}||x_n|| + |f(x_n) - f(x_0)| \\ &\le M||f_n - f||_{X'} + |f(x_n) - f(x_0)| \end{aligned}$$
che tende a 0 per $n \to \infty$.

$\square$

Osservazione 11.6 (Convergenza debole dentro $L^p_\mu(\Omega)$). *Possiamo caratterizzare la convergenza debole in $L^p_\mu(\Omega)$ per $1 \le p < +\infty$ nel seguente modo: una successione $(v_n)_n \subseteq L^p_\mu(\Omega)$ converge debole a $v_0 \in L^p_\mu(\Omega)$ se e solo se per ogni $\phi \in (L^p_\mu(\Omega))'$ vale che $\phi(v_n)$ converge a $\phi(v_0)$. Dimostreremo a breve che per ogni $\phi \in (L^p_\mu(\Omega))'$ esiste $u \in L^{p'}_\mu(\Omega)$ tale che $\phi = T_u$. Pertanto*
$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ in } L^p_\mu(\Omega) \iff T_u(v_n) \to T_u(v_0)\ \forall u \in L^{p'}_\mu(\Omega)$$
ossia
$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ in } L^p_\mu(\Omega) \iff \int_\Omega v_n(x)u(x)d\mu \to \int_\Omega v_0(x)u(x)d\mu\ \forall u \in L^{p'}_\mu(\Omega).$$
Inoltre, dalla proposizione precedente,

(i) *se $v_n \to v_0$ in L^p_μ (ossia se $||v_n - v_0||_p \to 0$) allora $v_n \rightharpoonup v_0$;*

(ii) *se $v_n \rightharpoonup v_0$ allora la successione (v_n) é limitata in L^p_μ e*
$$||v_0||_p \le \liminf_n ||v_n||_p$$
(ossia la norma é sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole).

Se X ha dimensione infinita, la palla aperta $B_X(0,1)$ è aperta forte ma non aperta debole. Quindi l'insieme complementare $X \setminus B_X(0,1)$ è chiuso forte ma non chiuso debole. Mentre, in generale, un insieme chiuso per la topologia forte non é detto che sia chiuso per la topologia debole, per gli insiemi convessi la proprietà di essere chiuso coincide nelle due topologie.

Teorema 11.7. *Sia X uno spazio di Banach e sia $C \subseteq X$ un sottoinsieme convesso. Allora C é debolmente chiuso se e solo se C é fortemente chiuso.*

Dimostrazione. Ovviamente se C é debolmente chiuso allora C é fortemente chiuso in quanto $\sigma(X,X') \prec \beta(X)$ dove $\beta(X)$ é la topologia forte. Viceversa sia C fortemente chiuso. Dimostriamo che il suo complementare $X\setminus C$ é aperto per la topologia debole ossia che per ogni $x_0 \in X\setminus C$ esiste un intorno aperto di x_0 rispetto la topologia debole e tutto contenuto in $X\setminus C$. Sia $x_0 \in X\setminus C$. Dal teorema di HB posso separare in senso stretto il compatto (convesso) $\{x_0\}$ dal convesso chiuso C attraverso un iperpiano chiuso, ossia esiste $f \in X'$ ed esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) < \alpha < f(x)$ per ogni $x \in C$. L'insieme $f^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ é aperto per la topologia debole, contiene x_0 ed é tutto contenuto in $X\setminus C$. □

Dal Teorema 11.7 segue che

Corollario 11.8. *Sia $\varphi : X \to]-\infty,+\infty]$ convessa. Allora*

$$\varphi s.c.i.\ \text{"fortemente"} \Longleftrightarrow \varphi\ s.c.i\ \text{"debolmente"}.$$

Osservazione 11.9. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita. Allora

$$B_X = \bar{S_1}^{\sigma(X,X')}$$

dove $S_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Infatti osserviamo che

(1) $S_1 \subseteq B_X \subseteq \overline{S_1}^{\sigma(X,X')}$. Infatti se $\|x_0\| = 1$ non c'è nulla da provare. Se $\|x_0\| < 1$ e V é un intorno di x_0 rispetto alla topologia debole, allora sappiamo che esiste $\bar{x} \in X$ tale che la retta $x_0 + t\bar{x}$ ($t \in \mathbb{R}$) é tutta contenuta in V. In particolare esiste un punto $x_1 \in V$ di norma 1: basta infatti osservare che la funzione $g(t) = \|x_0 + t\bar{x}\|$ é continua e tale che $g(0) < 1$ e $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$. Quindi si ha che $V \cap S_1 \neq \emptyset$ per ogni V intorno "debole" di x_0, ossia $x_0 \in \overline{S_1}^{\sigma(X,X')}$;
(2) B_X è un convesso chiuso "forte". Quindi è chiuso "debole"; pertanto passando alle chiusure deboli nella relazione (1) si ottiene

$$B_X = \bar{S_1}^{\sigma(X,X')}.$$

□

Osservazione 11.10. Dal corollario precedente segue che l'insieme convesso $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ é debolmente chiuso in X. Dall'Osservazione 11.9 (parte (2)) sappiamo che

$$S_1 \subseteq \{x \in X : \|x\| \le 1\} \subseteq \bar{S_1}^{\sigma(X,X')}.$$

In particolare $\bar{S_1}^{\sigma(X,X')}$ coincide con l'insieme B_X ossia $\bar{S_1}^{\sigma(X,X')} = B_X$.

Concludiamo questa sezione con la seguente osservazione:

$$\varphi : (X, \sigma(X,X')) \to \mathbb{R} \text{ é un funzionale lineare e continuo } \iff \varphi \in X'.$$

Questa proprietà si può generalizzare nel modo seguente.

Teorema 11.11. *Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Allora $T : (X,\beta(X)) \to (Y,\beta(Y))$ é continuo $\Longleftrightarrow T : (X,\sigma(X,X')) \to (Y,\sigma(Y,Y'))$ é continuo.*

Dimostrazione. $'' \Longrightarrow''$ Sia $T : (X,\beta(X)) \to (Y,\beta(Y))$ continuo. Per provare che $T : (X,\sigma(X,X')) \to (Y,\sigma(Y,Y'))$ é continuo, basterà dimostrare che $\forall f \in Y'$ il funzionale

$$f \circ T : (X,\sigma(X,X')) \to \mathbb{R}$$

é continuo. Sia $f \in Y'$. Poiché T é continuo rispetto le topologie forti, si ha che $f \circ T \in X'$. In particolare, dalla definizione di topologie debole, segue che $f \circ T$ é continuo rispetto alla topologia debole $\sigma(X,X')$.

$'' \Longleftarrow''$ Sia $T : (X,\sigma(X,X')) \to (Y,\sigma(Y,Y'))$ continuo. In particolare il $GrafT$ é un insieme chiuso in $X \times Y$ rispetto la topologia prodotto $\sigma(X,X') \times \sigma(Y,Y')$. Se proviamo che il $GrafT$

é chiuso anche per la topologia forte di $X \times Y$, dal Teorema del Grafico chiuso segue che $T : (X, \beta(X)) \to (Y, \beta(Y))$ é continuo. Se $(x_n) \to x$ in X e $Tx_n \to y_0$ in Y allora $(x_n) \rightharpoonup x$ in X e $Tx_n \rightharpoonup y_0$ in Y. Essendo il $GrafT$ un insieme chiuso in $X \times Y$ rispetto la topologia prodotto $\sigma(X, X') \times \sigma(Y, Y')$ segue che $y_0 = T(x_0)$. □

11.2. **La topologia debole* $\sigma(X', X)$.** Sia X uno spazio di Banach e sia X' il suo duale topologico. Vogliamo costruire su X' la topologia meno fine che renda continue tutte le applicazioni $(\varphi_x)_{x\in X}$ dove $\varphi_x : X' \to \mathbb{R}$ é definita da

$$\varphi_x(f) = f(x) =< f, x > .$$

Chiameremo **topologia debole*** tale topologia e la indicheremo con $\sigma(X', X)$. Un base di aperti per questa topologia é la famiglia di intersezioni finite

$$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{finita} \varphi_{x_i}^{-1}(V_i) : \ V_i \text{ aperto di } \mathbb{R}, \ x_i \in X\}.$$

Inoltre se $(f_n) \subseteq X'$ e $f_0 \in X'$ scriveremo $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ per indicare che la successione (f_n) $\sigma(X', X)$-converge a f_0 e diremo che la successione (f_n) converge rispetto la topologia debole $*$ a f_0. Grazie alla Proposizione 1.46 si ha che

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0 \Longleftrightarrow f_n(x) \to f_0(x) \ \ \forall x \in X.$$

ossia coincide con la convergenza puntuale degli operatori.

Proposizione 11.12. *La topologia debole $\sigma(X', X)$ é separata.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in X'$, $f \neq g$. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \neq g(x_0)$. Sia $f(x_0) < \alpha < g(x_0)$. Allora gli insiemi disgiunti $U := \varphi_{x_0}^{-1}(-\infty, \alpha)$ e $V := \varphi_{x_0}^{-1}(\alpha, +\infty)$ sono aperti in X' rispetto alla topologia debole* e sono tali che $f \in U$, $g \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. □

Le dimostrazioni delle seguenti proposizioni sono simili a quelle delle analoghe proprietà della topologia debole $\sigma(X, X')$.

Proposizione 11.13. *Per ogni $f_0 \in X'$ la famiglia di aperti*

$$\mathcal{U}(f_0) := \{U_{x_1,\cdots,x_n,\epsilon}(f_0) : \ x_i \in X \ \forall i \in \{1, 2, \cdots , n\}, n \in \mathbb{N}, \ \epsilon > 0\}$$

dove

$$U_{x_1,\cdots,x_n,\epsilon}(f_0) := \{f \in X' : | < f - f_0, x_i > | < \epsilon, \ 1 \leq i \leq n\}$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni di f_0 rispetto alla topologia debole*.

Proposizione 11.14. *Sia X uno spazio di Banach e sia $(f_n) \subseteq X'$. Allora vale che: Allora vale che:*

(1) *se $f_n \to f_0$ in X' (ossia se $||f_n - f_0||_{X'} \to 0$) allora $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$;*
(2) *se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ allora la successione (f_n) é limitata in X' e $||f_0|| \leq \liminf_n ||f_n||$ (ossia la norma é sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole $*$);*
(3) *se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ e $(x_n) \subseteq X$ é tale che $||x_n - x_0|| \to 0$ allora $f_n(x_n) \to f_0(x_0)$.*

Dimostrazione.

(i) segue dal fatto che la convergenza rispetto alla norma implica la puntuale;
(ii) segue dal Corollario 7.4;
(iii) segue dall'Esercizio 7.5.

La seguente proposizione afferma che i funzionali lineari e continui $\varphi : (X', \sigma(X', X)) \to \mathbb{R}$ sono tutti della forma $\varphi = \varphi_x$.

Proposizione 11.15. *SSia $\varphi : (X', \sigma(X', X)) \to \mathbb{R}$ lineare e continuo. Allora esiste $x \in X$ tale che $\varphi = \varphi_x$ ossia esiste $x \in X$ tale che*

$$\varphi(f) = f(x)\ \forall x \in X.$$

(senza dimostrazione)

Teorema 11.16 (di Banach-Alaoglou-Bourbaki). *La palla $B_{X'} = \{f \in X' :\ \|f\|_{X'} \le 1\}$ é debolmente* compatta.*

Dimostrazione. Muniamo $\mathbb{R}^X := \{\omega : X \to \mathbb{R}\} = \{(\omega_y)_{y\in X}, \omega_y \in \mathbb{R}\}$ della topologia prodotto Π ossia della topologia meno fine su $\mathbb{R}^X$ che rende continue le proiezioni

$$\Pi_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}\,,\ \Pi_x((\omega_y)_{y\in X}) = \omega_x.$$

Consideriamo l'applicazione iniettiva $\Phi : X' \to \mathbb{R}^X$ definita da

$$\Phi(f) = (f(y))_{y\in X}.$$

Primo step. Proviamo che $\Phi : (X', \sigma(X', X)) \to (\Phi(X'), \Pi|_{\Phi(X')})$ é un omeomorfismo dove $\Pi|_{\Phi(X')}$ è la topologia indotta da Π su $\Phi(X')$.

- Per provare che
$$\Phi : (X', \sigma(X', X)) \to (\mathbb{R}^X, \Pi)$$
é continua, usiamo la Proposizione 1.46: l'applicazione
$$\Phi : (X', \sigma(X', X)) \to (\mathbb{R}^X, \Pi)$$
é continua se e solo se per ogni $x \in X$ é continua l'applicazione
$$\Pi_x \circ \Phi : (X', \sigma(X', X)) \to \mathbb{R}.$$
Fissato $x \in X$ vale che
$$\Pi_x \circ \Phi(f) = \Pi_x((f(y))_{y\in X}) = f(x) = \varphi_x(f) \quad \forall\, f \in X',$$
ossia $\Pi_x \circ \Phi = \varphi_x$, e quindi l'applicazione $\Pi_x \circ \Phi$ risulta essere continua rispetto la topologia debole* (per la definizione stessa di tale topologia).
- Proviamo che la funzione inversa
$$\Phi^{-1} : (\Phi(X'), \Pi\left|_{\Phi(X')}\right.) \to (X', \sigma(X', X))$$
é continua: grazie alla Proposizione 1.46 tale applicazione é continua se e solo se per ogni $x \in X$ é continua l'applicazione $\varphi_x \circ \Phi^{-1} : (\Phi(X), \Pi\left|_{\Phi(X')}\right.) \to \mathbb{R}$. Osserviamo che $\varphi_x \circ \Phi^{-1} = \Pi_x$ per ogni $x \in X$: infatti
$$\varphi_x \circ \Phi^{-1}((f(y)_{y\in X})) = f(x) = \Pi_x((f(y)_{y\in X})$$
per ogni $f \in X'$. Essendo $\Phi(X)$ é munito della topologia restrizione della topologia prodotto Π segue che $\varphi_x \circ \Phi^{-1} : (\Phi(X), \Pi\left|_{\Phi(X')}\right.) \to \mathbb{R}$ è continua.

Secondo step. Essendo $\Phi^{-1} : (\Phi(X'), \Pi\left|_{\Phi(X')}\right.) \to (X', \sigma(X', X))$ continuo, esso trasforma compatti in compatti. Osserviamo che

$$\Phi(B_{X'}) = \{(f(x))_{x\in X} : f(x+y) - f(x) - f(y) = 0,\ f(\lambda x) - \lambda f(x) = 0\ \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}\},$$
$$= \{(w_z)_z \in \mathbb{R}^X : w_{x+y} - w_x - w_y = 0,\ w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0,\ |w_x| \le ||x||\ \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definiti quindi

$$I^X = \prod_{x\in X} [-||x||, ||x||],$$
$$K_{x,y} := \{(w_z)_z \in \mathbb{R}^X :\ w_{x+y} - w_x - w_y = 0\},$$
$$E_{x,\lambda} := \{(w_z)_z \in \mathbb{R}^X :\ w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0\}$$

vale che

$$\Phi(B_{X'}) = \big(\bigcap_{x,y,\lambda} K_{x,y}\big) \cap \big(\bigcap_{x\in X,\lambda\in\mathbb{R}} E_{x,\lambda}\big) \cap I^X.$$

Grazie al Teorema di Ticonoff, il prodotto di un numero qualsiasi di insiemi compatti é compatto rispetto la topologia prodotto (quindi I^X é compatto in $\mathbb{R}^X$). Inoltre poiché

$$K_{x,y} = \{w \in \mathbb{R}^X : \ (\Pi_{x+y} - \Pi_x - \Pi_y)(w) = 0\} = Ker(\Pi_{x+y} - \Pi_x - \Pi_y)$$

e

$$E_{x,\lambda} = \{w \in \mathbb{R}^X : \ (\Pi_{\lambda x} - \lambda\Pi_x)(w) = 0\} = Ker(\Pi_{\lambda x} - \lambda\Pi_x)$$

e le proiezioni sono continue rispetto la topologia prodotto Π, si ha che per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ gli insiemi $K_{x,y}$ e $E_{x,\lambda}$ sono chiusi in $\mathbb{R}^X$ munito della topologia prodotto. Poiché

$$\Phi(B_{X'}) = \big(\bigcap_{x,y,\lambda} K_{x,y}\big) \cap \big(\bigcap_{x\in X,\lambda\in\mathbb{R}} E_{x,\lambda}\big) \cap I^X$$

é un insieme chiuso contenuto nel compatto I^X, é esso stesso un insieme compatto in $\Phi(X')$ munito della restrizione della topologia prodotto. Quindi la palla $B_{X'} = \Phi^{-1}(\Phi(B_{X'})$ é debolmente* compatta.

□

Osservazione 11.17. *Si osservi che grazie al fatto che $B_{X'}$ é debolmente* compatta, tutte le palle $\overline{B(f_0, r)} = \{f \in X' : \ \|f - f_0\|_{X'} \leq r\}$ sono debolmente* compatte. Osservare infatti che l'applicazione $T_{f_0,r} : (X', \sigma(X', X)) \to (X', \sigma(X', X))$ definita come $T_{f_0,r}(f) = rf + f_0$ é continua e che $T(B_{X'}) = \overline{B(f_0, r)}$.*

11.3. **Specchietto sulle topologie.**

(1) **La topologia debole $\sigma(X, X')$ su X:** é la topologia meno fine che rende continue le funzioni $f \in X'$. Identificando X' con la famiglia $(\varphi_f)_{f\in X'}$ dove $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ é definita come

$$\boxed{\varphi_f(x) = f(x),}$$

$\sigma(X, X')$ é la topologia indotta su X da X' tramite la famiglia $(\varphi_f)_{f\in X'}$;

(2) **la topologia debole* $\sigma(X', X)$ su X':** é la topologia meno fine che rende continue le funzioni $(\varphi_x)_{x\in X}$ dove $\varphi_x : X' \to \mathbb{R}$ é definita come

$$\boxed{\varphi_x(f) = f(x);}$$

$\sigma(X', X)$ é la topologia indotta indotta su X' da X tramite la famiglia $(\varphi_x)_{x\in X}$;

(3) **la topologia debole $\sigma(X', X'')$ su X'':** essendo $X'' = (X')'$, su X' possiamo definire la topologia meno fine su X' che rende continue le funzioni $\xi \in X''$. Identificando X'' con la famiglia $(\varphi_\xi)_{\xi\in X''}$ dove $\varphi_\xi : X' \to \mathbb{R}$ é definita come

$$\boxed{\varphi_\xi(f) = \xi(f),}$$

$\sigma(X', X'')$ é la topologia indotta su X' da X'' tramite la famiglia $(\varphi_\xi)_{\xi\in X''}$. Si noti che $\forall x \in X$ il funzionale $\varphi_x \in X''$ ossia $(\varphi_x)_{x\in X} \subseteq (\varphi_\xi)_{\xi\in X''}$. Quindi $\sigma(X', X) \prec \sigma(X', X'')$.

