Appunti di Analisi Funzionale
per il corso di laurea in Matematica
Università di Ferrara
a.a. 2021–2022

[Ultimo aggiornamento: 1 dicembre 2021]

– – –

Damiano Foschi

– – –

Questi appunti, ancora in via di completamento, sono pensati come ausilio per gli studenti dell'insegnamento di *Analisi Funzionale* per l'anno accademico 2021–2022 per il corso di laurea magistrale in Matematica dell'università di Ferrara.

Indice

Parte 1

Materiale preliminare

CAPITOLO 1

Introduzione

Molti problemi matematici hanno come oggetto di studio delle funzioni; ad esempio: nelle equazioni differenziali le incognite sono funzioni, nel calcolo delle variazioni si cercano minimi di funzionali definiti su insiemi di funzioni, in meccanica quantistica lo stato di una particella è rappresentato da una funzione che descrive in termini probabilistici posizione e momento della particella.

Valutando proprietà di regolarità (continuità, differenziabilità, analiticità) e di sommabilità (integrabilità, decadimento all'infinito) si possono creare diverse classi di funzioni che solitamente formano degli spazi vettoriali di dimensione infinita.

In ogni spazio vettoriale di dimensione finita esiste un'unica topologia compatibile con la struttura lineare, che è poi quella indotta dalla struttura euclidea. In uno spazio vettoriale di dimensione infinita invece è possibile definire diverse strutture topologiche e diverse strutture metriche non equivalenti tra loro. In spazi vettoriali di funzioni succede dunque che nozioni topologiche o metriche, come la convergenza di successioni, la continuità di funzionali, la compattezza di sottoinsiemi, non possono essere date per scontate, ma dipendono dalla struttura topologica che si sceglie sullo spazio. L'Analisi Funzionale (lineare) è il campo della matematica che si occupa di studiare la struttura degli spazi vettoriali di dimensione infinita dotati di una struttura topologica compatibile con la struttura lineare e delle applicazioni lineari tra tali spazi.

1.1. Equazione di Poisson con dati al bordo di Dirichlet

Per comprendere come si possano manifestare i problemi a cui l'Analisi Funzionale cerca di dare risposta o ai quali cerca di offrire strumenti di indagine consideriamo consideriamo ad esempio il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

1.1.1. Principio di Dirichlet. Consideriamo un dominio Ω aperto e limitato in $\mathbb{R}^d$, con frontiera $\partial\Omega$ "sufficientemente regolare". Date una funzione continua $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definita su Ω e una funzione continua $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definita sul bordo $\partial\Omega$, ci poniamo il problema di determinare una funzione $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definita sulla chiusura $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ che risolva l'equazione di Poisson,

$$\Delta u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1}$$

e che assuma come valori al bordo quelli di g,

$$u(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Problemi di questo tipo si incontrano ad esempio nella determinazione del potenziale gravitazionale nella teoria Newtoniana della gravitazione, oppure nella determinazione del potenziale del campo elettrico in elettrostatica.

Con il simbolo Δ indichiamo il *Laplaciano* su $\mathbb{R}^d$, ovvero l'operatore differenziale del secondo ordine che si ottiene componendo l'operatore gradiente con l'operatore di divergenza:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla\cdot(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_d}^2}.$$

Ricordiamo anche che il *gradiente* di un campo scalare u è il campo vettoriale formato dalle derivate parziali di u,

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right);$$

mentre la *divergenza* di un campo vettoriale $V = (V_1, V_2, \dots, V_d)$ è il campo scalare ottenuto come traccia della matrice jacobiana di V,

$$\operatorname{div} V = \nabla\cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial V_d}{\partial x_d}.$$

Riguardo al problema (1)-(2), le tipiche domande a cui si può cercare di dare risposta possono riguardare: l'esistenza e l'unicità per la soluzione u; il legame tra le proprietà di regolarità della soluzione e quelle dei dati del problema Ω, f, g; la dipendenza della soluzione da piccole variazioni dei dati.

Proviamo ad occuparci del problema dell'esistenza di soluzioni. Siccome l'equazione (1) è una equazione differenziale del secondo ordine è naturale cercare soluzioni di classe C^2. Consideriamo allora l'insieme delle funzioni C^2 la cui traccia sul bordo di Ω coincide con la funzione g,

$$X_g := \left\{ v \in C^2(\overline{\Omega}) \colon v(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \right\}; \tag{3}$$

supponiamo anche che questo insieme X_g non risulti vuoto, ovvero assumiamo che esista almeno un prolungamento di g di classe C^2 su tutto il dominio $\overline{\Omega}$. Definiamo anche l'analogo insieme delle funzioni a traccia nulla,

$$X_0 := \left\{ v \in C^2(\overline{\Omega}) \colon v(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \right\}.$$

Supponiamo che $u \in X_g$ sia una soluzione dell'equazione di Poisson (1); per ogni funzione $h \in X_0$ avremo che

$$0 = \int_\Omega h(f - \Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega hf\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h\Delta u\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Per capire come manipolare l'ultimo integrale, apriamo una parentesi per ricordare cosa dice il teorema della divergenza e come da esso si può ottenere una formula di integrazione per parti per integrali multipli.

Teorema 1.1.1 (Teorema della divergenza). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Sia $V \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale di classe C^1. Allora*

$$\int_\Omega \nabla\cdot V\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} V\cdot n\,\mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

dove $n \colon \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ descrive il versore normale esterno ad Ω e $\mathrm{d}\sigma$ indica la misura $d-1$ dimensionale sull'ipersuperficie $\partial\Omega$.

Tale teorema si può anche estendere al caso in cui la frontiera sia C^1 a tratti, come ad esempio succede quando Ω è un dominio semplice o un dominio semplicemente decomponibile; più in generale si può estendere al caso in cui Ω sia un insieme misurabile con perimetro finito.

Se V è un campo vettoriale e h una funzione scalare, entrambi di classe C^1, dalla formula di Leibniz per la derivata del prodotto ricaviamo che

$$\nabla\cdot(hV) = (\nabla h)\cdot V + h\nabla\cdot V.$$

Mettendo il campo vettoriale hV al posto del campo V nella formula (5), usando la formula per la derivata del prodotto e usando la linearità dell'integrale, possiamo facilmente ricavare la seguente generalizzazione della formula di integrazione per parti

$$\int_\Omega h\nabla\cdot V\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} hV\cdot n\,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega (\nabla h)\cdot V\,\mathrm{d}x.$$

Quando $h \in X_0$ è una funzione che si annulla sulla frontiera del dominio e $V = \nabla u$ è il gradiente di una funzione scalare, abbiamo $\nabla\cdot V = \Delta u$ e la formula di integazione per parti diventa

$$\int_\Omega h\Delta u\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Torniamo ai nostri calcoli, se utilizziamo (6) la formula (4) diventa

$$\int_\Omega hf\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{7}$$

e vale per ogni funzione $h \in X_0$. Scegliamo ora $h = u - w$, dove w è una qualsiasi funione in X_g; la differenza di due funzioni in X_g appartiene a X_0 e dunque $h \in X_0$. La formula (7) diventa

$$\int_\Omega uf\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega wf\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla w)\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

e vale per ogni $w \in X_g$. Ora utilizziamo il fatto che un prodotto è sempre minore della media dei quadrati dei due fattori, e quindi in particolare

$$(\nabla w)\cdot(\nabla u) \leqslant \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2;$$

sostituendo questa disuguaglianza nell'ultimo integrale in (8) otteniamo

$$\int_\Omega uf\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega wf\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.$$

Introduciamo il *funzionale di Dirichlet* definito da

$$E(v) := \int_\Omega vf\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

I calcoli che abbiamo svolto ci dicono che se u è soluzione del problema (1)-(2) allora abbiamo $E(u) \leqslant E(w)$ per ogni $w \in X_g$ e dunque u è un punto di minimo in X_g per il funzionale E,

$$E(u) = \min_{w\in X_g} E(w).$$

Proviamo ora a fare il percorso inverso, supponiamo che ora u sia un punto di minimo in X_g per il funzionale di Dirichlet E. Abbiamo che

$$E(u) \leqslant E(u+th), \quad \forall h \in X_0,\, t\in\mathbb{R},$$

in quanto $u + th \in X_g$. Si verifica facilmente che una volta fissato $h \in X_0$ la quantità $E(u + th)$ è un polinomio di secondo grado in t,

$$\begin{aligned} E(u+th) &= \int_\Omega (u+th)f\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + t\nabla h|^2\,\mathrm{d}x = \\ &= E(u) + t\left(\int_\Omega hf\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}t^2\int_\Omega |\nabla h|^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

che assume il valore minimo $E(u)$ quando $t = 0$; dunque la derivata di tale polinomio si deve annullare per $t = 0$. Questo significa che

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} E(u+th) = \int_\Omega hf\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega h(f-\Delta u)\,\mathrm{d}x,$$

per ogni $h \in X_0$. Questo implica che la funzione continua $f - \Delta u$ deve essere identicamente nulla, e quindi u è una soluzione dell'equazione di Poisson. Ciò segue applicando a $f-\Delta u$ la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.1.2 (Lemma di annullamento). *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^d$. Se $\int_\Omega fh\,\mathrm{d}x = 0$ per ogni funzione test $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ che sia continua e con supporto compatto contenuto in Ω, allora f è identicamente nulla su Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Se in un punto $p \in \Omega$ avessimo $f(p) > 0$, essendo f continua per il principio di permanenza del segno avremmo che esiste un intorno U di p e contenuto in Ω nel quale si ha $f(x) > 0$. Scegliamo ora una funzione h che sia continua, non negativa, con supporto compatto contenuto in U e con $h(p) > 0$, avremmo allora una contraddizione in quanto risulterebbe

$$0 = \int_\Omega fh\,\mathrm{d}x = \int_U fh\,\mathrm{d}x > 0.$$

Una cosa analoga si verifica se si suppone $f(p) < 0$. □

Riassumiamo nella seguente proposizione quello che abbiamo ottenuto dai calcoli effettuati in questa sezione.