(4) **la topologia debole* $\sigma(X'', X')$ su X'':** è la topologia meno fine su X'' che rende continue le funzioni $(\phi_f)_{f\in X'}$ dove $\phi_f : X'' \to \mathbb{R}$ é definita come

$$\boxed{\phi_f(\xi) = \xi(f).}$$

$\sigma(X'', X')$ é la topologia su X'' da X' tramite la famiglia $(\phi_f)_{f\in X'}$.

11.4. **Gli spazi riflessivi.** Sia X spazio di Banach, sia X' il suo duale e sia $X'' := (X')'$. Chiamiamo **evaluation** o **valutazione** l'applicazione $J : X \to X''$ che ad ogni x associa il funzionale lineare e continuo $Jx : X' \to \mathbb{R}$ definito da

$$< Jx, f >= f(x) \quad \forall f \in X'.$$

(ossia Jx coincide con il funzionale φ_x definito nella sezione dedicata alla topologia debole*). Si osservi che $Jx \in X''$ e J é un'isometria. Infatti Jx é lineare e da uno dei corollari al teorema di Hahn-Banach si ha che

$$\sup_{f \in X' :\ ||f|| \leq 1} | < Jx, f > | = \sup_{f \in X' :\ ||f|| \leq 1} |f(x)| = ||x||$$

da cui $Jx \in X''$ e $||Jx||_{X''} = ||x||$.

Definizione 11.18. *Lo spazio X si dice* **riflessivo** *se J é suriettiva su X''.*

Osservazione 11.19. Uno spazio X é riflessivo se e solo se $X'' = (\varphi_x)_{x \in X}$. In particolare se X é riflessivo, su X' la topologia debole $\sigma(X', X'')$ (indotta da X'') e debole* $\sigma(X', X)$ (indotta da X) coincidono.

Osservazione 11.20. Se $dimX < +\infty$ allora J é suriettivo (in quanto $dimX = dimX' = dimX''$). In particolare la topologia $\sigma(X', X) = \sigma(X', X'')$. Inoltre $\sigma(X', X'') = \beta(X')$ per l'Osservazione 11.4. Quindi la topologia debole* $\sigma(X', X)$ coincide con la topologia forte $\beta(X')$.

Teorema 11.21. (di Kakutani) *X é riflessivo se e solo se la palla $B_X = \{x \in X : \ \|x\|_X \leq 1\}$ é $\sigma(X, X')$ compatta.*

Allo scopo di dimostrare l'implicazione "$\Longleftarrow$" premettiamo il seguente lemma (senza dimostrazione) :

Lemma 11.22. (di Goldstine) *L'insieme $J(B_X)$ é denso in $B_{X''}$ rispetto la topologia debole* $\sigma(X'', X')$.*

Dimostrazione. (del Teorema 11.21).

"$\Longrightarrow$" Essendo J un'isometria suriettiva si ha che $B_X = J^{-1}(B_{X''})$. Dal Teorema di Banach-Alouglu-Bourbaki si ha che $B_{X''}$ é $\sigma(X'', X')$-compatta. Se proviamo che

$$J^{-1} : (X'', \sigma(X'', X')) \to (X, \sigma(X, X')) \tag{11.2}$$

é continua, allora seguirá che $B_X = J^{-1}(B_{X''})$ é $\sigma(X, X')$-compatta (perché immagine di un compatto tramite una funzione continua). Grazie alla Proposizione 1.47, l'applicazione (11.2) é continua $\Longleftrightarrow f \circ J^{-1} : (X'', \sigma(X'', X')) \to \mathbb{R}$ é continua $\forall f \in X'$. Fissiamo $f \in X'$. Allora per ogni $\xi \in X''$, se $x \in X$ è tale che $Jx = \xi$ (tale x esiste per la suriettività di J), vale che

$$f \circ J^{-1}(\xi) = f(x) =< Jx, f >=< \xi, f >= \phi_f(\xi)$$

dove $\phi_f : X'' \to \mathbb{R}$ é la funzione definita da $\phi_f(\xi) = \xi(f)$.

Quindi $f \circ J^{-1} = \phi_f$ che è un'applicazione continua rispetto la topologia debole* su X''. Segue che $f \circ J^{-1} : (X'', \sigma(X'', X')) \to \mathbb{R}$ é continua.

"$\Longleftarrow$" Dal lemma di Goldstine si ha che $J(B_X)$ é $\sigma(X'', X')$-densa in $B_{X''}$. Se proviamo che $J(B_X)$ é compatta rispetto la topologia $\sigma(X'', X')$, allora $J(B_X) = B_{X''}$. Essendo J un'isometria, si conclude poi facilmente che $J(X) = X''$.

Poiché $J : X \to X''$ é lineare e continua "forte-forte", per il Teorema 11.11 vale che J è continua "debole-debole", ossia

$$J : (X, \sigma(X, X')) \to (X'', \sigma(X'', X''')) \tag{11.3}$$

é continua. Essendo $\sigma(X'', X') \prec \sigma(X'', X''')$ segue che

$$J : (X, \sigma(X, X')) \to (X'', \sigma(X'', X')) \tag{11.4}$$

é continua. Poiché per ipotesi B_X é $\sigma(X,X')$-compatta segue che $J(B_X)$ é $\sigma(X'',X')$-compatta. $\square$

Osservazione 11.23. Si osservi che, grazie al fatto che in uno spazio riflessivo B_X é debolmente compatta, allora in uno spazio riflessivo tutte le palle $\overline{B(x_0,r)} = \{x \in X : \|x - x_0\|_{X'} \le r\}$ sono debolmente compatte. Infatti osservare che l'applicazione $T_{x_0,r} : (X, \sigma(X,X')) \to (X, \sigma(X,X'))$ definita come $T_{x_0,r}(x) = rx + x_0$ é continua e che $T(B_X) = \overline{B(x_0,r)}$.

Esercizio 11.24. Sia X uno spazio di Banach.

(1) se $C \subseteq X$ é debolmente compatto allora C é debolmente chiuso e limitato;
(2) se $C \subseteq X$ é convesso e debolmente compatto allora C é chiuso e limitato.

Dimostrazione.

(1) Essendo C $\sigma(X,X')$-compatto, si ha che C é anche $\sigma(X,X')$-chiuso. Allo scopo di provare che C é limitato, usiamo il Corollario di BS e proviamo quindi che per ogni $f \in X'$ l'insieme $f(C) = \{f(c) : c \in C\}$ é limitato in $\mathbb{R}$. Questo é una facile conseguenza del fatto che ogni $f \in X'$ é $\sigma(X,X')$-continua e come tale trasforma insiemi $\sigma(X,X')$-compatti in insiemi compatti (e quindi limitati) di $\mathbb{R}$.
(2) Dalla parte (1) segue che C é $\sigma(X,X')$-chiuso e limitato. Essendo C convesso, dalla Proposizione 11.7 si ha che C é fortemente chiuso.

$\square$

Corollario 11.25. *Sia X uno spazio riflessivo, sia C un sottoinsieme convesso. Allora C é debolmente compatto se e solo se C é chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Un'implicazione segue dall'esercizio precedente. Viceversa, essendo C un convesso chiuso, per il Teorema 11.7, C é anche debolmente chiuso. Inoltre essendo C limitato, si ha che esiste $R > 0$ tale che $C \subseteq \overline{B(0,R)}$ che è debolmente compatta per il Teorema 11.21. Essendo C é un sottoinsieme debolmente chiuso contenuto in un insieme debolmente compatto, C é debolmente compatto. $\square$

Allo stesso modo, applicando il Corollario 7.2 invece del Corollario 8.9 e il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbakii al posto del Teorema di Kakutani, si puo' provare che

Esercizio 11.26. *Sia X uno spazio di Banach e sia $C' \subseteq X'$. Provare che C' é debolmente* compatto se e solo C é debolmente* chiuso e limitato.*

Corollario 11.27. *Sia X uno spazio riflessivo, sia C un sottoinsieme convesso chiuso non vuoto. Sia $\varphi : C \to]-\infty, +\infty]$ convessa e semicontinua inferiormente, $\varphi \neq +\infty$. Se C non é limitato si assuma ulteriormente che*

$$\lim_{\|x\|\to\infty,\ x\in C} \varphi(x) = +\infty. \tag{11.5}$$

Allora esiste $x_0 \in C$ tale che $\varphi(x_0) = \min_C \varphi(x) (\in \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia

- τ_C la topologia indotta su C della topologia forte $\beta(X)$
- σ_C la topologia indotta su C dalla topologia debole $\sigma(X,X')$.

Applicheremo il Teorema di Weirstrass 1.53 1.49 con $X = C$ e con $\tau = \sigma_C$. Quindi dimostriamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il sottolivello $E_\alpha := \{x \in C : \varphi(x) \le \alpha\}$ é σ_C-compatto in C. Essendo φ τ_C-s.c.i., abbiamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il sottolivello $E_\alpha := \{x \in C : \varphi(x) \le \alpha\}$ è τ_C-chiuso dentro C che è chiuso forte. Quindi E_α è chiuso forte. Inoltre, essendo φ convessa, E_α è convesso. Per il Teorema 11.7, segue che E_α è $\sigma(X,X')$-chiuso.

Inoltre E_α é limitato: infatti é ovvio se C é limitato. Se invece C non é limitato, supponiamo per assurdo che E_α non sia limitato. Esisterebbe allora una successione $(x_n)_n \subseteq E_\alpha$ tale che

$\|x_n\| \to +\infty$. Dall'ipotesi (11.5) seguirebbe che $\varphi(x_n) \to +\infty$ contro il fatto che per definizione $\varphi(x_n) \leq \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$. Applicando quindi il Corollario 11.25 possiamo concludere che E_α é $\sigma(X, X')$-compatto. Infine essendo C convesso e chiuso si ha che C è chiuso "debolmente". Essendo E_α $\sigma(X, X')$-compatto e contenuto in C che è chiuso "debolmente", segue che E_α é σ_C-compatto. $\square$

Corollario 11.28. *Sia X uno spazio riflessivo, sia $F \subseteq X$ un sottospazio chiuso. Allora F é riflessivo.*

Dimostrazione. Grazie al Teorema di Kakutani, é sufficiente dimostrare che B_F é $\sigma(F, F')$-compatta. Essendo F un sottospazio chiuso, applicando il Corollario 11.25 si ha che F é $\sigma(X, X')$-chiuso. Poiché $B_F = B_X \cap F$ e B_X é $\sigma(X, X')$-compatta, segue che B_F é $\sigma(X, X')$-compatta e quindi B_F è compatta nella topologia indotta da $\sigma(X, X')$ su F. Se proviamo che $\sigma(X, X')_{|F} = \sigma(F, F')$ abbiamo concluso. A tal scopo dimostriamo che

$$F' = \{g_{|F} : g \in X'\}.$$

Se $f \in F'$ allora, grazie al teorema di Hahn-Banach, si ha che $\exists\ g \in X'$ tale che $g_{|F} = f$. Viceversa se $f \in X'$ allora $f_{|F} \in F'$. $\square$

Esercizio 11.29. *Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'isometria suriettiva. Allora*

$$X \text{ é riflessivo } \iff Y \text{ é riflessivo.}$$

In particolare, se X é riflessivo e $T : X \to Y$ un'isometria, allora $T(X)$ é riflessivo.

Corollario 11.30. *Sia X uno spazio di Banach. Allora X é riflessivo $\iff$ X' é riflessivo.*

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" Grazie al Teorema 11.16 $B_{X'}$ é $\sigma(X', X)$-compatta. Essendo X riflessivo, si ha che $\sigma(X', X'') = \sigma(X', X)$ (vedi Osservazione 11.19). Pertanto $B_{X'}$ é anche $\sigma(X', X'')$-compatta e applicando il Teorema 11.21 segue che X' é riflessivo.

"$\Longleftarrow$" Essendo X' riflessivo, dall'implicazione ora dimostrata segue che X'' é riflessivo. Essendo J un'isometria, si ha che $J(X)$ é un sottospazio chiuso di X''. Quindi $J(X)$ é riflessivo. Essendo $J : X \to J(X)$ un'isometria suriettiva, dall'esercizio 11.29 segue che anche X é riflessivo. $\square$

11.5. **Dentro gli spazi di Hilbert.** Sia H uno spazio di Hilbert (reale) munito del prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$. Allora per ogni $x \in H$ il funzionale $T_x : H \to \mathbb{R}$ definito come

$$T_x(y) :=< x, y >$$

é lineare e continuo, ossia $T_x \in H'$. Infatti la linearità segue dalle proprietà del prodotto scalare, mentre la continuità segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|T_x(y)| = | < x, y > | \leq ||x|| ||y||$$

da cui

$$||T_x||_{H'} \leq ||x||.$$

Inoltre scegliendo $y = x$ si ottiene che

$$||T_x||_{H'} \geq \frac{< x, x >}{||x||} = ||x||.$$

Quindi $||T_x||_{X'} = ||x||_X$. In particolare l'applicazione $T : H \to H'$ definita come $T(x) := T_x$ è un'isometria. Si osservi che $< x, y >= 0 \forall y \in H$ implica $< x, x >= 0$ da cui $x = 0$.

Osservazione 11.31. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $(x_n) \subseteq H$. Se $x_n \rightharpoonup x_0$ in H e se $||x|| = \lim_n ||x_n||$ allora $x_n \to x$ in H. Infatti*

$$||x_n - x||^2 =< x_n - x, x_n - x >= ||x_n||^2 + ||x||^2 - 2 < x_n, x >\to 0.$$

11.6. **Gli spazi separabili.**

Definizione 11.32. *Uno spazio topologico X si dice separabile se esiste $D \subseteq X$ denso e numerabile.*

Proposizione 11.33. *Sia X uno spazio metrico separabile e $F \subseteq X$. Allora F é separabile.*

Dimostrazione. Sia $D = (x_n)_n$ denso in X e per ogni $r \in \mathbb{Q}^+$ sia $y_{n,r} \in B(x_n, r) \cap F$ se $B(x_n, r) \cap F \neq \emptyset$. L'insieme $D' = (y_{n,r})_{n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}^+}$ é numerabile. Proviamo che D' é denso in F. Infatti sia $z \in F$ e $\epsilon > 0$ e proviamo che $D' \cap (B(z, \epsilon) \cap F) \neq \emptyset$. Sia $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < \frac{\epsilon}{2}$. Allora, essendo D denso in X, esiste $x_n \in B(z, r)$. In particolare $z \in B(x_n, r)$ ossia $B(x_n, r) \cap F \neq \emptyset$. Quindi esiste l'elemento $y_{n,r} \in B(x_n, r) \cap F$ ed é tale che

$$d(y_{n,r}, z) \leq d(y_{n,r}, x_n) + d(x_n, z) \leq r + r < \epsilon$$

ossia $y_{n,r} \in (B(z, \epsilon) \cap F) \cap D'$. □

Teorema 11.34. *Sia X uno spazio di Banach. Se X' é separabile allora X é separabile.*

(senza dimostrazione)

Osservazione 11.35. Il precedente teorema non si inverte, ossia se X é separabile non é detto che X' sia separabile. Si consideri infatti $X = L^1(\Omega)$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Dimostreremo che $L^1(\Omega)$ é separabile (vedi Teorema 13.5) mentre il suo duale $L^\infty(\Omega)$ non é separabile (Proposizione 13.9).

Teorema 11.36. *Sia X uno spazio di Banach. Allora X é separabile e riflessivo se e solo se X' é separabile e riflessivo.*

Dimostrazione. "$\Longleftarrow$" Se X' é separabile, grazie al Teorema 11.34 vale che X é separabile. Inoltre essendo X' riflessivo, dal Teorema 11.30 segue che X é riflessivo.

"$\Longrightarrow$" Essendo X riflessivo e separabile, anche X'' é riflessivo e separabile (in quanto J é un'isometria suriettiva su X''). Applicando l'implicazione precedentemente provata segue che anche X' é separabile e riflessivo. □

Teorema 11.37. *Sia X uno spazio di Banach. Allora*

(1) *X é separabile $\Longleftrightarrow$ $B_{X'}$ é $\sigma(X', X)$-metrizzabile;*
(2) *X' é separabile $\Longleftrightarrow$ B_X é $\sigma(X, X')$-metrizzabile.*

(senza dimostrazione)

Da questo teorema segue il seguente corollario:

Corollario 11.38. *Sia X uno spazio di Banach.*

(1) *se X é separabile e $(f_n)_n \subseteq X'$ é limitata allora esiste $(f_{k_n})_n \subseteq (f_n)_n$ debolmente* convergente in X'.*
(2) *se X é riflessivo e $(x_n)_n \subseteq X$ é limitata allora esiste $(x_{k_n})_n \subseteq (x_n)_n$ debolmente convergente in X.*

Dimostrazione.

(1) Grazie al Teorema 11.16 l'insieme $B_{X'}$ é debolmente* compatto. Inoltre, essendo X é separabile, dal Teorema 11.37(1) segue che l'insieme $B_{X'}$ é $\sigma(X', X)$-metrizzabile. In particolare, grazie alla Proposizione 1.31 $B_{X'}$ é debolmente* compatta per successioni. Essendo $(f_n)_n \subseteq X'$ limitata, allora esiste $C > 0$ tale che $(f_n)_n \subseteq C B_{X'}$. Quindi $(\frac{f_n}{C})_n \subseteq B_{X'}$ ammette una sottosuccessione debolmente* convergente. In particolare esiste $(f_{k_n})_n \subseteq (f_n)_n$ debolmente* convergente.