PROPOSIZIONE 1.1.3 (Principio di Dirichlet). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare e sia $u \in X_g = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\colon u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega\}$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(A) *u è soluzione dell'equazione di Poisson su Ω,*

$$\Delta u = f;$$

(B) *per ogni $h \in X_0$ si ha che*

$$\int_\Omega hf\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla h)\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x = 0;,$$

(C) *u è un punto di minimo per il funzionale di Dirichlet su X_g,*

$$E(u) = \min_{w\in X_g} E(w), \quad E(v) := \int_\Omega vf\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x.$$

Abbiamo così mostrato come lo studio di un'equazione differenziale sia equivalente allo studio di un problema di minimo di un funzionale. Osserviamo inoltre che nella formulazione dei punti (B) e (C) le derivate seconde di u non appaiono da nessuna parte; questo fatto ci permette di formulare un concetto più *debole* di soluzione dell'equazione del punto (A). Per esprimere le proposizioni (B) o (C) ci basta infatti imporre condizioni solo sulle derivate prime, richiedendo che $u, \nabla u \in L^2(\Omega)$, ovvero che u sia una funzione appartenente allo *spazio di Sobolev* $H^1(\Omega)$.

1.1.2. Problemi di minimo e proprietà topologiche. Uno strumento elementare e fondamentale per ottenere l'esistenza soluzioni a problemi di minimo ci è offerto dal Teorema di Weierstrass.

TEOREMA 1.1.4 (Weierstrass). *Sia $E\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su uno spazio topologico compatto X. Allora esiste un punto dello spazio X in cui la funzione E assume il suo valore minimo,*

$$\exists p \in X : E(p) = \min_X E.$$

OSSERVAZIONE 1.1.5. Anche se il dominio X non è compatto, per avere l'esistenza di un punto di minimo per E è sufficiente che esista un insieme di sottolivello $X(\alpha) := \{x \in X \colon E(x) \leqslant \alpha\}$ che sia compatto, per almeno un $\alpha > \inf_X E$. In tal caso basta applicare il teorema di Weierstrass alla restrizione di E al sottoinsieme $X(\alpha)$.

Le nozioni di spazio compatto e di funzione continua sono proprietà topologiche. Per poter utilizzare il teorema di Weierstrass è necessario aver chiaro quale topologia si assume sul dominio X della funzione.

Quando X è un dominio contenuto in uno spazio vettoriale V di dimensione finita il problema non si pone, in quanto su V esiste un'unica topologia compatibile con la struttura lineare, ovvero una topologia rispetto alle quali le operazioni di somma di vettori e di prodotto di uno scalare per un vettore risultano essere continue. In tal caso sappiamo che gli insiemi compatti coincidono con gli insiemi chiusi e limitati (teorema di Heine-Borel).

L'insieme X_g, definito in (3) e sul quale ci interessa minimizzare il funzionale di Dirichlet definito in (9), è un sottoinsieme dello spazio vettoriale di dimensione infinita $C^2(\overline{\Omega})$. In uno spazio di dimensione infinita ci possono essere modi diversi, non equivalenti, di definire distanze tra punti e modi diversi di definire topologie sullo spazio. Più una topologia su uno spazio è ricca di aperti e più è facile che siano continue le funzioni che hanno come dominio tale spazio, d'altra parte più è grande la famiglia degli aperti e meno compatti ci sono sullo spazio. Quindi per poter applicare il teorema di Weierstrass è cruciale avere una topologia sufficientemente ricca di aperti per avere continuità dei funzionali che si vuole minimizzare e sufficientemente povera di aperti per avere compattezza del domini sui quali si vogliono considerare tali funzionali.

La compattezza di uno spazio richiede necessariamente anche completezza metrica o topologica, e spesso capita, come ad esempio nel caso di X_g, che la norma più adeguata per misurare le distanze tra punti produca una struttura metrica rispetto alla quale lo spazio non risulta essere completo, mancano punti limite di successioni che dovrebbero essere convergenti. Risulta necessario allora trovare ambienti più completi in cui immergere il problema di partenza. Ecco così che emergono spazi funzionali nuovi: ad ogni modo di "misurare" le proprietà di regolarità o di integrabilità delle funzioni corrisponderà uno spazio funzionale nuovo, completo e adattato a quel tipo di misura.

Uno degli scopi principali del corso di Analisi Funzionale sarà proprio quello di esaminare le proprietà metriche e topologiche che vengono determinate su uno spazio vettoriale dalla scelta di una norma o dalla scelta di una famiglia di seminorme, facendo particolare attenzione alle proprietà di compattezza e completezza dello spazio e alle proprietà di continuità dei funzionali definiti su tale spazio.

1.1.3. Esistenza di soluzioni tramite dualità. Consideriamo il problema (1)-(2) con dati al bordo nulli, $g(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. In tal caso $X_g = X_0$ risulta essere un sottospazio vettoriale di $C^2(\overline{\Omega})$. Il punto (B) della proposizione 1.1.3 ci dice che $u \in X_0$ è una soluzione se e solo se per ogni $h \in X_0$ abbiamo

$$-\int_\Omega f h \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \,\mathrm{d}x.$$

L'applicazione bilineare che alla coppia (u, h) associa $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \,\mathrm{d}x$ risulta essere un prodotto scalare su X_0, che indichiamo con

$$\langle u, h \rangle_{X_0} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Il punto cruciale per dimostrare che si tratta effettivamente di un prodotto scalare è quello di verificare che il prodotto sia non degenere, e ciò viene garantito come conseguenza della seguente disuguaglianza.

PROPOSIZIONE 1.1.6 (Disuguaglianza di Poincaré). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$. Esiste una costante positiva $C_\Omega > 0$ tale che per ogni $g \in C^1(\overline{\Omega})$ che si annulla sulla frontiera, $g(x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$, si ha che*

$$\int_\Omega |g|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant C_\Omega \int_\Omega |\nabla g|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Ogni prodotto scalare induce una norma, e quindi X_0 risulta essere uno spazio normato con norma data da

$$\|g\|_{X_0} := \sqrt{\langle g, g\rangle_{X_0}} = \left(\int_\Omega |\nabla g|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

L'applicazione $L\colon X_0 \to \mathbb{R}$, definita da

$$L(h) := -\int_\Omega fh \, \mathrm{d}x,$$

è un funzionale *lineare* su X_0, e sempre per la disuguaglianza di Poincaré risulta essere *continuo*; infatti, applicando prima la disuguaglianza di Hölder e poi quella di Poincaré, troviamo che

$$|L(h)| \leqslant \int_\Omega |fh| \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |h|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega \left(\int_\Omega |\nabla h|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} = C \|h\|_{X_0},$$

con $C = C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Il problema di Dirichlet con dati al bordo nulli per l'equazione di Poisson diventa allora equivalente a quello di determinare un elemento $u \in X_0$ tale che

$$L(h) = \langle u, h\rangle_{X_0}, \quad \forall h \in X_0. \tag{11}$$

Per ogni $v \in X_0$ l'applicazione $h \mapsto \langle v, h\rangle_{X_0}$ è sempre un funzionale lineare e continuo da X_0 a $\mathbb{R}$, ovvero un elemento dello spazio X_0' duale (topologico) di X_0. Se tutti i funzionali lineari e continui su X_0 avessero questa forma allora il funzionale lineare e continuo $h \mapsto L(h)$ sarebbe rappresentato nella forma (11) per una soluzione u del problema. Un importante risultato della teoria degli spazi di Hilbert ci dice che se X_0 fosse completo allora tutti i funzionali lineari e continui su X_0 sarebbero rappresentati da prodotti scalari

TEOREMA 1.1.7 (Teorema di rappresentazione di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert e $L \in H'$ un funzionale lineare e continuo su H. Allora esiste, ed è unico, un elemento $u \in H$ tale che*

$$L(h) = \langle h, u\rangle, \quad \forall h \in H.$$

Purtroppo lo spazio X_0 con il prodotto scalare (10) non è uno spazio completo. Il completamento di X_0 rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare (10) non è altro che lo *spazio di Sobolev* $H_0^1(\Omega)$, ed esso, grazie al teorema di Riesz, rappresenta lo spazio più adatto per trovare la soluzione cercata al nostro problema. Gli spazi di Sobolev e le loro applicazioni per la risoluzione di problemi di equazioni alle derivate parziali saranno l'oggetto di studio della parte finale del corso.

OSSERVAZIONE 1.1.8. Facciamo notare come in questo approccio l'attenzione si sia spostata dallo spazio X_0 allo spazio duale X_0' dei funzionali lineari e continui su X_0. E la chiave di volta per la risoluzione del problema formulato in certo spazio è data da una buona rappresentazione degli elementi dello spazio duale. Possiamo riassumere sinteticamente il *principio di dualità* dell'analisi funzionale lineare dicendo che "possiamo conoscere completamente un elemento di un certo spazio leggendolo attraverso l'azione dei funzionali lineari (continui) su di esso".

1.1.4. Esercizi.

ESERCIZIO 1.1.9. Sia $]a, b[$ un intervallo aperto e limitato. Sia $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano $A, B \in \mathbb{R}$. Ricava delle formule esplicite che descrivano la soluzione $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson in dimensione 1 descritto da:

$$u''(x) = f(x), \, \forall x \in]a, b[, \quad u(a) = A, \, u(b) = B.$$

ESERCIZIO 1.1.10. Dimostra il teorema della divergenza, e quindi la formula (5), nei casi di dimensione $d = 1, 2, 3$, per domini di integrazione sufficientemente semplici e regolari. *[Si tratta di andare a ripassare cose già viste nei corsi di analisi matematica dei primi due anni.]*

ESERCIZIO 1.1.11. Dimostra che la soluzione del problema (1)-(2), se esiste, è unica. *[Prova a studiare prima il caso in cui $f = 0$.]*

Esercizio 1.1.12. Prova a riformulare il principio di Dirichlet per per il problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta u + \lambda u = f$. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ è possibile mostrare l'equivalenza con un problema di minimo? Quale forma assume il funzionale di Dirichlet in questo caso?

Esercizio 1.1.13. Dimostra la disuguaglianza di Poincaré nel caso unidimensionale in cui $\Omega =]a, b[$ è un intervallo limitato della retta reale. *[Si dimostra facilmente utilizzando il teorema fondamentale del calcolo.]*

CAPITOLO 2

Strutture topologiche e metriche

2.1. Spazi topologici

2.1.1. Unioni e intersezioni di insiemi. Dato un insieme X indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ il suo *insieme delle parti*, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X.

Data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi indichiamo con $\cup\mathcal{F}$ e $\cap\mathcal{F}$, rispettivamente, l'*unione* e l'*intersezione* di tutti gli insiemi che sono elementi di $\mathcal{F}$:

$$\cup\mathcal{F} := \{x \colon \exists E \in \mathcal{F} : x \in E\}, \quad \cap\mathcal{F} := \{x \colon \forall E \in \mathcal{F} : x \in E\}.$$

Quando $\mathcal{F} = \{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ è una famiglia di insiemi indicizzati rispetto ad un insieme di indici I scriveremo

$$\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha := \cup\mathcal{F} = \{x \colon \exists \alpha \in I : x \in E_\alpha\}, \quad \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha := \cap\mathcal{F} = \{x \colon \forall \alpha \in I : x \in E_\alpha\}.$$

Usando la famiglia stessa $\mathcal{F}$ come insieme per indicizzare i suoi elementi allora avremo che

$$\cup\mathcal{F} = \bigcup_{E\in\mathcal{F}} E, \quad \cap\mathcal{F} = \bigcap_{E\in\mathcal{F}} E.$$

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X; ricordiamo che valgono le *leggi di De Morgan* per i complementari di unioni e intersezioni: il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, e il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari,

$$X \setminus \bigcup_{E\in\mathcal{F}} E = \bigcap_{E\in\mathcal{F}} (X \setminus E), \quad X \setminus \bigcap_{E\in\mathcal{F}} E = \bigcup_{E\in\mathcal{F}} (X \setminus E). \tag{12}$$

Vale la legge distributiva sia per l'intersezione rispetto all'unione che per l'unione rispetto all'intersezione: data una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ e un insieme B abbiamo

$$\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\Big) \cap B = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} (A \cap B), \quad \Big(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\Big) \cup B = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} (A \cup B). \tag{13}$$

2.1.2. Topologie di aperti e chiusi.

Definizione 2.1.1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diciamo che la famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X definisce una *topologia* su X, e chiameremo *aperto* ogni elemento di $\mathcal{A}$, quando sono verificate le seguenti proprietà:

(a) l'insieme vuoto e tutto l'insieme X sono aperti: $\varnothing, X \in \mathcal{A}$;
(b) l'unione di qualsiasi famiglia di aperti è un aperto: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \implies \cup\mathcal{F} \in \mathcal{A}$;
(c) l'intersezione di due aperti è un aperto: $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.

La coppia $(X, \mathcal{A})$ si dice allora *spazio topologico*.

Esempio 2.1.2. Sia X un insieme qualsiasi.

(1) La famiglia $\mathcal{A} := \{\varnothing, X\}$, per la quale solo il vuoto e tutto l'insieme X sono aperti, è una topologia su X. Si tratta della topologia più povera di aperti che si possa definire sull'insieme X e viene detta *topologia banale* su X.
(2) La famiglia $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$, per la quale tutti i sottoinsiemi di X sono aperti, è una topologia su X. Si tratta della topologia più ricca di aperti che si possa definire sull'insieme X e viene detta *topologia discreta* su X.

Esempio 2.1.3 (Topologia euclidea su $\mathbb{R}$). La topologia usuale che si considera sulla retta reale $\mathbb{R}$ è quella che deriva dalla struttura *euclidea* della retta. Possiamo descriverla definendo come insieme aperto ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ con la seguente proprietà: per ogni punto $p \in E$ esiste un intervallo aperto $]a, b[$ tale che $p \in]a, b[\subseteq E$.

ESEMPIO 2.1.4 (Topologia della retta reale estesa). Sulla retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

possiamo estendere la topologia euclidea della retta reale definendo come aperto ogni sottoinsieme $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ con le seguenti proprietà:

- $E \cap \mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$;
- se $-\infty \in E$ allora esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, r[\subseteq E$;
- se $+\infty \in E$ allora esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che $]r, +\infty] \subseteq E$.

In uno spazio topologico $(X, \mathcal{A})$ definiamo *chiuso* ogni sottoinsieme di X che sia il complemetare di un aperto. Si verifica facilmente, utilizzando le leggi di De Morgan (12), che la famiglia $\mathcal{C} := \{E \subseteq X : X \setminus E \in \mathcal{A}\}$ degli insiemi chiusi di X è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

(a) l'insieme vuoto e tutto l'insieme X sono chiusi: $\varnothing, X \in \mathcal{C}$;
(b) l'intersezione di qualsiasi famiglia di chiusi è un chiuso: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C} \implies \cap\mathcal{F} \in \mathcal{C}$;
(c) l'unione di due chiusi è un chiuso: $A, B \in \mathcal{C} \implies A \cup B \in \mathcal{C}$.

OSSERVAZIONE 2.1.5. Dalle proprietà (c) delle famiglie degli aperti e dei chiusi segue, per induzione, che:

- l'intersezione di una qualsiasi famiglia composta da un numero *finito* di aperti è un aperto;
- l'unione una qualsiasi famiglia composta da un numero *finito* di chiusi è un chiuso.

L'intersezione di una famiglia infinita di aperti può non essere aperta; ad esempio l'intersezione di tutti gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ della forma $]-r, r[$ con $r > 0$ è il singoletto $\{0\}$ che non è aperto in $\mathbb{R}$. L'unione di una famiglia infinita di chiusi può non essere chiusa; ad esempio l'unione di tutti gli intervalli chiusi di $\mathbb{R}$ della forma $[-r, r]$ con $0 < r < 1$ è l'intervallo $]-1, 1[$ che non è chiuso in $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 2.1.6. In uno spazio topologico X possono esistere sottoinsiemi che sono sia aperti che chiusi, ad esempio $\varnothing$ e X. Nella topologia discreta tutti i sottoinsiemi sono sia aperti che chiusi. Possono anche esistere sottoinsiemi che non sono ne aperti ne chiusi, ad esempio gli intervalli della forma $[a, b[$ in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 2.1.7. Sia X uno spazio topologico, sia p un punto di X e sia E un sottoinsieme di X. Diciamo che:

- il punto p è *interno* ad E quando esiste un aperto A tale che $p \in A$ e $A \subseteq E$, in tal caso diremo anche che E è un *intorno* di p;
- il punto p è *esterno* ad E quando p è interno al complementare di E, ovvero quando esiste un aperto A tale che $p \in A$ e $A \cap E = \varnothing$;
- il punto p è di *frontiera* per E quando p non è né interno né esterno ad E, ovvero quando ogni aperto che contiene p contiene sia punti di E che punti del complementare di E;
- il punto p è *aderente* ad E quando non è esterno ad E, ovvero quando è interno ad E oppure di frontiera per E;
- il punto p è di *accumulazione* per E quando ogni intorno A di p contiene punti di E diversi da p, ovvero $A \cap E \setminus \{p\} \neq \varnothing$;
- il punto p è un punto *isolato* di E quando $p \in E$ ed esiste un intorno A di p che isola p dagli altri punti di E, nel senso che $A \cap E = \{p\}$.