(2) Sia $M_0 := span_{\mathbb{R}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $M := \overline{M_0}$. Essendo M un sottospazio chiuso, dal Corollario 11.28 segue che M é riflessivo. Essendo $(x_n)_n$ limitata, esiste $C > 0$ tale che $(x_n)_n \subseteq CB_M$. Se proviamo che M' é separabile, applicando il Teorema 11.37 (2) avremmo che l'insieme B_M é $\sigma(M, M')$-metrizzabile. In particolare, In particolare, grazie alla Proposizione 1.31 seguirebbe che B_M é debolmente compatta per successioni e si potrebbe concludere ragionando come nella parte (1). Allo scopo di dimostrare che M' é separabile, é sufficiente provare che M é separabile ed, essendo M riflessivo, applicare il Teorema 11.36. Ora sia $\Lambda_n := span_{\mathbb{Q}}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Poiché Λ_n é in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbb{Q}^n$, Λ_n é numerabile. È facile provare che l'insieme numerabile

$$span_{\mathbb{Q}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$$

é denso in M.

□

11.7. **Sintesi sulle topologie.**

(1) **La topologia debole $\sigma(X, X')$ su X:**
- é indotta dalle funzioni $f \in X'$ ossia dalla famiglia $(\varphi_f)_{f\in X'}$ dove $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ é definita come
$$\varphi_f(x) = f(x);$$
- $x_n \rightharpoonup x \iff f(x_n) \to f(x)\ \forall f \in X'$;
- gli intorni di $x_0 \in X$ sono della forma:
$$U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) = \{x \in X : | < f_i, x - x_0 > | < \epsilon,\ 1 \le i \le n\}$$
- i funzionali lineari e debolmente continui su X sono tutti della forma φ_f;
- la palla chiusa B_X é debolmente compatta se e solo se X é riflessivo;
- un convesso C é chiuso $\iff$ C é debolmente chiuso;
- se X é riflessivo, un insieme convesso C é chiuso e limitato $\iff$ C é debolmente compatto;
- X' é separabile $\iff$ la palla chiusa B_X é metrizzabile rispetto alla topologia debole

(2) **La topologia debole* $\sigma(X', X)$ su X':**
- indotta dalle funzioni $(\varphi_x)_{x\in X}$ dove $\varphi_x : X' \to \mathbb{R}$ é definita come
$$\varphi_x(f) = f(x);$$
- $f_n \rightharpoonup^* f \iff f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in X$;
- Intorni di $f_0 \in X'$ della forma:
$$U_{x_1,\cdots,x_n,\epsilon}(f_0) = \{f \in X' : | < f - f_0, x_i > | < \epsilon,\ 1 \le i \le n\};$$
- i funzionali lineari e debolmente * continui su X' sono tutti della forma φ_x (senza dimostrazione);
- la palla chiusa $B_{X'}$ é debolmente * compatta,
- X é separabile se e solo se $B_{X'}$ é metrizzabile rispetto la topologia debole* (senza dimostrazione);
- $\sigma(X', X)$ é meno fine della topologia $\sigma(X', X'')$.

(3) **La topologia debole $\sigma(X', X'')$ su X':**

- é indotta dalle funzioni $(\varphi_\xi)_{\xi\in X''}$ dove $\varphi_\xi : X' \to \mathbb{R}$ é definita come
$$\varphi_\xi(f) = \xi(f);$$
si noti che $\forall x \in X$ il funzionale $\bar{\xi} = \varphi_x$ definito come $\bar{\xi}(f) = f(x)$ appartiene a X'' e che $\varphi_{\bar{\xi}} = \varphi_x$. In particolare la famiglia $(\varphi_x)_{x\in X} \subseteq (\varphi_\xi)_{\xi\in X''}$. Quindi la topologia $\sigma(X', X)$ é meno fine della $\sigma(X', X'')$.

- $f_n \rightharpoonup f \iff \xi(f_n) \to \xi(f) \ \ \forall \xi \in X''$;

- gli intorni di $f_0 \in X'$ sono della forma:
$$U_{\xi_1,\cdots,\xi_n,\epsilon} = \{f \in X' : | < \xi_i, f - f_0 > | < \epsilon, \ 1 \le i \le n\}.$$

(4) **La topologia debole* $\sigma(X'', X')$ su X'':**
- é indotta dalle funzioni $(\phi_f)_{f\in X'}$ dove $\phi_f : X'' \to \mathbb{R}$ é definita come
$$\phi_f(\xi) = \xi(f);$$
- $\xi_n \rightharpoonup^* \xi \iff \xi_n(f) \to \xi(f) \ \forall f \in X'$;

- gli intorni di $\xi_0 \in X''$ sono della forma:
$$U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon} = \{\xi \in X : | < \xi - \xi_0, f_i > | < \epsilon, \ 1 \le i \le n\};$$
- la palla chiusa $B_{X''}$ é debolmente* compatta;
- $J(B_X)$ é debolmente* densa in $B_{X''}$ (senza dimostrazione).

11.8. Gli spazi uniformente convessi.

Definizione 11.39. *Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si dice* **uniformente convesso** *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$*
$$\|x\|, \|y\| \le 1, \ \|x - y\| > \epsilon \Longrightarrow \|\frac{x + y}{2}\| < 1 - \delta.$$

Osserviamo che questa proprietà non é stabile nel passaggio ad una norma equivalente. Per esempio $\mathbb{R}^2$ munito della norma euclidea é uno spazio uniformente convesso (vedremo che tutti gli spazi prehilbertiani sono uniformente convessi) mentre $\mathbb{R}^2$ munito della norma $|(u, v)| = |u| + |v|$ non lo é. Infatti se prendiamo $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$ vale che $\|x\|, \|y\| \le 1$, per ogni $0 < \epsilon < 2$ vale che $\|x - y\| = 2 > \epsilon$ e $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$ ossia non esiste $\delta > 0$ tale che $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.

Proposizione 11.40. *Se H é uno spazio prehilbertiano, allora H é uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Dall'identità del parallelogramma
$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
Quindi se $\|x\|, \|y\| \le 1$ e $\|x - y\| > \epsilon > 0$ allora $\|x + y\|^2 \le 4 - \epsilon^2$ da cui $\|\frac{x+y}{2}\| \le \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$. Basta quindi scegliere $0 < \delta < 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$ per avere che $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$. □

Teorema 11.41. *Sia E uno spazio di Banach uniformente convesso. Allora E é riflessivo.*

(non svolta a lezione) *Dimostrazione.* Si noti che essendo J un'isometria, $J(B_E)$ é chiuso in E'' (rispetto la norma). Se proviamo che
$$\overline{J(B_E)} = B_{E''} \tag{11.6}$$
allora seguirà che $J(B_E) = B_{E''}$ da cui la suriettivitàdi J. Allo scopo di provare la (11.6), fissiamo $\xi \in B_{E''}$ e proviamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x \in B_E$ tale che $||Jx - \xi||_{E''} \le \epsilon$. Sia $\epsilon > 0$. Senza

perdere di generalitàpossiamo supporre $\|\xi\|_{E''} = 1$ (altrimenti $\eta = \frac{\xi}{\|\xi\|_{E''}}$ ha norma 1 e se $x \in B_E$ é tale che $||Jx - \eta||_{E''} < \frac{\epsilon}{||\xi||_{E''}}$ allora $||J(x\|\xi\|_{E''}) - \xi||_{E''} < \epsilon$ con $x\|\xi\|_{E''} \in B_E$.) Essendo E uno spazio uniformemente convesso, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in E,\ \|x\|, \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| > \epsilon \Longrightarrow \|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta.$$

Essendo $\|\xi\|_{E''} = 1$, dalla definizione di norma esiste $f \in B_{E'}$ tale che

$$\xi(f) > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{11.7}$$

Consideriamo ora il seguente intorno di ξ (rispetto la topologia $\sigma(E'', E')$)

$$V := U_{f,\frac{\delta}{2}}(\xi) = \{\eta : | < \eta - \xi, f > | < \frac{\delta}{2}\}.$$

Dal Lemma 11.22 si ha che $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Quindi esiste $x \in B_E$ tale che $Jx \in V$ ossia tale che

$$| < Jx - \xi, f > | < \frac{\delta}{2}. \tag{11.8}$$

Se $\xi \in B_\epsilon(Jx)$ dove $B_\epsilon(Jx) = \{\eta : ||\eta - Jx||_{E''} \leq \epsilon\}$ avremmo la tesi. Per assurdo supponiamo che $\xi \in W := E \setminus B_\epsilon(Jx)$. Essendo W il complementare di un insieme $\sigma(E'', E')$ compatto (dal Teorema 11.16), si ha che W é un $\sigma(E'', E')$-aperto contenente ξ. Quindi $W \cap V$ é un $\sigma(E'', E')$-aperto contenente ξ e dal Lemma 11.22 si ha che $W \cap V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Esiste quindi $x' \in B_E$ tale che $Jx' \in W \cap V$. Quindi

$$| < Jx' - \xi, f > | < \frac{\delta}{2}. \tag{11.9}$$

Addizionando (11.8) e (11.9) e ricordando che $< Jx, f >= f(x)$ segue che

$$-f(x) + \xi(f) - f(x') + \xi(f) < \delta$$

ossia

$$2\xi(f) < f(x + x') + \delta \leq ||f||_{E'}||x + x'|| + \delta \leq ||x + x'|| + \delta.$$

Quindi, applicando la (11.7), si ottiene che

$$||\frac{x + x'}{2}|| \geq \xi(f) - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta.$$

Dalla scelta di δ segue che $\|x - x'\| \leq \epsilon$ e quindi $\|Jx - Jx'\| = \|x - x'\| \leq \epsilon$ in contraddizione con il fatto che $Jx' \in W$. □

Corollario 11.42. *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora H é riflessivo.*

Dimostrazione. Applicare la Proposizione 11.40 e il Teorema 11.41.

Teorema 11.43 (della proiezione). *Sia H uno spazio di Hilbert, $C \subsetneq H$ un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto. Allora per ogni $x_0 \in H$ esiste un unico $y_0 \in C$ (detto proiezione di x_0 su C) tale che*

$$||x_0 - y_0|| = \min_{x \in C} ||x - x_0||.$$

Dimostrazione. **Unicità**: dimostriamo che in uno spazio di Hilbert H, la norma è strettamente convessa. Infatti $x, y \in H$.. Allora, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schartz, vale che

$$||\theta x + (1-\theta)y||^2 = \theta^2||x||^2 + (1-\theta)^2||y||^2 + 2(\theta)(1-\theta)(x, y)$$

$$\leq \theta^2||x||^2 + (1-\theta)^2||y||^2 + 2(\theta)(1-\theta)||x|| \cdot ||y|| = (\theta||x|| + (1-\theta)||y||)^2 < \theta||x||^2 + (1-\theta)||y||^2$$

essendo $t \to t^2$ strettamente convessa. Questo implica l'unicità del punto di minimo.

Esistenza. Prima dim.: usare il Corollario 11.27 su C con la funzione coerciva $f(x) = ||x - x_0||(\geq ||x|| - ||x_0||)$.

Seconda dim.: sia $(x_n)_n \subseteq C$ tale che $||x_n - x_0|| \to \inf_{x \in C} ||x - x_0|| = d < +\infty$. Proviamo che $(x_n)_n$ è di Cauchy in H (e quindi converge a $y_0 \in C$ che realizza il minimo). Dall'identità del parallelogramma

$$\|(x_n - x_0) - (x_m - x_0)\|^2 + \|(x_n - x_0) + (x_m - x_0)\|^2 = 2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_m - x_0\|^2$$

da cui

$$\|x_n - x_m\|^2 + 4\|\frac{(x_n + x_m)}{2} - x_0\|^2 = 2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_m - x_0\|^2$$

ed essendo $\frac{(x_n+x_m)}{2} \in C$ vale che $\|\frac{(x_n+x_m)}{2} - x_0\|^2 \geq d^2$. Quindi

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_m - x_0\|^2 - 4d^2 \to 0 \quad \text{per } n, m \to \infty.$$

□

Corollario 11.44 (della proiezione su un sottospazio chiuso). *Sia H uno spazio di Hilbert, $Y \subseteq H$ un sottospazio chiuso e non vuoto. Allora per ogni $x_0 \in H$ esiste un unico $y_0 = \pi_Y(x_0) \in Y$ (detto proiezione di x_0 su Y) tale che*

$$||x_0 - y_0|| = \min_{x \in Y} ||x - x_0||.$$

Inoltre vale $y_0 = \pi_Y(x_0) \iff \begin{cases} y_0 \in Y \\ x_0 - y_0 \in Y^\perp \ (\textit{ossia} \ < x_0 - y_0, x >= 0 \ \forall x \in Y). \end{cases}$

In particolare H è somma diretta di Y e $Y^\perp$ in quanto per ogni punto $x_0 \in H$ vale $x_0 = (x_0 - y_0) + y_0 \in Y + Y^\perp$. □

11.9. **Esercizi vari sulle topologie.**

Esercizio 11.45. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$.

Provare i seguenti fatti:

(1) per ogni $x \in X$ vale che $T_x \in X''$ e $||T_x||_{X''} = |x|_X$;

(2) per ogni $x, y \in X$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$;

(3) provare che per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se $x_n \to x_0$ in X allora $T_{x_n} \to T_{x_0}$ in X'';

(4) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $T_{x_n} \rightharpoonup T_{x_0}$ debole in X'';

(5) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é tale che $\sup_n |T_{x_n}(f)| < +\infty$ per ogni $f \in X'$ allora (x_n) é limitata in X;

(6) se f_n converge a f debole* in X' allora $T_x(f_n) \to T_x(f)$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 11.46. Sia X uno spazio topologico e sia E uno spazio di Banach. Siano $u, v : X \to (E, \sigma(E, E'))$ due applicazioni continue. Provare che

(1) l'applicazione $u + v : X \to (E, \sigma(E, E'))$ é continua;

(2) Sia $a : X \to \mathbb{R}$ continua. Provare che l'applicazione prodotto definita da $au(x) = a(x)u(x)$ é continua da X su $(E, \sigma(E, E'))$.

Esercizio 11.47. Provare che se E' é uno spazio finito dimensionale lo é anche E.

Esercizio 11.48. Provare che se E é uno spazio normato e $(x_n)_n \subseteq E$ é tale che x_n converge a $x \in E$ rispetto alla topologia debole.

(1) Provare che esiste una successione $(z_n)_n \subseteq \overline{co(\{x_n\}_n)}$ tale che converge a x forte.
(suggerimento: osservare che $x_0 \in \overline{co(\{x_n\}_n)}$ dove $co(V)$:=inviluppo convesso di V)
(2) Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $z_n \in \overline{co(\{x_k\}_{1 \leq k \leq n})}$ tale che z_n converge a x forte.

Esercizio 11.49. Siano X, Y due spazi di Banach e assumiamo che la successione di operatori M_n in $\mathcal{L}(X, Y)$ verifica: per ogni $f \in Y'$ $f(M_n(x)) \to f(M(x))$ dove $M(x) \in Y$. Provare che $M \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Esercizio 11.50. Provare che se E é uno spazio normato e $(x_n)_n \subseteq E$ é tale che x_n converge a $x \in E$ rispetto alla topologia debole, allora $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \to x$ rispetto alla topologia debole (applicare teorema di Cesaro per le successioni reali).

Esercizio 11.51. Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare. Allora T é continuo se e solo se per ogni $(x_n)_n \subseteq X$ tale che $x_n \rightharpoonup x_0$ in X vale che $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ in Y.

Esercizio 11.52. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach.
Provare i seguenti fatti:

(1) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sono tali che $||x_n - y_n||_X \to 0$ e $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $y_n \rightharpoonup x_0$ in X;
(2) se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$ sono tali che $||f_n - g_n||'_X \to 0$ e $f_n \overset{w*}{\rightharpoonup} f_0$ in X' allora $g_n \overset{w*}{\rightharpoonup} f_0$ in X'.

Esercizio 11.53. Sia X uno spazio di Banach e Y un suo sottoinsieme denso e $(F_n)_n$ una successione in X' . Dimostrare che:

(1) $(F_n)_n$ converge debolmente$*$ in $X' \iff (F_n)_n$ é limitata in X' e $(F_n(y))_n$ converge per ogni $y \in Y$;
(2) Assumiamo che $(F_n)_n$ converga debolmente$*$ in X' al funzionale $F \in X'$ e sia $(x_n)_n \subseteq X$ tale che $x_n \to x \in X$. Provare che $\lim_n F_n(x_n) = F(x)$.

Esercizio 11.54. Sia X uno spazio di Banach e $T : X \to X'$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(1) $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (X', \|\cdot\|_{X'})$ continuo;

(2) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ e per ogni $x \in X$
$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \overset{*}{\rightharpoonup} Tx.$$

Esercizio 11.55. Se X é uno spazio di Banach riflessivo, C un convesso chiuso non vuoto e $x_0 \in X$, mostrare che esiste un elemento di C di distanza minima da x_0. Tale elemento é necessariamente unico?

Esercizio 11.56. Sia E uno spazio di Banach e sia $F : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole * e tale che
$$\lim_{||f|| \to \infty} F(f) = +\infty.$$
Allora esiste un punto di minimo di F su E'.

Esercizio 11.57. Sia E uno spazio di Banach, $M \subseteq E$ un sottospazio. Provare che il suo ortogonale $M^{\perp}(= M^0) \subseteq E'$ é chiuso rispetto alla topologia debole * di E'.

Esercizio 11.58. Sia E uno spazio di Banach, $M \subseteq E$ un sottospazio e sia $M^{\perp}(= M^0) \subseteq E'$ il suo ortogonale. Sia $f_0 \in E'$. Provare che esiste $g_0 \in M^{\perp}$ tale che

$$||f_0 - g_0|| = \min_{f \in M^{\perp}} ||f - f_0||.$$

(applicare i due esercizi precedenti)

Esercizio 11.59. Sia X spazio di Banach riflessivo. Provare che

(1) per ogni $f \in X'$ esiste x_0 nella palla chiusa unitaria di X tale che
$$||f||_{X'} = f(x_0);$$
(2) ogni $f \in X'$ assume minimo sulla palla chiusa unitaria di X;
(3) dedurre dal punto precedente che ogni $f \in X'$ assume massimo sulla sfera unitaria di X.

Lemma 11.60. *Se $f, g : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ sono continue, allora $h = f + g : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ é continua.*

Dimostrazione. Infatti sia $x_0 \in X$ e sia $U = (-\epsilon + h(x_0), h(x_0) + \epsilon)$ un intorno di $h(x_0)$. Devo provare che esiste un intorno V di x_0 in X tale che $h(V) \subseteq U$. Essendo f e g continue in x_0 esistono V_1, V_2 aperti contenenti x_0 in X tali che $f(V_1) \subseteq (-\frac{\epsilon}{2} + h(x_0), h(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$ e $g(V_2) \subseteq (-\frac{\epsilon}{2} + h(x_0), h(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$. In particolare per ogni $x \in V := V_1 \cap V_2$ si ha che $f(x) \in U$ e $g(x) \in U$ ossia $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Si noti che V é un aperto contentente x_0 e che per ogni $x \in V$ si ha che $|h(x) - h(x_0)| < \epsilon$. □

Esercizio 11.61. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$. Provare che per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $T_{x_n} \rightharpoonup T_{x_0}$ debole in X''.

Dimostrazione. Essendo T continuo "forte forte" (essendo un'isometria), allora T é continuo "debole debole". In particolare é sequenzialmente continuo "debole debole".

12. **Alcuni risultati negli spazi di Hilbert**

Teorema 12.1 (**di Rappresentazione di Rietz-Frechet per gli Hilbert).** *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $\phi \in H'$ esiste un unico $x \in H$ tale che $\phi = T_x$ dove*

$$T_x(y) :=< x, y > .$$

In particolare $||\phi||_{H'} = ||x||$ e l'applicazione $T : H \to H'$ definita da $T(x) = T_x$ é un'isometria suriettiva.

Dimostrazione. Sappiamo già che l'applicazione T é un'isometria (pertanto si ha unicità del punto x che soddisfa $T_x(y) :=< x, y >$). In particolare $T(H)$ é chiuso in H'. Se proviamo che $T(H)$ é denso in H', possiamo concludere che $T(H) = H'$. Applichiamo uno dei corollari di Hahn-Banach. Sia $\xi \in H''$ tale che $\xi = 0$ su $T(H)$. Proviamo che $\xi = 0$ su H. Essendo H riflessivo, l'applicazione $J : H \to H''$ é suriettiva. Quindi esiste $x \in H$ tale che $Jx = \xi$. In particolare, applicando la definizione di J, per ogni $y \in H$ vale che

$$0 = \xi(Ty) = Jx(T_y) = T_y(x) =< y, x > .$$

In particolare per $y = x$ otteniamo $< x, x >= 0$ da cui $x = 0$ e quindi $\xi = J(0) = 0_{H''}$. Pertanto $\xi = 0$ su H. $\square$

Osservazione 12.2. *Identificando H' con H, la nozione di ortogonale che abbiamo dato in generale per sottospazi M di spazi di Banach X come $M^\perp := \{f \in X' : \ f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$, nel caso di spazi di Hilbert diventa $M^\perp := \{y \in H :< y, x >= 0 \ \forall x \in M\}$. In particolare abbiamo che*

$$(M^\perp)^\perp = \bar{M}.$$

Teorema 12.3 (**di Lax-Milgram).** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare*

1. *coerciva (ossia esiste $\alpha > 0$ tale che $a(x, x) \geq \alpha ||x||^2$ per ogni $x \in X$);*
2. *separamente continua nelle due variabili (ossia per ogni $x, y \in H$ fissati, le applicazioni $z \to a(x, z)$ e $z \to a(z, y)$ sono continue).*

Allora per ogni $\phi \in H'$ esiste UN UNICO $x \in H$ tale che

$$\phi(y) = a(x, y) \quad \forall y \in H.$$

In particolare tale x soddisfa $||x|| \leq \frac{1}{\alpha}||f||_{H'}$ Inoltre, se a é simmetrica, allora x soddisfa il seguente problema di minimo:

$$\frac{1}{2}a(x, x) - \phi(x) = \min\{\frac{1}{2}a(y, y) - \phi(y) : \ y \in H\}.$$

Osservazione 12.4. Ricordiamo che dall'esercizio 7.12 segue che se a è separatamente continua allora esiste $C \geq 0$ tale che

$$|a(x, y)| \leq C||x||||y|| \quad \forall x, y \in H$$

Inoltre a è continua rispetto a coppia (x, y).

Osservazione 12.5. Se a é simmetrica, l'equazione funzionale

$$\phi(y) = a(x, y)$$

viene detta l'equazione di Eulero associata al problema di minimo

$$\min\{\frac{1}{2}a(y, y) - \phi(y) : \ y \in H\}.$$

13. **Gli spazi** L^p

13.1. **Riflessivitá.**

Teorema 13.1. *Per ogni* $1 < p < +\infty$ *lo spazio* L^p_μ *é uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Daremo la dimostrazione solo nel caso $2 \le p < +\infty$. Prima di tutto proviamo che in tal caso vale la seguente **prima disuguaglianza di Clarkson**:

$$\|\frac{f-g}{2}\|_p^p + \|\frac{f+g}{2}\|_p^p \le \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \quad \forall f, g \in L^p_\mu \tag{13.1}$$

(nel caso $p < 2$ ne vale un'altra più complicata che omettiamo).

Infatti é facile provare che la funzione $f(t) = (1+t^2)^{\frac{p}{2}} - 1 - t^p$ é crescente su $[0, +\infty)$ con minimo nel punto $t = 0$. Quindi $(1+t^2)^{\frac{p}{2}} - 1 - t^p \ge f(0) = 0$ ossia

$$(1+t^2)^{\frac{p}{2}} \ge 1 + t^p \quad \forall t \ge 0$$

da cui

$$\left(1 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} \ge 1 + \left(\frac{t}{s}\right)^p \quad \forall t \ge 0, \ s > 0$$

che implica

$$t^p + s^p \le (t^2 + s^2)^{\frac{p}{2}} \quad \forall t, s \ge 0.$$

n particolare applicando tale disuguaglianza a $t = \frac{|f(x)+g(x)|}{2}$ e ad $s = \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ si ottiene che per ogni $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}\left(\frac{|f(x)+g(x)|}{2}\right)^p + \left(\frac{|f(x)-g(x)|}{2}\right)^p &\le \left[\left(\frac{|f(x)+g(x)|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|f(x)-g(x)|}{2}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} \\ = \left(\frac{(f(x))^2 + (g(x))^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} &\le \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla convessità della funzione $h(x) = x^\alpha$ (definita per $x \ge 0$) quando $\alpha \ge 1$. Integrando su Ω si ottiene la (13.1). Ora per ogni $f, g \in L^p(\Omega)$ se $\|f\|_p, \|g\|_p \le 1$ e $\|f - g\|_p > \epsilon > 0$ allora

$$\|\frac{f-g}{2}\|_p^p + \|\frac{f+g}{2}\|_p^p \le 1$$

da cui

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p \le \sqrt[p]{1 - (\frac{\epsilon}{2})^p}$$

Basta quindi scegliere $0 < \delta < 1 - \sqrt[p]{1 - (\frac{\epsilon}{2})^p}$ per avere che

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p < 1 - \delta.$$

□

Corollario 13.2. *Sia* $1 < p < +\infty$. *Allora lo spazio* L^p_μ *é riflessivo.*

Dimostrazione.

Nel caso $2 \le p < \infty$ basta applicare la Proposizione 13.1 e il Teorema 11.41. Nel caso $1 < p < 2$ si consideri l'applicazione $T : L^p_\mu \to (L^{p'}_\mu)'$ definita come

$$Tu(v) = \int_\Omega u(x)v(x)d\mu$$

per ogni $u \in L^p_\mu, v \in L^{p'}_\mu$. Sappiamo che T é un'isometria. Poiché $2 < p' < \infty$ si ha che $L^{p'}_\mu$ é uno spazio uniformente convesso e quindi riflessivo. Pertanto anche il suo duale $(L^{p'}_\mu)'$ é riflessivo. Poiché T é un'isometria e L^p_μ é uno spazio di Banach, si ha che $T(L^p_\mu)$ é un sottospazio chiuso di $(L^{p'}_\mu)'$. Grazie al Corollario 11.28 lo spazio $T(L^p_\mu)$ é riflessivo ed essendo T un'isometria suriettiva da L^p_μ su $T(L^p_\mu)$ segue che anche L^p_μ é riflessivo.

□

Teorema 13.3 (di Rappresentazione di Rietz). *Sia $1 \le p < \infty$. Allora per ogni $\phi \in (L^p_\mu(\Omega))'$ esiste un unico $u \in L^{p'}_\mu$ tale che $\phi = T_u$ dove*

$$T_u(v) := \int_\Omega u(x)v(x)d\mu.$$

In particolare l'applicazione $T : L^{p'}_\mu \to (L^p_\mu)'$ definita come $Tu := T_u$ é un'isometria suriettiva. In particolare $(L^p_\mu)' \equiv L^{p'}_\mu$.

Dimostrazione. **Diamo la dimostrazione solo nel caso** $p > 1$. Sappiamo già che l'applicazione $T : L^{p'}_\mu \to (L^p_\mu)'$ é un'isometria. In particolare $T(L^{p'}_\mu)$ é chiuso in $(L^p_\mu)'$. Se proviamo che $T(L^{p'}_\mu)$ é denso in $(L^p_\mu)'$, possiamo concludere che $T(L^{p'}_\mu) = (L^p_\mu)'$. Applichiamo uno dei corollari di Hahn-Banach. Sia $\xi \in (L^p_\mu)''$ tale che $\xi = 0$ su $T(L^{p'}_\mu)$. Proviamo che $\xi = 0$ su $(L^p_\mu)'$.

Essendo L^p_μ riflessivo, l'applicazione $J : L^p_\mu \to (L^p_\mu)''$ é suriettiva. Quindi esiste $v \in L^p_\mu$ tale che $Jv = \xi$. In particolare, applicando la definizione di J, per ogni $u \in L^{p'}_\mu$ vale che

$$0 = \xi(Tu) = Jv(Tu) = Tu(v) = \int_\Omega u(x)v(x)d\mu.$$

Scegliendo $u(x) := |v(x)|^{p-2}v(x)$ (si osservi che $u \in L^{p'}_\mu$) possiamo concludere che $0 = \int_\Omega |v(x)|^p d\mu$ ossia $v = 0$. Quindi $\xi = Jv = J0 = 0_{(L^p_\mu)''}$ ossia $\xi = 0$ su $(L^p_\mu)'$. □

Come conseguenza del teorema di Rietz possiamo caratterizzare la convergenza debole di una successione $(v_n)_n \subseteq L^p_\mu$ per $1 \le p < +\infty$ nel seguente modo: sappiamo che

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ in } L^p_\mu \iff \phi(v_n) \to \phi(v_0) \quad \forall \phi \in (L^p_\mu)'.$$

Dal Teorema 13.3 per ogni $\phi \in (L^p_\mu)'$ esiste $u \in L^{p'}_\mu$ tale che $\phi = T_u$. Pertanto

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ in } L^p_\mu \iff T_u(v_n) \to T_u(v_0)\ \forall u \in L^{p'}_\mu$$

ossia

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ in } L^p_\mu \iff \int_\Omega v_n(x)u(x)d\mu \to \int_\Omega v_0(x)u(x)d\mu \quad \forall u \in L^{p'}_\mu.$$

Osservazione 13.4. Essendo L^p_μ uno spazio riflessivo per $1 < p < \infty$, da ogni successione limitata in L^p_μ possiamo estrarre una sottosuccessione convergente debolmente in L^p_μ.

Inoltre grazie al Teorema 13.3 si ha che $T(L^\infty_\mu) = (L^1_\mu)'$ ossia possiamo identificare L^∞_μ con il duale di L^1_μ e possiamo dotare L^∞_μ della topologia debole* $\sigma(L^\infty_\mu, L^1_\mu)$. In particolare possiamo caratterizzare la convergenza debole* di una successione $(v_n)_n \subseteq L^\infty_\mu$ nel seguente modo:

$$v_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} v_0 \text{ in } L^\infty_\mu \iff (Tv_n)_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} Tv_0 \text{ in } (L^1_\mu)' \iff Tv_n(u) \to Tv_0(u)\ \forall u \in L^1_\mu$$

da cui

$$v_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} v_0 \text{ in } L^\infty_\mu \iff \int_\Omega v_n(x)u(x)dx \to \int_\Omega v_0(x)u(x)d\mu\ \forall u \in L^1_\mu.$$

13.2. **Separabilitá.** Proveremo che

Teorema 13.5. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile allora per ogni $1 \le p < \infty$ lo spazio $L^p(\Omega)$ é separabile.*

Lemma 13.6. *Per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lo spazio $C_c(\Omega)$ é denso in $L^p(\Omega)$ per $1 \le p < \infty$.*

(senza dimostrazione: affrontato al corso di Analisi 3)

Dimostrazione del Teorema 13.5. **Step 1** Proviamo che $L^p(\mathbb{R}^N)$ é separabile. Sia

$$\mathcal{R} := \{\prod_{i=1}^{N}(a_i, b_i) : \ a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$$

e

$$\mathcal{E} := span_{\mathbb{Q}}\{\chi_R : \ R \in \mathcal{R}\}.$$

Proviamo che l'insieme numerabile $\mathcal{E}$ é denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Infatti sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ed $\epsilon > 0$. Per il Lemma 13.6 esiste $f_0 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $||f - f_0||_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$. Sia $R \in \mathcal{R}$ tale che $supp f_0 \subset R$. Per il teorema di Heine-Cantor la funzione f_0 é uniformemente continua su R e quindi per ogni $\epsilon_0 > 0$ (da scegliere dopo) esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in R$ sono tali che $|x - y| < \delta$ allora

$$|f_0(x) - f_0(y)| < \epsilon_0.$$

Dividiamo R in tanti cubetti aperti $(Q_i)_{i\in\{1,2,\cdots,M\}}$ di diametro minore di δ (basta tracciare degli opportuni iperpiani paralleli agli assi con equazione del tipo $x_i = a_i$ con $a_i \in \mathbb{Q}$ a distanza $0 < l < \frac{\delta}{\sqrt{N}}$ l'uno dall'altro in modo che le diagonali dei cubetti che si formano abbiano lunghezza $d = \sqrt{N} l < \delta$. Il numero M di cubetti dipende da δ, N e dalle lunghezze dei lati di R.

Allora per ogni $x, y \in Q_i$ vale che $|x - y| < \delta$ e quindi

$$|f_0(x) - f_0(y)| < \epsilon_0.$$

Passando all'inf rispetto a $y \in Q_i$ si ottiene che $|f_0(x) - \inf_{Q_i} f_0| \le \epsilon_0$ per ogni $x \in Q_i$ da cui

$$\sup_{x\in Q_i} |f_0(x) - \inf_{Q_i} f_0| \le \epsilon_0.$$

Per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, M\}$ sia $\rho_i \subset \mathbb{Q}$ tale che

$$\max_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} |\rho_i - \inf_{Q_i} f_0| < \epsilon_0$$

e sia

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \rho_i & \text{se } x \in Q_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osservato che $\mathcal{L}^N(R \setminus \bigcup_{i=1}^M Q_i) = 0$, segue che

$$||f_0 - \tilde{f}||_{L^\infty(R)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R} |f_0(x) - \tilde{f}(x)| = \max_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q_i} |f_0(x) - \rho^i|$$

$$\le \max_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q_i} \left(|f_0(x) - \inf_{Q_i} f_0| + |\inf_{Q_i} f_0 - \rho^i| \right) < 2\epsilon_0.$$

In particolare segue che

$$||f_0 - \tilde{f}||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = ||f_0 - \tilde{f}||_{L^p(R)} < 2\epsilon_0 |R|^{\frac{1}{p}}.$$

Scelto $\epsilon_0 > 0$ tale che $2\epsilon_0 |R|^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}$ si ottiene che

$$||f - \tilde{f}||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le ||f - f_0||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + ||f_0 - \tilde{f}||_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon.$$

Step 2 Poiché l'applicazione $I : L^p(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ che ad ogni $f \in L^p(\Omega)$ associa

$$(If)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

é un'isometria e poiché $I(L^p(\Omega))$ é separabile in quanto sottoinsieme di uno spazio separabile (vedi Proposizione 11.33), si ottiene che $L^p(\Omega)$ é separabile. □

Osservazione 13.7. Essendo $L^1(\Omega)$ uno spazio separabile, per il Corollario 11.38, parte (1), da ogni successione limitata in $L^\infty(\Omega)$ possiamo estrarre una sottosuccessione convergente debolmente $*$ in $L^\infty(\Omega)$.