Indichiamo con $\mathring{E}$ l'insieme dei punti interni di E, detto *interno* di E; indichiamo con ∂E l'insieme dei punti di frontiera di E, detto *frontiera* di E; indichiamo con $\overline{E}$ l'insieme dei punti aderenti ad E, detto *chiusura* di E; indichiamo con DE l'insieme dei punti di accumulazione per E, detto *derivato* di E.

L'interno $\mathring{E}$ è un aperto e coincide con l'unione di tutti gli aperti contenuti in E, ovvero è il più grande aperto contenuto in E. La chiusura $\overline{E}$ è un chiuso e coincide con l'intersezione di tutti i chiusi che contengono E, ovvero è il più piccolo chiuso che contiene E.

ESEMPIO 2.1.8 ($D\mathbb{N} = \{+\infty\}$). Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali come un sottoinsieme della retta reale estesa $\mathbb{R}$. Osserviamo che ogni $n \in \mathbb{N}$ è un punto isolato di $\mathbb{N}$ in quanto l'intervallo aperto $]n-1, n+1[$ non contiene punti di $\mathbb{N}$ diversi da n. Ogni intorno di $+\infty$ contiene una semiretta della forma $]r, +\infty]$ per qualche $r \in \mathbb{R}$ e dunque contiene tutti i numeri naturali maggiori di r, dunque $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Ogni altro punto di $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{N}$ diverso da $+\infty$ possiede un intorno aperto che non contiene alcun punto di $\mathbb{N}$. Dunque l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$.

DEFINIZIONE 2.1.9. Un sottoinsieme E si dice *denso* in un uno spazio topologico$X$ quando la chiusura di E coincide con tutto lo spazio, $\overline{E} = X$, e dunque ogni punto di X è aderente ad E, ovvero quando ogni insieme aperto A contiene punti di E.

Ad esempio l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è denso sulla retta euclidea $\mathbb{R}$.

Una proprietà desiderabile su uno spazio topologico è che la famiglia di aperti permetta di distinguere e separare bene i punti dello spazio.

DEFINIZIONE 2.1.10. Uno spazio topologico $(X, \mathcal{A})$ si dice *separato*, o *spazio di Hausdorff*, quando per ogni coppia di punti distinti esiste una coppia di loro intorni aperti disgiunti:

$$p, q \in X,\, p \neq q \implies \exists U, V \in \mathcal{A} :\, p \in U,\, q \in V,\, U \cap V = \varnothing.$$

Sia X un insieme con almeno due elementi; se dotato della topologia banale $\{\varnothing, X\}$ l'insieme X non è mai uno spazio di Hausdorff, mentre se dotato della topologia discreta $\mathcal{P}(X)$ l'insieme X è sempre uno spazio di Hausdorff.

ESEMPIO 2.1.11. La retta euclidea $\mathbb{R}$ è uno spazio di Hausdorff: se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \neq y$ allora x e y sono separati dagli intervalli aperti $]x - r, x + r[$ e $]y - r, y + r[$ quando $0 < r < |x - y|/2$.

PROPOSIZIONE 2.1.12. *In uno spazio di Hausdorff ogni sottoinsieme formato da un solo punto è sempre chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $p \in X$. Per ogni punto $q \in X$ che sia diverso da p esiste un intorno aperto di q che non contiene p, dunque q è esterno a $\{p\}$. Ciò significa che il complementare di $\{p\}$ è aperto e dunque $\{p\}$ è chiuso. □

2.1.3. Basi di intorni e di basi di aperti.

DEFINIZIONE 2.1.13. Una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinisiemi di uno spazio topologico $(X, \mathcal{A})$ si dice che forma una *base di aperti* per la topologia quando ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un aperto e ogni aperto $A \in \mathcal{A}$ si può ottenere come unione di elementi $\mathcal{B}$:

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$;
- per ogni $A \in \mathcal{A}$ esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \cup\mathcal{F}$.

Dalla definizione segue facilmente la seguente caratterizzazione di una base di aperti.

PROPOSIZIONE 2.1.14. *Una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti risulta essere una base di aperti per la topologia $\mathcal{A}$ se e solo se per ogni aperto $A \in \mathcal{A}$ e per ogni punto $p \in A$ esiste un aperto $B \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B \subseteq A$.*

ESEMPIO 2.1.15. Una base per la topologia euclidea di $\mathbb{R}$ è data dalla famiglia di tutti gli intervalli aperti $\mathcal{B} := \big\{]a, b[:\, a, b \in \mathbb{R}, a < b\big\}$.

Possiamo localizzare il concetto di base.

DEFINIZIONE 2.1.16. Una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico $(X, \mathcal{A})$ si dice che forma un *sistema fondamentale di intorni (aperti)* per il punto $p \in X$, quando

- ogni $U \in \mathcal{U}$ è un intorno aperto del punto p;
- per ogni intorno aperto A del punto p esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $U \subseteq A$.

ESEMPIO 2.1.17. Un sistema fondamentale di intorni per un punto $p \in \mathbb{R}$ sulla retta euclidea è dato dalla famiglia di intervalli aperti $\mathcal{U} := \big\{]p - \varepsilon, p + \varepsilon[:\, \varepsilon > 0\big\}$.

PROPOSIZIONE 2.1.18. *Sia $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di un punto p. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo*

$$V_n := \bigcap_{k=1}^{n} U_k.$$

Allora $\mathcal{V} := (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale numerabile di intorni di un punto p con la proprietà che $V_{n+1} \subseteq V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE. Ogni V_n è un intorno di p, in quanto l'intersezione di un numero finito di intorni di p è un intorno di p. Se A è un intorno aperto di p, per ipotesi, esiste $n \in \mathbb{N}$ per il quale si ha $U_n \subseteq A$; siccome $V_n \subseteq U_n$, avremo anche che $V_n \subseteq A$. Infine, osserviamo che

$$V_{n+1} = U_{n+1} \cap V_n \subseteq V_n.$$

□

DEFINIZIONE 2.1.19. Uno spazio topologico X si dice che è $\mathcal{N}_1$, o *primo-numerabile*, quando ogni punto di X possiede un sistema fondamentale numerabile di intorni.

Esempio 2.1.20. La retta euclidea è uno spazio $\mathcal{N}_1$: se $r \in \mathbb{R}$ allora la famiglia di intervalli
$$\mathcal{U} := \big\{]r - 1/n, r + 1/n[\, : n \in \mathbb{N} \big\}$$
forma un sistema fondamentale numerabile di intorni di r.

Non tutti gli spazi topologici sono $\mathcal{N}_1$.

Definizione 2.1.21. Sia X un insieme infinito. Definiamo su X la topologia *cofinita* come la topologia per la quale i chiusi sono tutti e soli i sottoinsiemi finiti, oltre a X stesso. Con tale topologia X non è uno spazio di Hausdorff, in quanto due insiemi aperti non vuoti non sono mai disgiunti.

Proposizione 2.1.22. *L'insieme dei numeri reali (o anche qualsiasi insieme non numerabile) dotato della topologia cofinita non è uno spazio $\mathcal{N}_1$.*

Dimostrazione. Sia $p \in \mathbb{R}$ e sia $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di intorni di p aperti nella topologia cofinita. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, avremo che il chiuso $C_n := \mathbb{R} \setminus U_n$ è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$; L'insieme numerabile
$$E := \{p\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$
è quindi numerabile. Siccome $\mathbb{R}$ non è numerabile, esisterà un punto $q \in \mathbb{R}$ che non appartiene ad E. L'aperto $A := \mathbb{R} \setminus \{q\}$ contiene p, ma nessuno degli U_n è contenuto in A, in quanto $\{q\}$, che è il complementare di A, non è contenuto in C_n, che è il complementare di U_n. Dunque $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non costituisce un sistema fondamentale di intorni per p. □

Definizione 2.1.23. Uno spazio topologico X si dice che è $\mathcal{N}_2$, o *secondo-numerabile*, quando esiste una base numerabile di aperti.

Esempio 2.1.24. La retta euclidea è uno spazio $\mathcal{N}_2$: la famiglia di intervalli
$$\mathcal{B} := \big\{]p, q[\colon p, q \in \mathbb{Q} \big\}$$
forma una base numerabile di aperti. Ciò segue dal fatto che ogni intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene punti di Q, e dunque se $r \in]a, b[$, con $a, b, r \in R$, è sempre possibile trovare $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p \in]a, r[$ e $q \in]r, b[$, e dunque $r \in]p, q[$.