Proposizione 13.8. *Lo spazio $L^1(\Omega)$ non é riflessivo. In particolare lo spazio $L^\infty(\Omega)$ non é riflessivo.*

Dimostrazione. Nel caso particolare in cui $\Omega = (0,1)$ costruiamo una successione limitata di $L^1(0,1)$ che non ammette estratte debolmente convergenti (quindi $L^1(\Omega)$ non è riflessivo in quanto non soddisfa il Corollario 11.38, parte (1)). Si consideri la successione $u_n(t) := n\chi_(0, \frac{1}{n})$. Allora $||u_n||_1 = 1$. Se per assurdo esistesse $u \in L^1(0,1)$ tale che $u_{k_n} \rightharpoonup u$ in $L^1(0,1)$ allora per ogni $v \in L^\infty(0,1)$ varrebbe
$$\int_0^1 u_{k_n}(t)v(t)dt \to \int_0^1 u(t)v(t)dt.$$
Sia $v_j(t) := \chi_{(0,\frac{1}{j})} \in L^\infty(0,1)$. Allora se $n > j$ (e quindi $k_n > n > j$) vale $\frac{1}{k_n} < \frac{1}{j}$ e quindi
$$\int_0^1 u_{k_n}(t)v_j(t)dt = \int_0^1 u_{k_n}(t)dt = 1$$
e passando al limite si otterrebbe
$$\int_0^1 u(t)v_j(t)dt = 1$$
per ogni j. D'altra parte la successione $(uv_j)_j$ é tale che per ogni $t \in (0,1)$ $u(t)v_j(t) \to 0$ per $j \to \infty$ e $|u(t)v_j(t)| \leq |u(t)|$. Per il teorema della convergenza dominata per $j \to \infty$
$$1 = \int_0^1 u(t)v_j(t)dt \to 0.$$
Assurdo. Infine, se $L^\infty(\Omega)$ fosse riflessivo, per il Teorema 11.30, anche $L^1(\Omega)$ sarebbe riflessivo. Assurdo. □

Proposizione 13.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile. Allora lo spazio $L^\infty(\Omega)$ non é separabile.*

Al fine di dimostrare il risultato precedente premettiamo un lemma:

Lemma 13.10. *Sia (X,τ) uno spazio topologico. Supponiamo che esista $(A_i)_{i\in I}$ famiglia di aperti tali che*

(1) *I é più che numerabile;*
(2) *$A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.*

Allora X non é separabile.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $D = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denso e numerabile. Allora per ogni $i \in I$ $A_i \cap D \neq \emptyset$. Quindi per ogni $i \in I$ esiste $x_{n_i} \in A_i$ e $x_{n_i} \neq x_{n_j}$ se $i \neq j$. L'applicazione $f : I \to \mathbb{N}$ definita come $f(i) = n_i$ é iniettiva e questo é assurdo in quanto, come conseguenza, I sarebbe numerabile. □

Dimostrazione della Proposizione 13.9. Diamo la dimostrazione per Ω aperto. Definiamo $E := \{B(x_0,r) : x_0 \in \Omega, 0 < r < d(x_0, \partial\Omega)\} = (B_i)_{i\in I}$. Allora I é più che numerabile. Per ogni $B_i \in E$ definiamo χ_i la relativa funzione caratteristica. Allora gli aperti
$$A_i := \{f \in L^\infty(\Omega) : \ ||f - \chi_i|| < \frac{1}{2}\}$$

sono tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ (infatti se $f \in A_i \cap A_j$ allora $||\chi_j - \chi_i||_\infty < 1$ ossia $\chi_j = \chi_i$). Per il lemma precedente, $L^\infty(\Omega)$ non é separabile. □

Osservazione 13.11. Sotto le notazioni del Teorema 13.3, proviamo che per $\Omega = (0,1)$ esiste $\tilde{T} \in (L^\infty(0,1))'$ tale che $\tilde{T} \neq T_u$ per ogni $u \in L^1(0,1)$. Sia $C[0,1]$ il sottospazio di $L^\infty(0,1)$ costituito dalle funzioni continue. Sia $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definito come $T(u) = u(0)$. Allora T é lineare e poiché

$$|T(u)| \leq ||u||_\infty$$

abbiamo che T é continuo. Dal Teorema di Hahn Banach esiste $\tilde{T} : L^\infty(0,1) \to \mathbb{R}$ lineare e continuo tale che $\tilde{T} = T$ su $C[0,1]$. Supponiamo ora che esista $v \in L^1(0,1)$ tale che

$$\tilde{T}(v) = T_u(v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

Sia ora $v_n(x) := e^{-nx}$. Poiché $v_n \in C[0,1]$ vale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 v_n(x)u(x)dx = \tilde{T}(v_n) = T(v_n) = v_n(0) = e^{-n0} = 1.$$

Si osservi che la successione $(u_n v)_n$ é tale che q.o. $x \in (0,1)$ vale $u(x)v_n(x) \to 0$ e $|v_n(x)v(x)| \leq |v(x)|$. Per il teorema della convergenza dominata, per $n \to \infty$ si ha che

$$1 = \int_0^1 v_n(x)u(x)dx \to 0$$

Assurdo. □

Specchietto riassuntivo:

$X = L^p$	unif.conv.	riflessivo	palla B_X	duale X'	separ.	(x_n) limitata
$p = 1$	no	$\Longleftarrow$ no	$\Longleftarrow$ non deb.comp. e non metriz.	L^∞	si	non si può dire nulla
$p = \infty$	no	no	deb.*comp. e metriz.	$L^1 \subsetneq (L^\infty)'$	no	$\exists (x_{k_n})$ deb.*conv.
$1 < p < \infty$	si $\Longrightarrow$	si $\Longrightarrow$	deb.comp. e metriz.	$L^{p'}$	si	$\exists (x_{k_n})$ deb.conv.

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ in } L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega u_n(x)v(x)dx \to \int_\Omega u_n(x)v(x)dx \ \forall v \in L^{p'}(\Omega).$$

$$u_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} u_0 \text{ in } L^\infty(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega u_n(x)v(x)dx \to \int_\Omega u_0(x)v(x)dx \ \forall v \in L^1(\Omega).$$

14. **Alcune osservazioni sugli insieme convessi e sugli operatori convessi.**

Osservazione 14.1. Sia X uno spazio vettoriale.

(1) Se $K_1, K_2 \subset X$ sono convessi, allora l'intersezione $K_1 \cap K_2$ é convessa; l'unione in generale non é convessa;
(2) se $T : X \to \mathbb{R}$ é lineare e $K \subset X$ é convesso, allora $T(K)$ é convesso in $\mathbb{R}$;
(3) se $K \subseteq X$ é convesso e X é uno spazio normato, allora $\bar{K}$ e $\overset{\circ}{K}$ sono convessi;
(4) se $T : X \to \mathbb{R}$ é convesso, allora gli insiemi

$$\{x \in X : T(x) < C\}$$

$$\{x \in X : T(x) \leq C\}$$

sono convessi

Osservazione 14.2. Sia X uno spazio vettoriale.

(1) se $T, S : X \to \mathbb{R}$ sono convessi, allora l'operatore $T + S$ é convesso;
(2) se $T : X \to \mathbb{R}$ é convesso allora per ogni $\lambda \geq 0$ vale che λT é convesso;
(3) mettendo insieme (1) e (2), si ottiene che se $T, S : X \to \mathbb{R}$ sono convessi, allora l'operatore $\lambda T + \mu S$ é convesso per ogni $\lambda, \mu \geq 0$;
(4) se $T : X \to \mathbb{R}$ é lineare, allora T é convesso;
(5) se $T : X \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo, allora $|T|$ é convesso e lipschitziano (quindi continuo): infatti

$$||Tx| - |Ty|| \leq |Tx - Ty| \leq ||T||||x - y||;$$

(6) se $T : X \to Y$ é lineare e $\phi : Y \to \mathbb{R}$ é convesso, allora la composizione $\phi \circ T : X \to \mathbb{R}$ é convessa. Infatti per ogni $\theta \in [0, 1]$ e per ogni $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \phi \circ T(\theta x + (1-\theta)y) &= \phi(T(\theta x + (1-\theta)y) = \phi(\theta Tx + (1-\theta)Ty)) \\ &\leq \theta\phi(Tx) + (1-\theta)\phi(Ty) = \theta\phi \circ T(x) + (1-\theta)\phi \circ T(y). \end{aligned}$$

Esempio 14.3. Se $T : X \to Y$ é lineare e X, Y sono spazi normati, allora

(1) $||T||_Y : X \to \mathbb{R}$, definito da

$$x \mapsto ||T(x)||_Y,$$

é convesso; in particolare se $T : X \to \mathbb{R}$ é lineare, allora gli insiemi

$$\{x \in X : |T(x)| < C\}$$

$$\{x \in X : |T(x)| \leq C\}$$

sono convessi.
(2) l'operatore $S_{\lambda,\mu} : X \to \mathbb{R}$, definito da

$$x \mapsto \lambda||T(x)||_Y + \mu||x||_X,$$

é convesso per ogni $\lambda, \mu \geq 0$ (perché somma di operatori convessi).
(3) se $T : X \to Y$ é lineare e $K \subset X$ é convesso, allora gli insiemi

$$\{x \in K : ||T(x)||_Y \leq C\}$$

$$\{x \in K : ||T(x)||_Y + ||x||_X \leq C\}$$

sono convessi (in quanto intersezione di insiemi convessi).

Esempio 14.4. Se $v \in L^{p'}(\Omega)$ allora

(1) il funzionale $T_v : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da
$$T_v(u) := \int_\Omega u(x)v(x)dx$$
é un funzionale lineare (e continuo), quindi convesso;

(2) il funzionale $|T_v| : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da
$$|T_v|(u) := |\int_\Omega u(x)v(x)dx|$$
non é lineare, ma é convesso e lipschitziano (quindi continuo);

(3) il funzionale $S_v : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da
$$S_v(u) := \int_\Omega |u(x)v(x)|dx$$
non é lineare, ma é convesso e lipschitziano (quindi continuo). Infatti
$$\begin{aligned} |S_v(u) - S_v(w)| &= \left| \int_\Omega |u(x)v(x)| - |v(x)w(x)|dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega |v(x)|(|u(x)| - |w(x)|)dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |v(x)| \left| (|u(x)| - |w(x)|) \right| dx \\ &\leq ||v||_{p'} ||u - w||_p. \end{aligned}$$

Esercizio 14.5. Sia $X = L^2(0, 1)$, sia $g \in X$ e $F : X \to \mathbb{R}$ definito da
$$F(u) = \int_0^1 |u(x)|^2 dx - 2 \int_0^1 g(x)u(x)dx.$$
É facile verificare che g é punto di minimo di F. Inoltre esso é unico perché F é strettamente convesso. I suoi sottolivelli sono convessi, chiusi rispetto la topologia forte e in particolare rispetto alla topologia debole. Proviamo che sono compatti rispetto alla topologia debole. Infatti i sottolivelli sono limitati:
$$F(v) \leq \alpha \Rightarrow ||v||_2^2 - 2||v||_2||g||_2 \leq \alpha$$
e quindi
$$||v||_2 \leq \sqrt{||g||_2^2 + \alpha}.$$
Essendo L^2 riflessivo, i sottoinsiemi debolmente chiusi e limitati sono compatti rispetto la topologia debole. Possiamo quindi applicare la versione topologica del teorema di Weistrass per affermare l'esistenza di un punto di minimo (che é appunto g. Osserviamo che, rispetto alla topologia forte, F é continuo (usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). In particolare, essendo F convesso, si ha che F é semicontinuo rispetto alla topologia debole.

15. **Gli operatori compatti.**

Definizione 15.1. *Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Si dice che T é* **compatto** *se $T(B_X)$ é relativamente compatta in Y dove B_X é la palla unitaria chiusa di X.*

Si osservi che se T é compatto, allora T é limitato sulla palla B_X e quindi T é continuo. Definiamo

$$\mathcal{K}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \ T \text{ compatto}\}.$$

Si prova (senza dimostrazione) che $\mathcal{K}(X,Y)$ é chiuso rispetto la norma degli operatori. Si prova (senza dimostrazione) che $\mathcal{K}(X,Y)$ é chiuso rispetto la norma degli operatori.

Osservazione 15.2.
1. se $T : X \to Y$ é un operatore compatto e $(x_n)_n \subset E$ é limitata in X allora $(Tx_n)_n$ ammette una sottosuccessione fortemente convergente in Y. Infatti la successione (y_n) definita come $y_n := \begin{cases} \frac{x_n}{||x_n||} & se\ x_n \neq 0 \\ \\ 0 & se\ x_n = 0 \end{cases}$ é contenuta in B_X. Pertanto esiste (y_{k_n}) tale che contemporaneamente $(T(y_{k_n}))$ e $(||x_{k_n}||)_n$ convergono (la prima in Y, l'altra in $\mathbb{R}$). Segue che
$$T(x_{k_n}) = T(y_{k_n}) \cdot ||x_{k_n}||$$
converge in Y;
2. se $S \in \mathcal{L}(Z,X)$ e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ allora la composizione $T \circ S \in K(Z,Y)$. Analogamente $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ allora la composizione $S \circ T \in K(X,Z)$.

Proposizione 15.3. *Sia $T : X \to Y$ un operatore compatto. Allora per ogni $x_0, (x_n)_n \subset Y$, se $(x_n)_n \subset X$ converge debolmente a x_0 in X allora $(Tx_n)_n$ converge fortemente a Tx_0 in Y.*

Dimostrazione. Ogni successione estratta da $(Tx_n)_n$ ammette un'ulteriore estratta fortemente convergente. Dal momento che $(Tx_n)_n$ converge debolmente a Tx_0, abbiamo che tutte le successioni estratte da $(Tx_n)_n$ ammettono un' estratta fortemente convergente a Tx_0. Allora per la Proposizione 1.16 $(Tx_n)_n$ converge fortemente a Tx_0 in Y. □

Inoltre vale che un operatore $T : X \to Y$ é compatto se e solo se il suo aggiunto T^* é compatto (teorema di Schauder).

L'importanza degli operatori compatti risiede nel seguente teorema:

Teorema 15.4 (**Alternativa di Fredholm**)**.** *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore compatto. Allora*
1. *Ker $(I - T)$ ha dimensione finita;*
2. *Im $(I - T)$ é chiuso e Im $(I - T) = Ker(I - T^*)^{\perp}$;*
3. *$I - T$ é iniettivo se e solo se $I - T$ é suriettivo;*
4. *dim Ker$(I - T)$=dim Ker$(I - T^*)$.*

(senza dimostrazione)

In particolare dall'alternativa di Fredholm segue che per ogni $y \in E$ l'equazione

$$x - T(x) = y$$

o ha un'unica soluzione $x \in E$ oppure ha soluzione se e solo se y verifica N condizioni di ortogonalitá (dove $N = dimKer(I - T^*) = dimKer(I - T)$).

16. **Il Teorema di Ascoli–Arzelá**

Abbiamo visto che in generale i sottoinsiemi chiusi e limitati dello spazio delle funzioni continue non sono compatti. Il seguente teorema stabilisce che i sottoinsiemi limitati ed equicontinui di $C(K)$ (dove K é un compatto di $\mathbb{R}^N$) sono precompatti rispetto alla convergenza uniforme.

Teorema 16.1. *Sia $u_h : K \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni definite in un compatto $K \subset \mathbb{R}^N$. Supponiamo che:*

i) *la successione $\{u_h\}_h$ sia equilimitata: ossia esista $M > 0$ tale che*

$$|u_h(x)| \le M \;\forall\, x \in K;\; \forall\, h \in \mathbb{N} \tag{16.1}$$

ii) *la successione $\{u_h\}_h$ sia equicontinua: ossia $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall\, x, y \in K$ con $|x - y| < \delta_\varepsilon$ e $\forall\, h \in \mathbb{N}$ si abbia:*

$$|u_h(x) - u_h(y)| \le \varepsilon \tag{16.2}$$

Allora esiste una sottosuccessione di $\{u_h\}_h$ che converge uniformemente in K.

Dimostrazione.
1^0 **passo: procedimento diagonale.** Sia $D \subseteq K$ un sottoinsieme numerabile denso di K e supponiamo che

$$D = \{x_1, x_2, \dots, x_s, \dots\}$$

La successione di numeri reali $\{u_h(x_1)\}_h$ é limitata per la (16.1) e quindi contiene una sottosuccessione convergente. In particolare é possibile trovare una successione crescente di naturali che indicheremo con $\{h_k^{(1)}\}_k$ e $c_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(1)}}(x_1) = c_1$$

Consideramo ora la successione

$$u_{h_k^{(1)}}(x_2)$$

Sempre per l'ipotesi (16.1), tale successione é limitata e quindi posso trovare una nuova successione crescente di naturali $\{h_k^{(2)}\}_k \subseteq \{h_k^{(1)}\}_k$ e $c_2 \in \mathbb{R}$, tale che

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(2)}}(x_2) = c_2$$

Essendo, per la scelta fatta di $\{h_k^{(2)}\}_k$, $\{u_{h_k^{(2)}}(x_1)\}_k$ una sottosuccessione di $\{u_{h_k^{(1)}}(x_1)\}_k$, risulta pure

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(2)}}(x_1) = c_1$$

Procedendo in questa maniera, per ogni numero naturale $s \in \mathbb{N}$, posso costruirmi una successione crescente di naturali $\{h_k^{(s)}\}_k$ sottosuccessione di $\{h_k^{(s-1)}\}_k$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(s)}}(x_s) = c_s$$

Essendo per costruzione

$$\{h_k^{(s)}\}_k \subseteq \{h_k^{(s-1)}\}_k \subseteq \ldots \subset \{h_k^{(2)}\}_k \subseteq \{h_k^{(1)}\}_k$$

risulta

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(s)}}(x_j) = c_j \;\forall\, j = 1, 2, \dots, s$$

Abbiamo quindi costruito la seguente matrice infinita di numeri naturali

$$\begin{array}{llllll} n=1 & h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \dots & h_s^{(1)} & \dots \\ n=2 & h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & \dots & h_s^{(2)} & \dots \\ \vdots & & & & & \\ n=s & h_1^{(s)} & h_2^{(s)} & \dots & h_s^{(s)} & \dots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

dove ogni riga é costituita da una successione crescente di naturali e ogni riga é contenuta nella riga precedente. Se consideriamo ora la successione diagonale di tale matrice, ossia la successione

$$h_k = h_k^{(k)} \; k \in \mathbb{N}$$

ottengo una successione crescente di naturali tale che

$$h_k \in \{h_j^{(s)}, \; j \in \mathbb{N}\} \;\; \forall\, k \geq s$$

Ne deriva quindi che $\forall\, s \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k}(x_s) = c_s \; \forall\, s \in \mathbb{N}$$

2^0 **passo.** Verifichiamo che la successione $\{u_{h_k}\}_k$, sottosuccessione di $\{u_h\}_h$, converge uniformemente in K provando che é di Cauchy in $C(K)$.
Fissato $\epsilon > 0$, sia $\delta = \delta_\epsilon > 0$ tale che $\forall\, x, y \in K$ se $|x - y| < \delta_\epsilon$ allora

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, h \in \mathbb{N} \tag{16.3}$$

Osserviamo che essendo D denso in K, risulta

$$K \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} B_\delta(x_s)$$

Essendo K un insieme compatto, esiste un numero finito di elementi di D: $\{x_1, x_1, \dots, x_p\}$, tali che:

$$K \subset \bigcup_{s=1}^{p} B_\delta(x_s).$$

Siccome la successione $\{u_{h_k}(x_s)\}_k$ é convergente $\forall\, s \in \mathbb{N}$ e quindi di Cauchy, posso trovare un numero ν_ϵ tale che

$$\left|u_{h_k}(x_s) - u_{h_{k'}}(x_s)\right| < \frac{\epsilon}{3} \;\; \forall\, k, k' > \nu_\epsilon, \;\; \forall\, s = 1, 2, \dots, p. \tag{16.4}$$

Fissato infine $x \in K$ e scelto $s_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ tale che $x \in B_\delta(x_{s_0})$, possiamo scrivere:

$$\left|u_{h_k}(x) - u_{h_{k'}}(x)\right| \leq |u_{h_k}(x) - u_{h_k}(x_{s_0})| + \left|u_{h_k}(x_{s_0}) - u_{h_{k'}}(x_{s_0})\right| + \left|u_{h_{k'}}(x_{s_0}) - u_{h_{k'}}(x)\right|$$

Usando le (16.3), (16.4), segue che $\forall k, k' \geq \nu$ e $\forall x \in K$, vale $\left|u_{h_k}(x) - u_{h_{k'}}(x)\right| \leq \epsilon$. Quindi $(u_{h_k})_k$ è una successione di Cauchy in $C(K)$ e come tale converge uniformemente ad una funzione continua. □

Come garantirsi la condizione di equicontinuità necessaria per applicare il Teorema di Ascoli-Arzelà?