Proposizione 2.1.25. *Ogni spazio topologico $\mathcal{N}_2$ è uno spazio topologico $\mathcal{N}_1$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di aperti per la topologia. Fissato un punto p, consideriamo la famiglia $\mathcal{U} := \{B \in \mathcal{B} \colon p \in B\}$ degli aperti della base $\mathcal{B}$ che sono intorno di p. Sia A un intorno aperto di p, siccome $\mathcal{B}$ è una base di aperti abbiamo che A è unione di aperti di $\mathcal{B}$ e dunque esisterà almeno un aperto $B \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B \subseteq A$ e dunque $B \in \mathcal{U}$; questo prova che $\mathcal{U}$ è un sistema fondamentale di intorni. Abbiamo che $\mathcal{U}$ è al più numerabile, essendo contenuto in $\mathcal{B}$. □

Definizione 2.1.26. Uno spazio topologico si dice che è *separabile* quando possiede un sottoinsieme denso e numerabile.

Esempio 2.1.27. La retta euclidea $\mathbb{R}$ è separabile in quanto l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile ed è denso in $\mathbb{R}$. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con la topologia discreta invece non è separabile, in quanto ogni sottoinsieme è chiuso e l'unico insieme denso è tutto $\mathbb{R}$ che non è numerabile.

Proposizione 2.1.28. *Ogni spazio topologico $\mathcal{N}_2$ è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di aperti non vuoti. Per ogni $B \in \mathcal{B}$ scegliamo un punto $q_B \in B$. Per ogni aperto A non vuoto esiste almeno un aperto $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subseteq A$, e quindi $q_B \in A$. Ciò significa che l'insieme numerabile $\{q_B \colon B \in \mathcal{B}\}$ è denso in tutto lo spazio. □

2.1.4. Funzioni continue e limiti.

Definizione 2.1.29. Siano $(X, \mathcal{A}_X)$ e $(Y, \mathcal{A}_Y)$ due spazi topologici. Una funzione $f \colon X \to Y$ si dice *continua* (su X) quando la controimmagine di un aperto di Y è sempre un aperto di X,
$$A \in \mathcal{A}_Y \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X.$$
Ciò equivale anche a dire che la controimmagine di un chiuso di Y è sempre un chiuso di X.

Grazie a questa definizione puramente insiemistica è immediato verificare cche la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

Quando si ha a disposizione una base per la topologia su Y per caratterizzare la continuità è sufficiente considerare solo le controimmagini degli aperti della base.

PROPOSIZIONE 2.1.30. *Sia $\mathcal{B}$ una base di aperti per la topologia $\mathcal{A}_Y$ di Y. Allora $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se per ogni aperto $B \in \mathcal{B}$ si ha che $f^{-1}(B)$ è un aperto di X.*

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dal fatto che la controimmagine di una unione coincide con l'unione delle controimmagini,

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B\Big) = \bigcup_{B\in\mathcal{F}} f^{-1}(B).$$

□

OSSERVAZIONE 2.1.31. Il fatto che una funzione sia continua non dipende solo da come agisce la funzione, ma anche dalla topologia che si sceglie sia sul dominio che sul codominio. È più facile avere funzioni continue quando il dominio è ricco di aperti e il codominio è povero di aperti. Se su X mettiamo la topologia discreta, tutte le funzioni con dominio X risultano essere continue. Se su Y mettiamo la topologia banale, tutte le funzioni con codominio Y risultano essere continue.

Possiamo localizzare la nozione di continuità.

DEFINIZIONE 2.1.32. Siano X e Y due spazi topologici e sia $p \in X$. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *continua nel punto* p quando per ogni intorno aperto V del punto $f(p)$ in Y esiste un intorno aperto U del punto p in X tale che $f(U) \subseteq V$; ciò equivale a dire che p è interno alla controimmagine di qualsiasi intorno di $f(p)$.

PROPOSIZIONE 2.1.33. *Una funzione $f\colon X \to Y$ è continua su X se e solo se è continua in ogni punto $p \in X$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia f continua su X. Fissato $p \in X$, per ogni intorno aperto V di $f(p)$ abbiamo che $U := f^{-1}(V)$ è un intorno aperto di p e $f(U) \subseteq V$. Dunque f è continua in p.

Viceversa, sia f continua in ogni punto di X. Fissato un aperto A in Y, per ogni punto $p \in f^{-1}(A)$, siccome A è intorno aperto di $f(p)$, avremo che esiste un intorno aperto U_p di p tale che $f(U_p) \subseteq A$ e dunque $p \in U_p \subseteq f^{-1}(A)$. Dunque $f^{-1}(A)$ è formato solo da punti interni e quindi è un aperto in X. □

Quando una certà proprietà di funzioni continue è valida su un sottoinsieme denso del dominio grazie alla continuità è possibile estenderla a tutto il dominio. Ad esempio, il seguente lemma risulterà molto utile nel seguito:

PROPOSIZIONE 2.1.34. *Siano X e Y due spazi topologici, con Y di Hausdorff. Siano $f, g\colon X \to Y$ due funzioni continue. Sia D un sottoinsieme denso in X. Se si ha che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in D$ allora f coincide con g su tutto X.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che l'insieme $C := \{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di X, per cui, dalle ipotesi avremo che $D \subseteq C$ e dunque $X = \overline{D} \subseteq \overline{C} = C \subseteq X$, ovvero $C = X$.

Per vedere che C è chiuso osserviamo che $x \in C$ se e solo se esiste $q \in Y$ tale che $f(x) = q$ e $g(x) = q$, ovvero $x \in C_q$, dove

$$C_q := f^{-1}(\{q\}) \cap g^{-1}(\{q\})$$

è un sottoinsieme di X che è chiuso per la continuità di f e di g e per il fatto che, essendo Y Hausdorff, il singoletto $\{q\}$ è chiuso in Y. Dunque abbiamo che

$$C = \bigcup_{q\in Y} C_q$$

è un chiuso i quanto unione di chiusi. □

Usando la nozione di intorni aperti e di punto di accumulazione possiamo dare una definizione topologica di limite di una funzione.

DEFINIZIONE 2.1.35. Siano X e Y due spazi topologici. Sia $E \subseteq X$. Sia $p \in X$ un punto di accumulazione per E e sia $\ell \in Y$. Data una funzione $f\colon E \to Y$ diciamo che $f(x)$ *tende al limite* ℓ *per* x *che tende a* p, ed useremo le scritture

$$f(x) \underset{x\to p}{\longrightarrow} \ell, \qquad \lim_{x\to p} f(x) = \ell,$$

quando per ogni intorno aperto V di ℓ in Y esiste un intorno aperto U di p in X tale che per ogni $x \in E \cap U \setminus \{p\}$ si ha che $f(x) \in V$.

Osservazione 2.1.36. Per poter parlare di "limite" di $f(x)$ per $x \to p$ è necessario che la variabile x si possa avvicinare al punto p muovendosi dentro al dominio E della funzione, e dunque p deve necessariamente essere un punto di accumulazione per E; se non lo fosse, esisterebbe un intorno U di p tale che $E \cap U \setminus \{p\} = \varnothing$, e il contenuto della definizione di limite sarebbe privo di significato.

Confrontando la definizione di continuità con quella di limite abbiamo che una funzione è sempre continua nei punti isolati e coincide con il valore dei suoi limiti nei punti di accumulazione del suo dominio.

Proposizione 2.1.37. *Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra due spazi topologici. Sia $p \in X$ Allora f è continua in p se e solo se p è un punto isolato di X oppure* $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Dimostrazione. Quando p è un punto isolato di X ogni controimmagine di un intorno di $f(p)$ è sempre un intorno di p, dunque f è continua in p.

Supponiamo che p non sia un punto isolato, e dunque p è un punto di accumulazione per X. Se f è continua in p, dalla definizione di continuità puntuale segue immediatamente che $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$. Viceversa se $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ significa che per ogni intorno aperto V di $f(p)$ esiste un intorno aperto U di p tale che $f^{-1}(V) \supseteq U \setminus \{p\}$, ma p appartiene naturalmente a $f^{-1}(V)$, e dunque $f^{-1}(V)$ è un intorno di p; dunque f è continua in p. □

Quando si ha che $\lim_{x\to p} f(x) = q$ e $\lim_{y\to q} g(y) = \ell$ è naturale aspettarsi che per la funzione composta si abbia $\lim_{x\to p} g(f(x)) = \ell$. Ciò non è sempre vero. Si consideri ad esempio le seguenti funzioni,

$$f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \begin{cases} 2, & \text{se } y \neq 1, \\ 3, & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

Abbiamo $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{y\to 1} g(y) = 2$, ma $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 3 \neq 2$. Il problema nasce dal fatto che g non è continua nel punto corrispondente al valore limite di f e a sua volta f assume il suo valore limite in ogni intorno forato del punto in cui si fa il limite. Ecco allora che per evitare questi controesempi patologici dobbiamo introdurre alcune ipotesi aggiuntive.