Definizione 16.2. *Sia $(u_h)_h$ una successione di funzioni $u_h : [a, b] \to \mathbb{R}$. Diremo che $(u_h)_h$ è equilipschitziana se esiste $L > 0$ tale che $\forall\, x, y \in [a, b]$ e per ogni $\forall\, h \in \mathbb{N}$ si abbia:*

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq L|x - y|. \tag{16.5}$$

Osservazione 16.3. Osserviamo che se $(u_h)_h$ è una successione di funzioni $u_h : [a,b] \to \mathbb{R}$ equilipschitziana allora $(u_h)_h$ è equicontinua. Infatti se $\epsilon > 0$, definito $\delta\epsilon := \frac{\epsilon}{L}$, per ogni $\forall\, x, y \in K$ tali che $|x-y| < \delta_\epsilon$ e per ogni $\forall\, h \in \mathbb{N}$ vale che

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq L|x-y| \leq L\delta_\epsilon = \epsilon.$$

In particolare se $(u_h) \subseteq C^1[a,b]$ ed esistono $M, L > 0$ tali che

$$||u_h||_\infty \leq M, \ ||u_h'||_\infty \leq L$$

allora la successione $(u_h)_h$ è equilimitata ed equicontinua e quindi soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà.

Osservazione 16.4. Ricordiamo inoltre che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b) a parte un numero finito di punti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < b = x_{k+1}$ e se f' è limitata sugli intervalli $(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots \cdots (x_k, b)$, allora f é lipschitziana su $[a,b]$. Come costante di Lipschitz di f si può prendere il massimo tra le costanti di Lipschitz

$$L_i = \sup_{x \in (x_i, x_{i+1})} |f'(x)|$$

relative agli intervallini (x_i, x_{i+1}). Segue che se $(u_h) \subseteq C[a,b]$ è una successione di funzioni tali che ciascuna u_h è derivabile su (a,b) a parte un numero finito di punti $x_1^h < \cdots < x_{m(h)}^h$ (ossia tali punti possono variare con h) e se esiste $L \geq 0$ tale che

$$\sup_{(a,b) \setminus \{x_1^1, \cdots, x_{m(h)}^h\}} |u_h'(x)| \leq L \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

allora ogni u_h è lipschitziana con costante di Lipschitz L, ossia la successione $(u_h)_h$ è equilipschitziana

17. **Spazi di Sobolev**

Ricordiamo il seguente lemma:

Lemma 17.1. [Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni] *Se Ω é un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tale che*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in C^1_c(\Omega),$$

allora $u = 0$ q.o. $x \in \Omega$.

Richiamiamo inoltre il **teorema della divergenza**. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe C^1 (ossia tale che $\forall\, x_0 \in \partial\Omega$ esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^N$ contenente x_0 ed esiste un aperto $B \subset \mathbb{R}^{N-1}$ e una funzione $f \in C^1(B)$ tali che, scegliendo in maniera opportuna il sistema di riferimento in $\mathbb{R}^N$, risulta:

$$\Omega \cap A = \{x = (y, x_N) \in (B \times \mathbb{R}) \cap A,\ x_N < f(y)\} \tag{17.1}$$

$$\partial\Omega \cap A = \{x = (y, x_N) \in (B \times \mathbb{R}) \cap A,\ x_N = f(y)\}\,.$$

In tal caso, ricordiamo che

$$\nu(y, f(y)) = \frac{(-D\,f(y), 1)}{\sqrt{1 + |Df(y)|^2}} \quad y \in B$$

e' il versore della normale ad $\partial\Omega$ nel punto $(y, f(y))$ che punta verso l'alto (ossia verso l'esterno di Ω).

Teorema 17.2 (Formule di Gauss-Green). *Se Ω é un aperto limitato di classe C^1 e $g \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, allora $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$:*

$$\int_\Omega D_j\, g(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} g(\xi)\, \nu_j(\xi)\, d\sigma(\xi) \tag{17.2}$$

dove ν_j é la componente j-esima del versore della normale a $\partial\Omega$ in ξ che punta verso l'esterno.

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é un aperto qualunque, $u \in C^1(\Omega)$ e $\phi \in C^1_c(\Omega)$ allora $u\phi \in C^1_c(\Omega)$ e l'estensione nulla di questa funzione fuori da Ω appartiene a $C^1_c(\mathbb{R}^N)$ e presa una palla B_R che ne contiene il supporto, si può applicare il Teorema della divergenza per ottenere

$$\int_\Omega D_j(u\phi)(x)\, dx = \int_{B_R} D_j(u\phi)(x)\, dx = \int_{\partial B_R} u(\xi)\phi(\xi)\nu_j(\xi) d\sigma(\xi) = 0$$

da cui

$$0 = \int_\Omega D_j u(x)\phi(x) + u(x) D_j\phi(x)\, dx$$

ossia

$$\int_\Omega u(x) D_j\, \phi(x)\, dx = -\int_\Omega D_j u(x)\phi(x) dx.$$

Una funzione di Sobolev u gode di una proprietá analoga a quella sopra: "scarica" le derivate di $\phi \in C^1_c(\Omega)$ attraverso l'introduzione di funzioni di L^p che chiameremo derivate deboli di u.

Definizione 17.3. *Sia $u \in L^p(\Omega)$. Diremo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se esistono $v_1, \cdots, v_N \in L^p(\Omega)$ tali che*

$$\int_\Omega u(x) D_j \phi(x)\, dx = -\int_\Omega v_j(x)\phi(x) dx \quad \forall \phi \in C^1_c(\Omega). \tag{17.3}$$

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si pone $D_i u := v_i$ (e la chiameremo **derivata parziale in senso debole***) e $Du := (D_i u)_{1 \le i \le N}$.*

Grazie al Lemma 17.1, le funzioni v_i sono uniche.

Osservazione 17.4. Si osservi che

(1) nella definizione di funzioni di Sobolev, regolarizzando per convoluzione, si possono usare come funzioni test le funzioni $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$ al posto delle funzioni $\phi \in C^1_c(\Omega)$;

(2) se $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e $D_j u \in L^p(\Omega)$ per ogni $j \in \{1, \cdots, N\}$ allora, dal teorema della divergenza, segue che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $v_j = D_j u$. In particolare se Ω é limitato, allora $C^1(\bar{\Omega}) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$.

Esempio 17.5. (1) Osserviamo che la differenziabilità quasi ovunque di una funzione $u \in L^p$ non implica che la funzione u sia di Sobolev. Se si considera la funzione

$$u(t) := \begin{cases} 1 \text{ se } t > 0 \\ 0 \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

vale che $u \in L^p(-1,1) \setminus W^p(-1,1)$ per ogni $1 \le p \le +\infty$. Infatti per ogni $\phi \in C^1_c(-1,1)$ vale che

$$\int_{-1}^1 u(t)\phi'(t) dt = \int_0^1 \phi'(t) dt = \phi(1) - \phi(0) = -\phi(0).$$

Dimostriamo che non esiste una funzione $v \in L^1(-1,1)$ (e quindi non esiste una funzione $v \in L^p(-1,1)$) tale che

$$\phi(0) = \int_{-1}^1 v(t)\phi(t) dt \qquad \text{per ogni } \phi \in C^1_c(-1,1).$$

Se per assurdo esistesse, definita

$$\phi_n(t) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|nt|^2-1}} \text{ se } |t| < \frac{1}{n} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

abbiamo $\phi_n \in C^\infty_c(-1,1)$ per ogni $n \ge 2$ e

$$e^{-1} = \varphi_n(0) = \int_{-1}^1 v(t) e^{\frac{1}{|nt|^2-1}} dt.$$

Poichè $|v(t)e^{\frac{1}{|nt|^2-1}}| \le |v(t)|$ per ogni $t \in [-1,1]$ e poichè $e^{\frac{1}{|nt|^2-1}} \to 0$ per $n \to \infty$ e per $t \ne 0$, per il Teorema di Lebesgue si ottiene che

$$e^{-1} = \int_{-1}^1 v(t) e^{\frac{1}{|nt|^2-1}} dt \to 0.$$

Assurdo.

(2) Sia $u(t) := |t|$. Vale che $u \in W^{1,p}(-1,1) \setminus C^1(-1,1)$ con derivata debole

$$u'(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } t > 0 \\ -1 \text{ se } t < 0 \end{cases} .$$

Basta infatti osservare che per ogni $\phi \in C_c^1(-1,1)$ vale che

$$\int_{-1}^{1} u(t)\phi'(t)dt = \int_{-1}^{0} u(t)\phi'(t)dt + \int_{0}^{1} u(t)\phi'(t)dt$$

$$= u(0)\phi(0) - \int_{-1}^{0} u'(t)\phi(t)dt - u(0)\phi(0) - \int_{0}^{1} u'(t)\phi(t)dt = -\int_{-1}^{1} u'(t)\phi(t)dt.$$

(3) **Derivata nel senso delle distribuzioni.** Per ogni $s \in \mathbb{R}$ sia

$$u_s(t) := \begin{cases} s \text{ se } t > 0 \\ 0 \text{ se } t < 0 \end{cases} .$$

Si osservi che $u_s'(t) = 0$ per ogni $t \neq 0$ e quindi le derivate u_c' evidenziano in 0 un eventuale punto di discontinuità ma non forniscono informazioni sul "salto" di u_c nel punto 0. Ora $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, scelto $a \in \mathbb{R}$ tale che $\phi(t) = 0$ per ogni $t \geq a$ vale che

$$< u_s, \phi' > := \int_{\mathbb{R}} u(t)\phi'(t)dt = s\int_0^a \phi'(t)dt = s(\phi(a) - \phi(0)) = -s\phi(0)$$

dove $\delta_0 : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita come $\delta_0(\phi) = \phi(0)$, si chiama "distribuzione" **delta di Dirac concentrata in** 0. Si dice che *"la derivata distribuzionale di u_s è la distribuzione $s\delta_0$"* o, equivalentemente, $u_s' = s\delta_0$ nel senso delle distribuzioni. Questo perchè, posto $< \delta_0, \phi > := \phi(0)$, vale che

$$< u_s, \phi' > = - < s\delta_0, \phi > = - < u_s', \phi > .$$

Si osservi che la derivata distribuzionale $u_s' = s\delta_0$ "si ricorda" del salto s della funzione u_s nel punto 0. Con una dimostrazione analoga a quanto fatto prima, si dimostra che non esiste $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\delta_0(\phi) = \int_{-1}^{1} v(t)\phi(t)dt \quad \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

In generale, se abbiamo una funzione costante a tratti del tipo

$$u(t) := \begin{cases} c_2 \text{ se } t > t_2 \\ c_1 \text{ se } t_1 < t < t_2 \\ c_0 \text{ se } t < t_1 \end{cases}$$

vale che $u' = (c_1 - c_0)\delta(t_1) + (c_2 - c_1)\delta(t_2) = s_1\delta(t_1) + s_2\delta(t_2)$ *nel senso delle distribuzioni, dove s_1, s_2 sono i salti della funzione u.*

Osservazione 17.6. Si osservi che

(1) se $(u_n)_n \in W^{1,p}(\Omega)$ é tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ e $D_j u_n \rightharpoonup v_j$ in $L^p(\Omega)$ (rispettivamente $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$ e $D_j u_n \overset{*}{\rightharpoonup} v_j$ in $L^\infty(\Omega)$) per ogni $j \in \{1, \cdots, N\}$ allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $D_j u = v_j$.
Infatti, fissata $\phi \in C_c^1(\Omega)$, basta osservare che, dalla relazione

$$\int_\Omega u_n(x) D_j \phi(x)\, dx = -\int_\Omega D_j u_n(x)\phi(x) dx,$$

passando al limite per $n \to \infty$, grazie alla continuitá debole-debole degli operatori lineari e continui

$$v \mapsto \int_\Omega u_n(x) D_j\, \phi(x)\, dx,$$
$$v \mapsto \int_\Omega v(x)\phi(x) dx$$

segue che

$$\int_\Omega u(x) D_j\, \phi(x)\, dx = -\int_\Omega v_j(x)\phi(x) dx$$

da cui la tesi. Lo stesso risultato vale ovviamente se $(u_n)_n \in W^{1,p}(\Omega)$ é tale che $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $D_j u_n \to v_j$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $j \in \{1, \cdots, N\}$.

(2) se muniamo $W^{1,p}(\Omega)$ della norma

$$||u||_{1,p} := ||u||_p + \sum_{i=1}^{N} ||D_i u||_p,$$

l'applicazione $I : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N)$

$$I(u) := (u, Du)$$

risulta un'isometria e dall'osservazione precedente, segue che $I(W^{1,p}(\Omega))$ è un sottospazio chiuso di $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N$. Pertanto $W^{1,p}(\Omega)$ può essere riguardato come un sottospazio chiuso di $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N$. Si osservi che se definiamo

$$||u||_{\tilde{1,p}} := \sqrt[p]{||u||_p^p + \sum_{i=1}^{N} ||D_i u||_p^p}$$

vale che la norma $||\cdot||_{\tilde{1,p}}$ è equivalente alla norma $||\cdot||_{1,p}$. A tal scopo si osservi che su $\mathbb{R}^{N+1}$ le norme

$$|x|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N+1} |x_i|^p}, \quad |x|_1 := \sum_{i=1}^{N+1} |x_i|$$

sono equivalenti: precisamente

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N+1} |x_i|^p} \le \sum_{i=1}^{N+1} |x_i| \le (N+1) \max_{1 \le i \le N+1} |x_i| \le (N+1) \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N+1} |x_i|^p}.$$

Proposizione 17.7. *Siano X e Y spazi di Banach. Allora*

(1) $(X \times Y)' = X' \times Y'$;
(2) *se X e Y sono spazi riflessivi, allora $X \times Y$ é riflessivo.*

(la prima parte è un semplice esercizio, la seconda parte senza dimostrazione)

Teorema 17.8. *Sia $1 \le p \le +\infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Allora lo spazio $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ é uno spazio di Banach. Inoltre se $1 < p < +\infty$ lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ é riflessivo e se $1 \le p < +\infty$ lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ é separabile.*

Dimostrazione. Essendo $W^{1,p}(\Omega)$ isometrico ad un sottospazio chiuso dello spazio di Banach $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N$, esso stesso é uno spazio di Banach. Inoltre, se $1 < p < +\infty$, $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N$ é un prodotto di spazi riflessivi. Pertanto $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N$ é riflessivo ed essendo $W^{1,p}(\Omega)$ un sottospazio chiuso di $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N$, esso stesso è uno spazio riflessivo. Infine, se $1 \le p < +\infty$, $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega)^N$ è un prodotto di spazi separabili e quindi esso stesso è separabile. Pertanto, se $1 \le p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio separabile. $\square$

In particolare segue che

Teorema 17.9. *Lo spazio $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$, munito del prodotto scalare (indotto da L^2)*

$$< u, v >_{1,2} := < u, v >_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} < D_i u, D_i v >_{L^2}$$

é uno spazio di Hilbert.

Si osservi che per ogni $u \in H^1(\Omega)$ vale che

$$\sqrt{< u, u >_{1,2}} = ||u||_{\tilde{1,2}}$$

ossia la norma indotta dal prodotto $< u, v >_{1,2}$ sullo spazio $H^1(\Omega)$ è la norma $||u||_{\tilde{1,2}}$ che è equivalente alla norma $|| \cdot ||_{1,2}$.

Osservazione 17.10. (1) Diremo che $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ e $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_j}$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $j \in \{1, \cdots, N\}$ (in realtà questo segue da un risultato che afferma che la topologia debole su uno spazio prodotto è il prodotto delle topologie deboli).

(2) Se $1 < p < \infty$ e se $(u_n)_n$ é una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, allora le successioni (u_n) e $(D_i u_n)$ sono limitate in L^p e quindi possiamo estrarre una sottosuccessione $(u_{k_n})_n$ tale che $u_{k_n} \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ e $D_j u_{k_n} \rightharpoonup v_j$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $j \in \{1, \cdots, N\}$. Allora, per l'Osservazione 17.6 vale che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $D_j u = v_j$ e $u_{k_n} \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 17.11 (Caratterizzazione per $1 < p \leq +\infty$). *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 < p \leq +\infty$. Allora $f \in W^{1,p}(\Omega) \iff f \in L^p(\Omega)$ ed esiste $C > 0$ tale che*

$$\left| \int_\Omega D_i \phi(x) f(x) dx \right| \leq C ||\phi||_{L^{p'}(\Omega)} \tag{17.4}$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e per ogni $1 \leq i \leq N$.

Dimostrazione "$\Longrightarrow$" Basta scegliere $C = \max_i ||D_i f||_{L^p(\Omega)}$ e applicare la disuguaglianza di Hölder alle funzioni $D_i f \in L^p$ e $\phi \in L^{p'}$.