Teorema 2.1.38 (Limite di funzioni composte). *Siano X, Y, Z tre spazi topologici. Date due funzioni, $f\colon A \to Y$ e $g\colon B \to Z$, con $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, tali che l'insieme $\widetilde{A} := \{x \in A\colon f(x) \in B\}$ è non vuoto, possiamo considerare la funzione composta $g \circ f\colon \widetilde{A} \to Z$, definita da $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Sia p un punto di accumulazione per $\widetilde{A}$ (e quindi anche per A), sia q un punto di accumulazione per B e sia $\ell \in Z$. Supponiamo che valgano i limiti*

$$\lim_{x\to p} f(x) = q, \quad \lim_{y\to q} g(y) = \ell$$

ed che inoltre valga almeno una delle seguenti due condizioni:

(C1) *$q \in B$ e g è continua nel punto q;*

(C2) *$f(x) \neq q$ definitivamente per $x \to q$, ovvero esiste un intorno aperto $\widetilde{U}$ di p tale che $f(x) \neq q$ per ogni $x \in A \cap \widetilde{U} \setminus \{p\}$.*

Allora si ha che vale il limite

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla definizione di limite e la lasciamo come utile e interessante esercizio al lettore. □

Una proprietà desiderabile per i limiti è quella dell'unicità, e ciò richiede un minimo di proprietà di separazione nello spazio in cui la funzione assume i suoi valori. Come esempio estremo, osserviamo che quando f assume valori in uno spazio Y con la topologia banale, siccome ogni punto di Y ha un unico intorno aperto che coincide con tutto Y, avremo allora automaticamente che $f(x)$ ha come limite ogni valore di Y quando x tende ad un qualsiasi punto di accumulazione del dominio.

Lemma 2.1.39. *Se Y è uno spazio di Hausdorff allora i limiti di funzioni a valori in Y, quando esistono, sono unici.*

Dimostrazione. Sia $f\colon E \to Y$, con $E \subseteq X$, e sia p un punto di accumulazione per X. Supponiamo di avere $\lim_{x\to p} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to p} f(x) = \ell_2$, con $\ell_1, \ell_2 \in Y$. Se fosse $\ell_1 \neq \ell_2$, siccome Y è Hausdorff, esisterebbero due aperti V_1 e V_2 in Y, tali che

$$\ell_1 \in V_1, \quad \ell_2 \in V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing.$$

Per definizione di limite esisterebbero allora due aperti U_1 e U_2 intorni di p in X tali che

$$x \in E \cap U_j \setminus p \implies f(x) \in f(x) \in V_j,$$

per $j = 1, 2$. L'aperto $U := U_1 \cap U_2$ è ancora un intorno di p e siccome p è di accumulazione per il dominio E abbiamo che U contiene almeno un punto x di E diverso da p, per il quale dovremmo avere che $f(x) \in V_1 \cap V_2$, ma ciò non è possibile in quanto V_1 e V_2 sono disgiunti. □

2.1.5. Successioni e proprietà sequenziali. Dato un insieme E, una *successione* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in E non è altro che una funzione con dominio $\mathbb{N}$ e codominio E, che al numero naturale n associa l'elemento $x_n \in E$,

$$x\colon \mathbb{N} \to E, \quad x(n) = x_n.$$

Una *sottosuccessione* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in E non è altro che una successione $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ottenuta come composizione della successione $x(n) := x_n$ con una successione crescente di indici naturali, $n(k) := n_k$, $n_{k+1} > n_k$, per cui $y_k = y(k) = x(n(k)) = x_{n_k}$.

Siccome l'insieme dei numeri naturali ha come unico punto di accumulazione $+\infty$, data una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in uno spazio topologico X possiamo considerare il suo limite per $n \to +\infty$. Sia $\ell \in X$, diremo che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto ℓ, e scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell, \quad \text{ovvero} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell,$$

quando per ogni intorno aperto v di ℓ esiste un indice $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geqslant n$ si ha che $x_k \in V$. Questa definizione di limite coincide con l'usuale definizione data nella definizione 2.1.35 osservando che ogni intorno di $+\infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$ contiene sempre un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ della forma $\{k \in \mathbb{N}\colon k \geqslant n\}$.

Se una successione è convergente allora ogni sua successione è convergente allo stesso limite. Inoltre possiamo ricavare imfromazioni sulla convergenza di una successione guardando alle proprietà di convergenza delle sue sottosuccessioni.

Lemma 2.1.40. *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in uno spazio topologico X e sia $x \in X$. Se (x_n) non converge ad x allora esiste un intorno aperto V di x e una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che assume valori nel complementare di V.*

Dimostrazione. Negando la definizione di limite, abbiamo che esiste un intorno aperto V di x tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $j(n) \geqslant n$ tale che $x_{j(n)} \notin V$. Definiamo per induzione $n_1 := j(1)$ e $n_{k+1} := j(n_k) + 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; otteniamo così una successione (n_k) crescente di indici tale che $x_{n_k} \notin V$. □

Proposizione 2.1.41. *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in uno spazio topologico X. Allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x se e solo se per ogni sua sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

Dimostrazione. Se (x_n) converge ad x è immediato verificare che ogni sua sottosuccessione converge ad x, e comunque tale fatto segue anche dal teorema 2.1.38 per i limiti di funzioni composte.

Per provare il viceversa, supponiamo che (x_n) non converga ad x. Per il lemma 2.1.40 esiste una sottosuccessione con valori che rimangono tutti al di fuori di un intorno di x, dunque tale sottosuccessione non può converge a x. □

Proposizione 2.1.42. *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in uno spazio topologico X e sia $x \in X$. Se da ogni sottosuccessione di (x_n) è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad x allora (x_n) converge ad x.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo e supponiamo che (x_n) non converga ad x. Per il lemma 2.1.40 esiste una sottosuccessione con valori che rimangono tutti al di fuori di un intorno V di x, dunque ogni sottosuccessione di tale sottosuccessione avrà valori fuori da V e dunque non potrà convergere a x. □

I punti limite di una successione stanno sempre nella chiusura dell'insieme dei valori della successione.

Lemma 2.1.43. *Sia E un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in E. Se (x_n) converge ad un punto $x \in X$ allora $x \in \overline{E}$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite segue che ogni intorno di x contiene punti della successione e dunque punti di E. Quindi x appartiene alla chiusura di E. □

Definizione 2.1.44. Dato un sottoinsieme E di uno spazio topologico X chiamiamo *chiusura sequenziale* di E l'insieme $\overline{E}^{\mathsf{seq}}$ formato dai punti $x \in X$ tali che esiste una successione (x_n) a valori in E che converge ad x. L'insieme E si dice *sequenzialmente chiuso*, o *chiuso per successioni* quando coincide con la sua chiusura sequenziale, ovvero quando per ogni successione (x_n) a valori in E che converge ad un punto $x \in X$ si ha che $x \in E$.

Osservazione 2.1.45. La chiusura sequenziale $\overline{E}^{\mathsf{seq}}$ contiene sempre l'insieme E (basta considerare successioni costanti a valori in E). Attenzione però perché l'operazione di chiusura sequenziale non è un vero e proprio operatore di chiusura: la chiusura sequenziale della chiusura sequenziale di un insieme non coincide sempre con la chiusura sequenziale dell'insieme. Un esempio di insieme in cui $\overline{\overline{E}^{\mathsf{seq}}}^{\mathsf{seq}} \neq \overline{E}^{\mathsf{seq}}$ è discusso nell'esercizio 2.1.70.

Proposizione 2.1.46. *Ogni insieme chiuso è anche sequenzialmente chiuso.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal lemma 2.1.43. □

Non vale il viceversa, esistono insiemi sequenzialmente chiusi che non sono chiusi. Un esempio di insieme sequenzialmente chiuso ma non topologicamente chiuso sarà discusso in un esercizio proposto nella sezione dedicata alle topologie prodotto (vedi esercizio 2.2.31).

I concetti di chiusura topologica e di chiusura sequenziale coincidono quando ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Lemma 2.1.47. *Sia X uno spazio topologico. Sia $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni del punto $p \in X$ tale che $V_{n+1} \subseteq V_n$ e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $x_n \in V_n$. Allora (x_n) converge al punto p.*

Dimostrazione. Se V è un intorno aperto di p allora V contiene un aperto del sistema fondamentali di intorni, e dunque esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geqslant n$ abbiamo $x_k \in V_k \subseteq V_n \subseteq V$. Ciò significa che $x_n \to p$. □

Proposizione 2.1.48. *Se X è uno spazio topologico $\mathcal{N}_1$ allora per ogni sottoinsieme $E \subseteq X$ si ha $\overline{E}^{\mathsf{seq}} = \overline{E}$.*

Dimostrazione. È sufficiente far vedere ce ogni punto aderente in $\overline{E}$ è il limite di una successione a valori in E. Fissato $p \in \overline{E}$, siccome lo spazio è $\mathcal{N}_1$, esisterà un sistema fondamentale numerabile $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intorni aperti di p che, per la proposizione 2.1.18, possiamo supporre incapsulati, $V_{n+1} \subseteq V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome p è aderente ad E, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterà un punto $x_n \in E \cap V_n$. Per il lemma 2.1.47 la successione (x_n) converge a p, dunque $x \in \overline{E}^{\mathsf{seq}}$. □

Dalla proposizione seguono facilmente i seguenti corollari:

Corollario 2.1.49. *Se X è $\mathcal{N}_1$ allora ogni insieme sequenzialmente chiuso è anche topologicamente chiuso.*

Corollario 2.1.50 (Densità sequenziale). *Se X è $\mathcal{N}_1$ allora un sottoinsieme D è denso in X se e solo se ogni punto di X è limite di una successione a valori in D.*

Tramite i limiti di successioni possiamo formulare una nozione di continuità sequenziale.

Definizione 2.1.51. Siano X e Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Diremo che f è *sequenzialmente continua nel punto* $p \in X$ quando per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in X che converge a p si ha che la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in Y converge a $f(p)$. Diremo che f è *sequenzialmente continua* se è sequenzialmente continua in ogni punto del dominio X.

Il seguente teorema fornisce un "ponte" che ci permette di passare dalla continuità topologica alla continuità sequenziale e viceversa.

Teorema 2.1.52 (Teorema ponte per funzioni continue). *Siano X e Y due spazi topologici, sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $p \in X$.*

(a) *Se f è continua in p allora f è sequenzialmente continua in p.*
(b) *Se X è $\mathcal{N}_1$ e f è sequenzialmente continua in p allora f è continua in p.*

Dimostrazione. Vediamo il punto (a). Sia (x_n) una successione in X convergente a p e sia V un intorno aperto di $f(p)$ in Y. Siccome f è continua in p allora $f^{-1}(V)$ è un intorno di p in X. Dunque $x_n \in f^{-1}(V)$ definitivamente per $n \to \infty$, che significa che $f(x_n) \in V$ definitivamente per $n \to \infty$. Dunque $(f(x_N))$ converge a $f(p)$.

Per dimostrare il punto (b) facciamo vedere che se f non è continua in p allora non può essere sequenzialmente continua in p. Se f non è continua in p significa che esiste un intorno V di $f(p)$ in Y tale che per ogni intorno U di p in X si ha che esiste un punto $x \in U$ per il quale $f(x) \notin V$. Siccome X è $\mathcal{N}_1$ esiste un sistema fondamentale numerabile (U_n) di intorni di p con $U_{n+1} \subseteq U_n$, e dunque esiste una successione (x_n) tale che $x_n \in U_n$ e $f(x_n) \notin V$. Per il lemma 2.1.47 abbiamo che $x_n \to p$, ma la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere a $f(p)$ in quanto rimane fuori dall'intorno V. Dunque f non è sequenzialmente continua in p. □

Anche per i limiti di funzioni abbiamo un "ponte" tra limiti topologici e sequenziali.

Teorema 2.1.53 (Teorema ponte per i limiti). *Siano X e Y due spazi topologici, e supponiamo che X sia $\mathcal{N}_1$. Sia E un sottoinsieme di X, sia $p \in X$ un punto di accumulazione per E, sia $\ell \in Y$. Consideriamo una funzione $f\colon E \to Y$. Allora $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$ se e solo se per ogni successione (x_n) a valori in $E \setminus \{p\}$ convergente a p in X si ha che la successione $(f(x_n))$ converge a ℓ in Y.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 2.1.52 e la lasciamo come esercizio. □

2.1.6. Esercizi.

Esercizio 2.1.54. Considera la semiretta reale $X := [0, +\infty[$. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia formata da $\varnothing$, X e da tutte le semirette $]a, +\infty[$ al variare di $a \in X$. Dimostra che $\mathcal{A}$ è una topologia su X.

Esercizio 2.1.55. Quante possibili topologie distinte si possono definire su insieme di tre elementi?

Esercizio 2.1.56. Dimostra che la topologia euclidea descritta nell'esempio 2.1.3 è una topologia su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.1.57. Dimostra che la topologia della retta estesa descritta nell'esempio 2.1.4 è una topologia su $\overline{\mathbb{R}}$.

Esercizio 2.1.58. Sia $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famiglia formata da $\mathbb{R}$ e da tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famiglia formata dall'insieme vuoto e da tutti i sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famiglia formata dall'insieme vuoto e dai complementari di tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$. Quale tra le famiglie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ costituisce una topologia su $\mathbb{R}$?

Esercizio 2.1.59. Spiega perché l'insieme $E = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.1.60. Siano p un punto e E un sottoinsieme di uno spazio topologico. Dimostra che $p \in \overline{E}$ se e solo se per ogni intorno A di p si ha che $A \cap E \neq \varnothing$.

Esercizio 2.1.61. Spiega perché l'intersezione di due topologie su un insieme X è ancora una topologia su X.

Esercizio 2.1.62. Fornisci un esempio di due topologie definite un insieme X la cui unione non è una topologia. *[È sufficiente considerare un insieme X formato da soli tre elementi.]*

Esercizio 2.1.63. Dimostra che la topologia cofinita descritta nella definizione 2.1.21 è effettivamente una topologia.

Esercizio 2.1.64. Verifica che lo spazio topologico definito nell'esercizio 2.1.54 non è uno spazio di Hausdorff.

Esercizio 2.1.65. Sia X uno spazio di Hausdorff. Siano $E \subseteq X$ e $p \in X$. Dimostra che p è di accomulazione per E se e solo se ogni intorno di p contiene infiniti punti di E.

Esercizio 2.1.66 (Topologia determinata da famiglie di intorni). Sia X un insieme. Per ogni $x \in X$ sia $\mathcal{U}(x)$ una famiglia di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

- $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$;
- se $U, V \in \mathcal{U}(x)$ allora $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$.

Sia $\mathcal{A}$ la famiglia di sottoinsiemi di X con la seguente proprietà:

- $A \in \mathcal{A}$ se e solo se per ogni $x \in A$ esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \subseteq A$.

Dimostra che $\mathcal{A}$ è una topologia su X rispetto alla quale $\mathcal{U}(x)$ costituisce un sistema fondamentale di intorni per il punto x.

Esercizio 2.1.67. Dimostra che una funzione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $E \subseteq Y$ si ha $\overline{f^{-1}(E)} \subseteq f^{-1}(\overline{E})$.

Esercizio 2.1.68. Dimostra che se p è un punto isolato di X allora qualsiasi funzione definita su X sarà continua in p.

Esercizio 2.1.69. Dimostra il teorema 2.1.38.

Esercizio 2.1.70 (Spazio di Arens). Considera l'insieme $X := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cup\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Definiamo su X una topologia specificando chi sono gli intorni di ogni punto (vedi esercizio 2.1.66) nel seguente modo:

- ogni $(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è un punto isolato di X, ovvero $\{(j,k)\}$ è un aperto, e dunque ogni sottoinsieme di X che contiene (j,k) è un intorno di (j,k);
- per ogni $n,m\in\mathbb{N}$ l'insieme $L_{n,m} := \{n\}\cup\{(n,k)\colon k\geqslant m\}$ è un aperto, e dunque ogni sottoinsieme di X che contiene $L_{n,m}$ è un intorno di n;
- dati dei sottoinsiemi finiti $A\subset\mathbb{N}$ e $A_j\subset\mathbb{N}$ per ogni $j\in\mathbb{N}$, l'insieme
$$X\setminus\Big(\Big(\bigcup_{n\in A} L_{n,1}\Big)\cup\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{(j,k)\colon k\in A_j\}\Big)\Big)$$
è un intorno aperto di ∞.

Dimostra che:

(1) la successione $((n,k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a n per $k\to+\infty$;
(2) per ogni successione $((j_n,k_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ l'insieme $X\setminus\{(j_n,k_n)\colon n\in\mathbb{N}\}$ è un intorno aperto di ∞ in X;
(3) $\overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}^{\mathsf{seq}} = X\setminus\{\infty\}$;
(4) la successione $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∞ per $n\to+\infty$;
(5) $\overline{X\setminus\{\infty\}}^{\mathsf{seq}} = X$.
(6) X è Hausdorff ma non è $\mathcal{N}_1$.

In particolare abbiamo che $\overline{\overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}^{\mathsf{seq}}}^{\mathsf{seq}} \neq \overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}^{\mathsf{seq}}$.

Esercizio 2.1.71. Fornisci una dimostrazione dettagliata del teorema 2.1.53.

2.2. Costruzione di topologie

2.2.1. Confronto tra topologie. Su uno stesso insieme X è possibile definire più topologie differenti (come visto ad esempio nell'esempio 2.1.2). Supponiamo di avere due topologie $\mathcal{A}_\flat$ e $\mathcal{A}_\sharp$ definite su X. Osserviamo che l'intersezione $\mathcal{A}_\flat\cap\mathcal{A}_\sharp$ è ancora una topologia, mentre l'unione $\mathcal{A}_\flat\cup\mathcal{A}_\sharp$ non è detto che sia ancora una topologia. La famiglia di tutte le topologie su uno stesso stesso insieme forma un reticolo parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione.

Definizione 2.2.1. Diremo che la topologia $\mathcal{A}_\sharp$ è un *raffinamento* della topologia $\mathcal{A}_\flat$, ovvero che $\mathcal{A}_\sharp$ è *più fine* di $\mathcal{A}_\flat$, ovvero che la topologia $\mathcal{A}_\flat$ è un *impoverimento* della topologia $\mathcal{A}_\sharp$, ovvero che $\mathcal{A}_\flat$ è *meno fine* di $\mathcal{A}_\sharp$, quando ogni aperto di $\mathcal{A}_\flat$ è un aperto anche di $\mathcal{A}_\sharp$, ovvero quando vale l'inclusione $\mathcal{A}_\flat\subseteq\mathcal{A}_\sharp$.