"$\Longleftarrow$" Per ogni $1 \leq i \leq N$ sia $T_i : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da

$$T_i(\phi) = \int_\Omega D_i \phi(x) f(x) dx.$$

Grazie all'ipotesi (17.4) il funzionale T_i è lineare e continuo rispetto alla norma $\| \cdot \|_{p'}$. Essendo $1 \leq p' < +\infty$ si ha che $C_c^\infty(\Omega)$ é denso in $L^{p'}(\Omega)$. Quindi T_i si estende in modo unico ad un funzionale $\bar{T}_i$ lineare e continuo su $L^{p'}(\Omega)$ (si può usare in alternativa il Teorema di Hahn-Banach). Per il teorema di Rappresentazione di Rietz (Teorema 13.3), per ogni $1 \leq i \leq N$ esiste $g_i \in L^p(\Omega)$ tale che

$$\bar{T}_i(v) = \int_\Omega v(x) g_i(x) dx \quad \forall v \in L^{p'}(\Omega).$$

In particolare

$$\int_\Omega D_i \phi(x) f(x) dx = T_i(\phi) = \bar{T}_i(\phi) = \int_\Omega \phi(x) g_i(x) dx$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, ossia per ogni $1 \leq i \leq N$ le funzioni $-g_i$ sono le derivate deboli di f. $\square$

Osservazione 17.12. Si osservi che nel caso $p = 1$ l'implicazione "$\Longrightarrow$" del teorema precedente continua ad essere vera. Il viceversa é falso. Per esempio la funzione u dell'esempio 17.5 appartiene a $L^1((-1, 1)) \setminus W^{1,1}(-1, 1)$ e per ogni $\phi \in C_c^\infty(-1, 1)$

$$\int_{-1}^{1} \phi'(t) \chi_{(0,1)}(t) dt = \int_0^1 \phi'(t) dt = -\phi(0)$$

da cui

$$\Big|\int_{-1}^{1} \phi'(t)\chi_{(0,1)}(t)dt\Big| \leq ||\phi||_\infty.$$

Concludiamo questa sezione introduttiva con i seguenti teoremi di densità (senza dimostrazione).

Teorema 17.13 (**di densità per** $N = 1$)**.** *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e $1 \leq p < +\infty$ e sia $u \in W^{1,p}(I)$. Allora esiste $(\phi_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che*

$$||u - \phi_{n_{|I}}||_{W^{1,p}(I)} \to 0.$$

Teorema 17.14 (**di densità per** $N > 1$)**.** *Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia Ω un aperto limitato di classe C^1 oppure $\Omega = \mathbb{R}^N$. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste $(\phi_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che*

$$||u - \phi_{n_{|\Omega}}||_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

17.1. **Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$.**

Definizione 17.15. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Per ogni $1 \leq p < +\infty$ definiamo $W_0^{1,p}(\Omega)$ la chiusura del sottospazio $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto la norma $|| \cdot ||_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

Osserviamo che, grazie ai Teoremi 17.13 e 17.14, si ha che $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Inoltre si osservi che (usando le convoluzioni) si può provare che $W_0^{1,p}(\Omega)$ coincide anche con la chiusura del sottospazio $C_c^1(\Omega)$ rispetto la norma $|| \cdot ||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Essendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ un sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo vale che

Proposizione 17.16. *Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ é uno spazio separabile per $1 \leq p < \infty$ e e riflessivo per $1 < p < \infty$. Lo spazio $H_0^1 = W_0^{1,2}(\Omega)$ é in particolare uno spazio di Hilbert separabile.*

Si osservi che, essendo il sottospazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ chiuso, allora esso è chiuso anche rispetto alla convergenza debole di $W^{1,p}(\Omega)$.

In generale se $f \in W^{1,p}(\Omega)$, la sua estensione $\bar{f}$ nulla fuori da Ω non appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (si consideri per esempio $u(x) \equiv 1$ su $(0,1)$. Allora $\bar{u}' = \delta_0 - \delta_1$ nel senso delle distribuzioni da cui $\bar{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R})$). In $W_0^{1,p}(\Omega)$ tale proprietá invece vale.

Proposizione 17.17. *Sia $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. Allora posto*

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & se\ x \in \Omega \\ \\ 0 & se\ \ x \notin \Omega \end{cases}$$

vale che $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione É sufficiente provare che $\bar{f}$ verifica la condizione (17.4) del Teorema 17.11. Sia $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, sia $1 \leq i \leq N$ e sia $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$||f_n - f||_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

Allora, integrando per parti (usando il fatto che $\phi, f_n \in C_c^\infty(\Omega)$), si ha che

$$\int_\Omega D_i\phi(x) f_n(x)dx = -\int_\Omega \phi(x) D_i f_n(x)dx$$

da cui

$$\left|\int_\Omega D_i\phi(x) f_n(x)dx\right| \leq ||\phi||_{L^{p'}(\Omega)} ||D_i f_n||_{L^p(\Omega)}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} D_i\phi(x)\bar{f}(x)dx \right| = \left| \int_{\Omega} D_i\phi(x)f(x)dx \right| \leq ||\phi||_{L^{p'}(\Omega)}||D_i f||_{L^p(\Omega)}.$$

É sufficiente scegliere $C := \max_{1\leq i\leq N}\{||D_i f||_{L^p(\Omega)}\}$. □

Le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono quelle che "a traccia" nulla sul bordo di Ω (vedere, per esempio, il Brezis per una definizione precisa dell'operatore Traccia). In generale, per $N = 1$, vale la seguente proposizione (di cui dimostreremo, nel Corollario 17.24 , l'implicazione $\Longrightarrow$).

Proposizione 17.18. *Sia $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < +\infty$. Allora $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e solo se $u = 0$ su ∂I.*

Per $N \geq 2$, una delle due implicazioni richiede che Ω sia un aperto regolare.

Proposizione 17.19. *Sia $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $1 \leq p < +\infty$.*

- *Se $f = 0$ su $\partial\Omega$ allora $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
- *Se Ω é un aperto di classe C^1 allora vale anche il viceversa, ossia se $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ allora $f = 0$ su $\partial\Omega$.*

17.2. **Spazi di Sobolev per $N = 1$.** Estendiamo ora il teorema fondamentale del calcolo integrale alle funzioni di Sobolev:

Teorema 17.20. *Sia $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq +\infty$, I intervallo aperto qualunque (limitato o non limitato). Allora esiste $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tale che $u = \tilde{u}$ q.o. in I e*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y u'(t)dt.$$

Per la dimostrazione premettiamo il seguente lemma:

Lemma 17.21. *Sia $u \in L^1_{loc}(I)$.*

(1) *Sia $t_0 \in I$ e sia $v(x) := \int_{t_0}^x u(t)dt$. Allora $v \in C(I)$ e per ogni $\psi \in C^1_c(I)$*

$$\int_I v(x)\psi'(x)dx = -\int_I u(x)\psi(x)dx.$$

In particolare se $u \in L^p(I)$ e I è limitato allora $v \in W^{1,p}(I) \cap C(\bar{I})$.

(2) *Se $\int_I u(t)\psi'(t)dt = 0$ per ogni $\psi \in C^1_c(I)$ allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $u = C$ q.o.in I.*

Dimostrazione. (non fatta a lezione)

(1) Supponiamo $I = (a, b)$ e fissiamo $x' \in I$. Allora esiste un compatto $[x' - \sigma, x' + \sigma] \subseteq (a, b)$ e $u \in L^1(x' - \sigma, x' + \sigma)$. Per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $0 < \delta < \sigma$ tale che se $|x - x'| < \delta$ allora $|\int_x^{x'} |u(t)|dt| < \epsilon$. Allora per ogni $x \in (a, b)$ tale che $|x - x'| < \delta$ vale che

$$|v(x) - v(x')| = |\int_{t_0}^x u(t)dt - \int_{t_0}^{x'} u(t)dt| = |\int_x^{x'} u(t)dt| < \epsilon.$$

Inoltre per ogni $\psi \in C^1_c(I)$

$$\begin{aligned}\int_a^b v(x)\psi'(x)dx &= \int_a^b\int_{t_0}^x u(t)\psi'(x)dtdx = \\ &= \int_a^{t_0}\int_{t_0}^x u(t)\psi'(x)dtdx + \int_{t_0}^b\int_{t_0}^x u(t)\psi'(x)dtdx \\ &= -\int_a^{t_0}\int_x^{t_0} u(t)\psi'(x)dtdx + \int_{t_0}^b\int_{t_0}^x u(t))\psi'(x)dtdx \\ &= -\iint_{A_1} u(t)\psi'(x)dtdx + \iint_{A_2} u(t)\psi'(x)dtdx\end{aligned}$$

dove

$$A_1 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \, : a \le x \le t_0, x \le t \le t_0\}$$

e

$$A_1 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \, : t_0 \le x \le b, t_0 \le t \le x\}.$$

Applicando il Teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_a^b v(x)\psi'(x)dx &= -\int_a^{t_0} u(t)\big(\int_a^t \psi'(x)dx\big)dt + \int_{t_0}^b u(t)\big(\int_t^b \psi'(x)dx\big)dt = \\ &= -\int_a^{t_0} u(t)(\psi(t)-\psi(a))dt + \int_{t_0}^b u(t)(\psi(b)-\psi(t))dt \\ &= -\int_a^b u(t)\psi(t)dt.\end{aligned}$$

(2) Sia $\phi \in C_c(I)$ tale che $\int_I \phi(t)dt = 1$ e sia $w \in C^1_c(I)$. Sia

$$h := w - \phi(\int_I w(s)ds.$$

Tale funzione $h \in C_c(I)$ e $\int_I h(t)dt = 0$. Pertanto usando come funzione test una funzione k primitiva di h, si ottiene che per ogni $w \in C^1_c(I)$

$$\int_I u(t)k'(t)dt = \int_I u(t)h(t)dt = \int_I u(t)\bigg(w(t) - \phi(t)\int_I w(s)ds\bigg)dt = 0.$$

da cui

$$\begin{aligned}0 &= \int_I u(t)w(t)dt - \bigg(\int_I u(t)\phi(t)dt\bigg)\int_I w(s)ds = \\ &= \int_I u(t)w(t)dt - \bigg(\int_I u(s)\phi(s)ds\bigg)\int_I w(t)dt = \\ &= \int_I \bigg(u(t) - \int_I u(s)\phi(s)ds\bigg)w(t)dt \quad \forall\, w \in C^1_c(I).\end{aligned}$$

Applicando il Lemma 17.1 segue che $u(t) - \int_I u(s)\phi(s)ds = 0$ q.o. $t \in I$ ossia

$$u(t) = \int_I u(s)\phi(s)ds = C \quad \text{q.o. } t \in I.$$

□

Applicheremo inoltre il seguente risultato di prolungamento (senza dimostrazioni).

Teorema 17.22 (di estensione). *Sia $1 \le p \le +\infty$, I intervallo qualunque di $\mathbb{R}$. Allora esiste $E : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ lineare e continuo tale che*

(1) $(Eu)_{|I} = u \ \forall u \in W^{1,p}(I)$;

(2) *esiste $C_1 > 0$ dipendente da $|I|$ tale che*
$$||Eu||_{L^p(\mathbb{R})} \le C_1 ||u||_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I);$$

(3) *esiste $C_2 > 0$ dipendente da $|I|$ tale che*
$$||Eu||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \le C_2 ||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I).$$

Dimostrazione del Teorema 17.20. Sia $t_0 \in I$ e sia $v(x) := \int_{t_0}^x u'(t)dt$. Per la parte (1) del Lemma 17.21 vale che $v \in C(I)$. Per la parte (1) dello stesso lemma ed usando che $u \in W^{1,p}(I)$ vale che per ogni $\psi \in C_c^1(I)$
$$\int_I v(t)\psi'(t)dt = -\int_I u'(t)\psi(t)dt = \int_I u(t)\psi'(t)dt.$$
In particolare per ogni $\psi \in C_c^1(I)$
$$\int_I (u(t) - v(t))\psi'(t)dt = 0.$$
Per la parte (2) del Lemma 17.21 segue che esiste una costante tale che $u - v = C$ q.o. in I. Posto $\tilde{u} := v + C$ segue la tesi. □

17.3. **Immersioni di Sobolev per $N = 1$.**

Teorema 17.23 (Disuguaglianze di Sobolev in $W^{1,p}(I)$, $N = 1$). *Sia I intervallo aperto qualunque di $\mathbb{R}$ e $1 \le p \le +\infty$. Allora*

(1)
$$W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)(\cap C(\bar{I}))$$
con inclusione continua. Precisamente esiste una costante $C = C(I)$ tale che
$$||v||_{L^\infty(I)} \le C||v||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I); \tag{17.5}$$

(2) *se I é limitato e $1 < p \le +\infty$ allora*
$$W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$$
con inclusione compatta;

(3) *se I é limitato e $p = 1$ allora per ogni $1 \le q < +\infty$ vale che*
$$W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$$
con inclusione compatta.

In particolare se I é limitato vale che l'inclusione di $W^{1,p}(I)$ in $L^p(I)$ è compatta per ogni $1 \le p \le +\infty$.

Dimostrazione.

(1) Per $p = \infty$ segue dalla definizione e dal Teorema 17.21. Vediamo la dimostrazione per $1 \le p < \infty$.

Primo step. Proviamo la disuguaglianza (17.6) per $I = \mathbb{R}$ e per $v \in C_c^1(\mathbb{R})$. Sia $v \in C_c^1(\mathbb{R})$ e definiamo $u(t) := |v(t)|^{p-1}v(t)$. Allora $u \in C^1(\mathbb{R})$ e $u'(t) = p|v(t)|^{p-1}v'(t)$. Essendo $v = 0$ se $t \le a$ per un $a \in \mathbb{R}$ opportuno, vale che
$$u(t) = u(a) + p\int_a^t |v(s)|^{p-1}v'(s)ds = \int_{-\infty}^t |v(s)|^{p-1}v'(s)ds$$
e per la disuguaglianza di Hölder segue che

$$|v(t)|^p = |u(t)| = p\int_{-\infty}^{\infty} |v(s)|^{p-1}|v'(s)|ds \le p||v||_p^{p/p'}||v'||_p.$$

Quindi, la usando la Disuguaglianza di Young, segue che

$$|v(t)| \le p^{1/p}||v||_p^{1/p'}||v'||_p^{1/p} \le p^{1/p}(\frac{1}{p'}||v||_p + \frac{1}{p}||v'||_p) \le C(p)||v||_{W^{1,p}}$$

ossia

$$||v||_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C(p)||v||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall\, v \in C_c^1(\mathbb{R}). \tag{17.6}$$

Secondo step. Dimostriamo ora che la disuguaglianza (17.5) vale per ogni $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Per densità (Teorema 17.13) esiste $(\phi_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$||v - \phi_n||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \to 0.$$

Quindi, applicando la disuguaglianza (17.6) alle funzioni $\phi_n - \phi_m \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ottiene che

$$||\phi_n - \phi_m||_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C(p)||\phi_n - \phi_m||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

e quindi $(\phi_n)_n$ é di Cauchy nello spazio di Banach $L^\infty(\mathbb{R})$. Sia $u \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ il suo limite. Siccome $\phi_n \to v$ in $L^p(\mathbb{R})$, allora, passando ad una sottosuccessione, si ha che $\phi_{k_n} \to v$ q.o. in $\mathbb{R}$. Poiché $\phi_n \to u$ in $L^\infty(\mathbb{R})$, allora $u = v$ ossia $\phi_n \to v$ in $L^\infty(\mathbb{R})$. Applicando di nuovo la (17.6) vale che

$$||\phi_n||_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C(p)||\phi_n||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e passando al limite in tale disuguaglianza si ottiene che

$$||v||_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C(p)||v||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Terzo step. Per dimostrare ora la (17.5) per ogni $v \in W^{1,p}(I)$, fissiamo $v \in W^{1,p}(I)$ ed consideriamo l'estensione $Ev \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ definita nel Teorema 17.22. Allora, applicando lo step precedente alla funzione $Ev \in W^{1,p}(\mathbb{R})$,

$$||v|||_{L^\infty(I)} = ||Ev||_{L^\infty(I)} \le ||Ev||_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C(p)||Ev||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \le C(p)C_2||v||_{W^{1,p}(I)}.$$

(2) Sia $(u_n)_n \in W^{1,p}(I)$ tale che $||u_n||_{W^{1,p}(I)} \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Grazie al Teorema 17.20 possiamo supporre che u_n sia continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che

$$|u_n(x) - u_n(y)| = |\int_y^x u_n'(t)dt|.$$

Proviamo che esiste una sottosuccessione convergente uniformemente su $\overline{I}$. Applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha che

$$|u_n(x) - u_n(y)| = |\int_y^x u_n'(t)dt| \le |x-y|^{\frac{1}{p'}}||u_n'||_{L^p(I)} \le |x-y|^{\frac{1}{p'}}||u_n||_{1,p} \le |x-y|^{\frac{1}{p'}}$$

per ogni $x, y \in \bar{I}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia $(u_n)_n$ é equicontinua su $\overline{I}$. Inoltre dalla (17.6) si ha che

$$||u_n||_{L^\infty(I)} \le C||u_n||_{W^{1,p}(I)} \le C \cdot 1 = C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi la successione $(u_n)_n$ verifica le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelá. Pertanto ammette una sottosuccessione convergente uniformente su $\overline{I}$.

(3) Senza dimostrazione (si applica il teorema di Kolmogoroff).

Per concludere, resta da provare la compattezza dell'inclusione di $W^{1,p}(I)$ in $L^p(I)$ nel caso $p \neq 1$. Basta notare che tale inclusione é la composizione dell'immersione compatta di $W^{1,p}(I)$ in $C(\bar{I})$ e dell'inclusione continua di $C(\bar{I})$ in $L^p(I)$.

$\square$

Siamo ora in condizione di provare il seguente risultato.

Corollario 17.24. *Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $u \in W_0^{1,p}(I)$ allora $u = 0$ sul bordo di I (nel senso che il suo rappresentante continuo $\tilde{u}$ soddisfa la condizione $\tilde{u} = 0$ sul bordo di I).*

Dimostrazione. Sia $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $||u_n - u||_{W^{1,p}(I)} \to 0$. Grazie alla disuguaglianza (17.5)

$$||u_n - u||_{L^\infty(I)} \leq C||u_n - u||_{W^{1,p}(I)}$$

da cui segue che la successione $(u_n)_n$ converge ad u uniformemente su $\bar{I}$.Quindi se $a \in \partial I \cap \mathbb{R}$ allora $u(a) = 0$. Se I è illimitato superiormente (o inferiormente) e se $\epsilon > 0$ allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $||u_n - u||_{L^\infty(I)} < \epsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi,

$$\limsup_{x\to+\infty} |u(x)| \leq \limsup_{x\to+\infty} ||u_{n_0} - u||_\infty + |u_{n_0}(x)| \leq \epsilon + \limsup_{x\to+\infty} |u_{n_0}(x)| = \epsilon$$

in quanto $u_{n_0} \in C_c^\infty(I)$. Quindi $\limsup_{x\to+\infty} |u(x)| \leq \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$. Questo implica

$$\lim_{x\to+\infty} |u(x)| = 0.$$

$\square$

Dimostriamo ora la seguente

Corollario 17.25 (Disuguaglianza di Poincaré per $N = 1$). *Sia $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Allora per ogni $1 \leq p < +\infty$ esiste $C = C(|I|)$ tale che*

$$||u||_{W^{1,p}(I)} \leq C||u'||_{L^p(I)}$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(I)$. In particolare su $W_0^{1,p}(I)$ la norma $||u||_{W^{1,p}(I)}$ é equivalente alla norma $||u'||_{L^p(\Omega)}$.

Dimostrazione. Grazie al Teorema 17.20 e alla Proposizione 17.18, a meno di considerare il rappresentante continuo, vale che per ogni $x \in (a, b)$

$$u(x) = u(x) - u(a) = \int_a^x u'(t)dt$$

da cui, applicando la disuguaglianza di Hölder con $\chi_{(a,b)} \in L^{p'}$ e $u' \in L^p$, si ottiene che

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'(t|)dt \leq ||u'||_p(b - a)^{\frac{1}{p'}}.$$

Quindi

$$||u||_p = (\int_a^b |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq ||u'||_p(b - a)^{\frac{1}{p'}}(b - a)^{\frac{1}{p}} = (b - a)||u'||_p.$$

Infine

$$||u||_{W^{1,p}(I)} = ||u||_p + ||u'||_p \leq (b - a)||u'||_p + ||u'||_p = (b - a + 1)||u'||_p.$$

$\square$ $\square$

Esempio 17.26. Sia $f \in L^2(I)$ dove $I = (a, b)$ e consideriamo il problema

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{17.7}$$

Ovviamente non siamo nella condizioni del Teorema di Cauchy-Lipschitz.

Se esistesse u soluzione "classica" del problema (17.7) (quindi se u fosse due volte derivabile su I e continua su $\bar{I}$) , allora per ogni $\phi \in C_c^1(I)$ avremmo che

$$-\int_a^b u''\phi dt + \int_a^b u\phi dt = \int_a^b f\phi dt$$

da cui, integrando per parti, avremmo che

$$\int_a^b u'\phi' dt + \int_a^b u\phi dt = \int_a^b f\phi dt \quad \forall \phi \in C_c^1(I). \tag{17.8}$$

Tale formulazione ha senso anche se $u \in H_0^1(I)$. Diremo che $u \in H_0^1$ è una **soluzione debole** dell'equazione (17.7) se soddisfa la condizione (17.8). Il problema (17.8) si chiama formulazione debole del problema (17.7).

Dimostriamo l'esistenza di una soluzione debole. Si consideri il prodotto scalare

$$(u, v) := \int_a^b uv dt + \int_a^b u'v' dt.$$

Applicando il Teorema di Rietz sullo spazio di Hilbert $H = H_0^1(I)$ e con il funzionale $T_f \in H'$ definito come $T_f(v) := \int_a^b fv dt$, si ha che esiste un unica funzione $u \in H_0^1(I)$ tale che

$$(u, v) = T_f(v) \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

In particolare $u \in H_0^1(I)$ soddisfa (17.8). Si osservi che, grazie al Teorema 17.20, tale funzione ha un rappresentante continuo $\tilde{u} \in C(\bar{I})$, e , grazie alla Proposizione 17.24 vale che $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$. Dimostriamo ora che se $f \in C(\bar{I})$ allora $u \in C^2(I)$ (nel senso che ha un rappresentante di classe C^2). Infatti dalla (17.8), segue che

$$\int_a^b u'\phi' dt = \int_a^b (f - u)\phi dt \quad \forall \phi \in C_c^1(I) \tag{17.9}$$

ossia la funzione u' (che appartiene a $L^2(I)$) ha "derivata debole"

$$(u')' = u - f \in C(I).$$

Quindi $u' \in H^{1,2}(\Omega)$ da cui segue, grazie al Teorema 17.20, che $u' \in C(I)$ (nel senso che ha un rappresentante continuo). Inoltre, grazie al Teorema 17.20, vale che per ogni $x, y \in I$

$$u'(x) - u'(y) = \int_a^b (u')'(t) dt = \int_a^b (u - f) dt,$$

dal Teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $u' \in C^1(I)$ ossia $u \in C^2(I)$. Dalla (17.9), integrando per parti, segue che

$$-\int_a^b u''\phi dt = \int_a^b (f - u)\phi dt \quad \forall \phi \in C_c^1(I)$$

ossia

$$\int_a^b (f - u + u'')\phi dt = 0 \quad \forall \phi \in C_c^1(I)$$

da cui, per il Lemma fondamentale del calcolo della variazioni,

$$-u''(t) + u(t) = f(t)$$

per ogni $t \in I$ (perchè?), ossia u è una soluzione classica.

17.4. **Caso $N \geq 2$.** Allo scopo di introdurre le immersioni di Sobolev per $N \geq 2$ introduciamo prima di tutto lo spazio delle funzioni α-hölderiane.

Definizione 17.27. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $0 < \alpha \leq 1$. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice* **α-hölderiana** *(su Ω) se esiste $C > 0$ tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq C||x - y||^\alpha.$$

Osserviamo che

(1) Se $\alpha = 1$ una funzione é α-hölderiana se e solo se é lipschitziana;
(2) Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é α-hölderiana, allora f é uniformente continua su Ω;
(3) se Ω é limitato e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é α-hölderiana, allora f é limitata su Ω. Inoltre f si estende per continuitá sul bordo di Ω.

Definiamo

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{f \in L^\infty(\Omega) : \ f \ \alpha\text{-hölderiana su } \Omega\}.$$

Su $C^{0,\alpha}(\Omega)$ definiamo la seguente norma:

$$||f||_{0,\alpha} := ||f||_\infty + [f]_{0,\alpha}$$

dove

$$[f]_{0,\alpha} := \sup_{x,y \in \Omega, \ x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||^\alpha}.$$

Si dimostra che $C^{0,\alpha}(\Omega)$ munito di questa norma é uno spazio di Banach.

Teorema 17.28 (**Immersioni di Sobolev in $W_0^{1,p}(\Omega)$**)**.** *Sia Ω un aperto* **qualunque** *e $N \geq 2$, $1 \leq p < +\infty$. Allora*

(1) *Se $1 \leq p < N$ allora, posto $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, esiste una costante $C = C(p, N) = \frac{p(N-1)}{p+N}$ tale che*

$$||f||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C||Df||_{L^p(\Omega)} \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega); \tag{17.10}$$

in particolare

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$$

con inclusione continua;

(2) *Se $p = N$ allora per ogni $N \leq q < +\infty$*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

con inclusione continua;

(3) *se $p > N$ allora, posto $\alpha := 1 - \frac{N}{p}$, vale che*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$$

con inclusione continua. Precisamente esistono $C_1 = C_1(p, N) > 0$ e $C_2 = C_2(p, N) > 0$ tali che $\forall f \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1||f||_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{17.11}$$

e

$$|f(x) - f(y)| \leq C_2||x - y||^\alpha||Df||_{L^p(\Omega)} \, q.o. \ x, y \in \Omega. \tag{17.12}$$

Osservazione 17.29. Dalle immersioni di Sobolev segue che

(1) se $1 \leq p < N$, allora, applicando la disuaglianza di interpolazione (che vale anche quando Ω non é limitato),

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \text{ per ogni } 1 \leq q \leq p^*;$$

(2) se $p = N$
$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$
per ogni $1 \leq q < +\infty$;

(3) se $p > N$ segue che ogni funzione $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ha un rappresentante continuo. Infatti sia
$$D := \{x \in \Omega : \ (17.12) \text{ vale q.o. } y \in \Omega\}.$$
Essendo $\Omega \setminus D$ di misura nulla, si ha che D é denso in Ω. Quindi é possibile estendere f in modo continuo su tutto Ω.

Corollario 17.30 (**Disuguaglianza di Poincaré).** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aperto* **limitato**. *Allora per ogni* $1 \leq p < +\infty$ *esiste* $C = C(p, N, \Omega)$ *tale che*
$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq C||Df||_{L^p(\Omega)}$$
per ogni $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *In particolare su* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la norma* $||f||_{W^{1,p}(\Omega)}$ *é equivalente alla norma* $||Df||_{L^p(\Omega)}$.

Dimostrazione. Se $1 \leq p < N$ e $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora dalla prima disuguaglianza di Sobolev segue che
$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}}||f||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p,N)|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}}||Df||_{L^p(\Omega)}.$$
Se $p \geq N$ si definisce $r = \frac{pN}{N+p}(< N \leq p)$. Allora vale che $r^* = p$ e se $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ allora $f \in W_0^{1,r}(\Omega)$ e dalla prima disuguaglianza di Sobolev segue che
$$||f||_{L^p(\Omega)} = ||f||_{L^{r^*}(\Omega)} \leq C(r,N)||Df||_{L^r(\Omega)} \leq C(p,N,\Omega)||Df||_{L^p(\Omega)}.$$
□

Vale inoltre la seguente generalizzazione della Disuguaglianza di Poincaré:

Teorema 17.31 (**Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger).** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aperto limitato, connesso, di classe* C^1. *Allora per ogni* $1 \leq p < +\infty$ *esiste* $C = C(p, N, \Omega)$ *tale che*
$$||f - f_\Omega||_{L^p(\Omega)} \leq C||Df||_{L^p(\Omega)}$$
per ogni $f \in W^{1,p}(\Omega)$ *dove*
$$f_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx.$$
(senza dimostrazione)

Esempio 17.32. (Applicazione al problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson) Sia $f \in L^2(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto **limitato** e consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) \text{ (per q.o. } x \in \Omega) \\ u(x) = 0 \text{ per ogni } x \in \Omega \end{cases} \tag{17.13}$$

Se esistesse u soluzione "classica" del problema (quindi se u fosse due volte differenziabile su Ω e continua su $\bar{\Omega}$) , allora per ogni $\phi \in C_c^1(\Omega)$ avremmo che
$$-\int_\Omega (\Delta u)\phi dx = \int_\Omega f(\phi)dx$$
da cui, integrando per parti, avremmo che
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega f\phi dx \quad \forall \phi \in C_c^1(I). \tag{17.14}$$

Tale formulazione ha senso anche se $u \in H_0^1(I)$.
Diremo quindi che $u \in H_0^1(\Omega)$ è una **soluzione debole** dell'equazione (17.13) se soddisfa la condizione (17.14). Dimostriamo l'esistenza di una soluzione debole. Si consideri la forma bilineare

$$(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx.$$

Grazie alla Disuguaglianza di Poincarè, esso è un prodotto scalare su $H_0^1(\Omega)$ che induce la norma

$$||u|| := \sqrt{(u, u)} = ||Du||_2.$$

Applicando il Teorema di Rietz sullo spazio di Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$ munito del prodotto scalare (**??**) con il funzionale $T_f \in H'$ definito come

$$T_f(v) := \int_\Omega f \phi dx$$

(si osservi che $|T_f(v)| \leq ||v||_2||f||_2 \leq C||Dv||_2||f||_2$ per ogni $v \in H$) si ha che esiste un'unica funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$(u, v) = T_f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tale $u \in H_0^1(\Omega)$ soddisfa (17.14). Se sapessimo che tale $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e che Ω è di classe C^1 allora, per la Proposizione 17.19 seguirebbe che $u = 0$ sul bordo.
Se inoltre u fosse di classe $C^2(\Omega)$ e $f \in C(\Omega)$, allora integrando per parti nella (17.14), otterremo che

$$-\int_\Omega (\Delta u)\phi dx = \int_\Omega f(\phi)dx \quad \forall \phi \in C_c^1(\Omega)$$

ossia

$$\int_\Omega (-\Delta u + f)\phi dx = 0$$

da cui, per il Lemma fondamentale del calcolo della variazioni,

$$-\Delta u(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Mettendo insieme all'informazione che $u = 0$ sul bordo seguirebbe che u è una soluzione classica.

Esempio 17.33. (Principio di Dirichlet) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, limitato, sia $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ e sia*

$$\mathcal{A}_\varphi(\Omega) := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\}.$$

Sia

$$\mathcal{D}(u) := \int_\Omega |Du|^2 dx.$$

Dimostriamo che esiste un unico $\bar{u} \in \mathcal{A}_\varphi(\Omega)$ tale che

$$\mathcal{D}(u) = \min_{\mathcal{A}_\varphi(\Omega)} Du(= m).$$

Infatti l'insieme $\mathcal{A}_\varphi(\Omega)$ è convesso, il funzionale $\mathcal{D} : \mathcal{A}_\varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ è convesso e

$$\lim_{||u|| \to \infty, u \in \mathcal{A}_\varphi(\Omega)} \mathcal{D}(u) = +\infty.$$

Infatti, applicando la disuguaglianza di Poincarè a $u - \varphi$, si ha che esiste $C = C(p, N, \Omega) > 0$ tale che

$$\sqrt{\mathcal{D}(u)} = ||Du||_2 \geq ||Du - D\varphi||_2 - ||D\varphi||_2 \geq C||u - \varphi||_{1,2} - ||D\varphi||_2$$
$$\geq C(||u||_{1,2} - ||\varphi||_{1,2}) - ||D\varphi||_2) \to \infty.$$

Essendo $W^{1,2}(\Omega)$ uno spazio riflessivo, applicando il Teorema di Weirstrass su spazi riflessivi, si conclude che esiste il minimo del funzionale $\mathcal{D}$ su $\mathcal{A}_\varphi(\Omega)$. Tale minimo è unico in quanto se *esistessero due funzioni $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{A}_\varphi(\Omega)$ punti di minimo allora $\bar{u} - \bar{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\frac{\bar{u}+\bar{v}}{2} \in \mathcal{A}_\varphi(\Omega)$. In particolare avremmo che*

$$\mathcal{D}(\bar{u} - \bar{v}) + \mathcal{D}(\bar{u} + \bar{v}) = 2\mathcal{D}(\bar{u}) + 2\mathcal{D}(\bar{v})$$

da cui

$$\mathcal{D}(\bar{u} - \bar{v}) + 4\mathcal{D}(\frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}) = 2\mathcal{D}(\bar{u}) + 2\mathcal{D}(\bar{v}) = 4m$$

Quindi

$$\mathcal{D}(\bar{u} - \bar{v}) = 4m - 4\mathcal{D}(\frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}) \leq 0.$$

Dalla Disuguaglianza di Poincarè si otterrebbe che $\bar{u} - \bar{v} = 0$.

17.5. **Il Teorema di Rellich-Kondrachov.** Senza ipotesi di regolaritá su Ω si prova il seguente

Teorema 17.34. *Sia $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e limitato, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora vale che*

1. *Se $1 \leq p < N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ con immersione compatta per ogni $1 \leq q < p^*$;*
2. *se $p = N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ con immersione compatta per ogni $N \leq q < +\infty$;*
3. *se $p > N$ allora*
$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$
con immersione compatta.

In particolare vale che

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

con inclusione compatta per ogni $1 \leq p < +\infty$.

Dimostrazione. Vediamo solo il caso $p > N$. Sia $(f_n)_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $||f_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Proviamo che esiste una sottosuccessione convergente uniformemente su $\overline{\Omega}$. Grazie al Teorema 17.28 (iii) , si ha che

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C||x - y||^\alpha ||f_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C||x - y||^\alpha$$

per ogni $x, y \in \overline{\Omega}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia $(f_n)_n$ é equicontinua su $\overline{\Omega}$. Inoltre dalla (17.11) si ha che

$$||f_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la successione $(f_n)_n$ verifica le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelá. Pertanto ammette una sottosuccessione convergente uniformente su $\overline{\Omega}$. □

Se aggungiamo un'ipotesi di regolaritá su Ω si ottiene il seguente risultato:

Teorema 17.35 (di Rellich-Kondrachov). *Sia $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato di classe C^1, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora*

1. *Se $1 \leq p < N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < p^*$*
2. *se $p = N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $N \leq q < +\infty$*
3. *se $p > N$ allora*
$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$

con immersioni compatte.

In particolare $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con immersione compatta per ogni $p \geq 1$.

Osservazione 17.36. Sia $1 \leq p < +\infty$. Allora

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\Omega),\ D_i f_n \rightharpoonup D_i f \text{ in } L^p(\Omega)\ \forall i.$$

(Un'implicazione segue dal fatto che l' applicazione $I : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ definita da $I(u) = u$ e le applicazioni $I_i : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ definite da $I_i(u) = D_i u$ sono continue forte-forte e quindi sono continue debole-debole. Viceversa: sia $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ e $Df_n \rightharpoonup Df$ in $L^p(\Omega)$. Per provare che $f_n \rightharpoonup f$ in $W^{1,p}(\Omega)$ dimostriamo che $Tf_n \to Tf$ per ogni $T \in (W^{1,p}(\Omega))'$. Sia

$T \in (W^{1,p}(\Omega))'$. Poiché $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \times ((L^p(\Omega))^N$ si ha che, per il Teorema di HB, esiste $\tilde{T} \in (L^p(\Omega) \times ((L^p(\Omega))^N)' = L^{p'}(\Omega) \times ((L^{p'}(\Omega))^N$ tale che $\tilde{T} = T$ su $W^{1,p}(\Omega)$. Poiché $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ e $Df_n \rightharpoonup Df$ in $L^p(\Omega)$, si ha che $\tilde{T}(f_n) \to \tilde{T}f$ ossia $Tf_n \to Tf$.)

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é un aperto di classe C^1, dal Teorema di Rellich, segue che

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow f_n \to f \text{ in } L^p(\Omega),\ D_i f_n \rightharpoonup D_i f \text{ in } L^p(\Omega)\ \forall i.$$

Analogamente se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é un aperto qualunque e se $1 \le p < +\infty$,

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow f_n \to f \text{ in } L^p(\Omega),\ D_i f_n \rightharpoonup D_i f \text{ in } L^p(\Omega)\ \forall i.$$