Naturalmente, date due qualsiasi topologie $\mathcal{A}_\flat$ e $\mathcal{A}_\sharp$ su uno stesso insieme X esse sono sempre un raffinamento della loro intersezione $\mathcal{A}_\flat\cap\mathcal{A}_\sharp$. Nel reticolo di tutte le topologie $\mathcal{A}_\flat\cap\mathcal{A}_\sharp$, trivialmente, è la più grande topologia su X contenuta sia in $\mathcal{A}_\flat$ che in $\mathcal{A}_\sharp$. L'intersezione di tutte le topologie su X che contengono l'unione $\mathcal{A}_\flat\cup\mathcal{A}_\sharp$ è invece la più piccola topologia su X che contiene sia $\mathcal{A}_\flat$ che in $\mathcal{A}_\sharp$ e non è detto che essa coincida con $\mathcal{A}_\flat\cup\mathcal{A}_\sharp$.

2.2.2. Topologie indotte su sottoinsiemi.

Definizione 2.2.2. Sia $(X,\mathcal{A})$ uno spazio topologico e sia Y un sottoinsieme di X. Definiamo *topologia indotta* su Y la famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A}_Y\subseteq\mathcal{P}(Y)$ ottenuta intersecando ogni aperto di X con il sottoinsieme Y:
$$\mathcal{A}_Y := \{A\cap Y\colon A\in\mathcal{A}\}\,.$$

Proposizione 2.2.3. *La topologia indotta $\mathcal{A}_Y$ è una topologia su Y.*

Dimostrazione. Abbiamo che $\varnothing=\varnothing\cap Y$ e $Y = X\cap Y$; essendo $\varnothing, X\in\mathcal{A}$, ne segue che $\varnothing$ e Y appartengono a $\mathcal{A}_Y$.

Sia $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}_Y$, per ogni $B\in\mathcal{F}$ esiste un aperto $A_B\in\mathcal{A}$ tale che $B = A_B\cap Y$, abbiamo allora che
$$\cup\mathcal{F} = \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B = \bigcup_{B\in\mathcal{F}}(A_B\cap Y) = \Big(\bigcup_{B\in\mathcal{F}} A_B\Big)\cap Y.$$
Siccome $\bigcup_{B\in\mathcal{F}} A_B$ è un aperto di X ne segue che $\cup\mathcal{F}$ è un aperto di $\mathcal{A}_Y$.

Dati $B_1, B_2 \in \mathcal{A}_Y$ esisteranno due aperti $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tali che $B_1 = A_1 \cap Y$ e $B_2 = A_2 \cap Y$. Abbiamo che

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap Y) \cap (A_2 \cap Y) = (A_1 \cap A_2) \cap Y$$

è un elemento di $\mathcal{A}_Y$ in quanto $A_1 \cap A_2$ è un aperto di X. □

2.2.3. Topologie generate da famiglie di insiemi.

DEFINIZIONE 2.2.4. Dato un insieme X e una qualsiasi famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X, chiameremo *topologia generata* da $\mathcal{F}$, e la indicheremo con $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, la topologia meno fine tra tutte le topologie su X rispetto alla quale ogni elemento di $\mathcal{F}$ è un aperto, è data dall'intersezione di tutte le topologie che contengono $\mathcal{F}$. Tale intersezione è certamente non vuota in quanto la topologia discreta $\mathcal{P}(X)$ contiene $\mathcal{F}$ e la topologia banale $\{\varnothing, X\}$ è contenuta in tutte le topologie su X.

ESEMPIO 2.2.5. La topologia euclidea su $\mathbb{R}$ è la topologia generata dalla famiglia degli intervalli aperti $]a, b[$.

Possiamo caratterizzare i casi in cui la famiglia $\mathcal{F}$ risulta essere una base di aperti per $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

TEOREMA 2.2.6. *Sia X un insieme non vuoto. Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che:*

(i) *$\mathcal{B}$ ricopre tutto X, ovvero $X = \cup\mathcal{B}$;*
(ii) *per ogni $U, V \in \mathcal{B}$ e ogni $x \in U \cap V$, esiste $W \in \mathcal{B}$ tale che $x \in W \subseteq U \cap V$.*

Allora la topologia $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ è l'unica topologia per la quale $\mathcal{B}$ è una base di aperti; in particolare ogni aperto di $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ si può ottenere come unione di una sottofamiglia di $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \{\cup\mathcal{F} \colon \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}\}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Ecco una traccia della dimostrazione, lasciamo i dettagli come esercizio.

- Sia $\mathcal{A} := \{\cup\mathcal{F} \colon \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}\}$ la famiglia delle unioni di sottofamiglie di $\mathcal{B}$, si vede facilmente che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.
- Dalle ipotesi (i) e (ii), utilizzando la legge distributiva (13), segue che $\mathcal{A}$ è una topologia su X.
- Se $\mathcal{A}_\sharp$ è una topologia che contiene $\mathcal{B}$ allora è più fine di $\mathcal{A}$; dunque $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$.
- Se $\mathcal{A}_\sharp$ è una topologia per la quale $\mathcal{B}$ è una base allora $\mathcal{A}_\sharp = \mathcal{A}$.

□

PROPOSIZIONE 2.2.7. *Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Una base per la topologia $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ generata da $\mathcal{F}$ è data dalle intersezioni di sottofamiglie finite di $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \quad \textit{dove} \quad \mathcal{B} := \{X\} \cup \big\{\cap\widetilde{\mathcal{F}} \colon \widetilde{\mathcal{F}} \textit{ è un sottoinsieme finito di } \mathcal{F}\big\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome gli elementi di $\mathcal{F}$ sono aperti in $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ allora anche le intersezioni di un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$ sono aperti in $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$; dunque $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Ovviamente ogni elemento di $\mathcal{F}$ può essere considerato come intersezione di un numero finito (uno!) di elementi di $\mathcal{F}$ e dunque da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ segue che $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. La famiglia $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite $\mathcal{B}$, unite ad X, verifica le condizioni (i) e (ii) del teorema 2.2.6 e dunque è una base di aperti. □

OSSERVAZIONE 2.2.8. Utilizzando questi risultati otteniamo che ogni aperto A non triviale della topologia $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ generata dalla famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F}$ si può ottenere come unione di qualsiasi famiglia di intersezioni di sottofamiglie finite di $\mathcal{F}$,

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} \Big(\bigcap_{\beta \in J_\alpha} F_{\alpha,\beta} \Big),$$

dove I è un qualsiasi insieme di indici, e J_α è un qualsiasi insieme finito di indici per ogni $\alpha \in I$, e $F_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$ per ogni $\beta \in J_\alpha$ e per ogni $\alpha \in I$; tralasciando pedanti notazioni di indici, possiamo abbreviare la scrittura nella forma simbolica:

$$A = \bigcup_{\text{qualsiasi}} \Big(\bigcap_{\text{finita}} F \Big), \qquad \text{dove } F \text{ indica elementi generici di } \mathcal{F}.$$

OSSERVAZIONE 2.2.9. Perché è importante cercare le topologie *meno fini*, ovvero più povere di aperti, con certe caratteristiche? Esamineremo più avanti il concetto di insieme compatto. Avere sottoinsiemi compatti in uno spazio è molto utile, ad esempio per trovare minimi o massimi di funzioni continue (si pensi al teorema di Weierstrass). Dalla definizione di compattezza per ricoprimenti di aperti, definizione 2.3.2, si deduce che una topologia più fine ha meno compatti di una topologia meno fine. Ecco perché quando si può si cerca di lavora con topologie meno fini. D'altra parte, meno fine è la topologia e meno funzioni continue saranno definite sullo spazio. Quindi è importante richiedere che a topologia sia sufficientemente ricca da garantire la continuità delle funzioni con le quali si ha necessità di lavorare.

2.2.4. Topologie indotte da famiglie di funzioni. Data una famiglia di funzioni definite su un insieme X possiamo chiederci qual'è la topologia meno fine per la quale le funzioni risultano continue.

Definizione 2.2.10. Sia X un insieme non vuoto, sia $(Y_\alpha)_{\alpha\in I}$ una famiglia di spazi topologici, per ogni $\alpha \in I$ sia $\mathcal{A}_\alpha$ la topologia su Y_α, e sia $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ una famiglia di funzioni $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$. La *topologia su X indotta dalla famiglia di funzioni* $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ è la topologia meno fine su X rispetto alla quale tutte le funzioni f_α risultano essere continue, ovvero è la topologia meno fine che contiene tutte le controimmagini di aperti di Y_α tramite le funzioni f_α, dunque è la topologia generata dalla famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X data da

$$\mathcal{F} := \left\{ f_\alpha^{-1}(V_\alpha)\colon \alpha \in I,\, V_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \right\}.$$

Osservazione 2.2.11. Dalla proposizione 2.2.7 segue che una base per la topologia indotta dalla famiglia di funzioni $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ è data dagli insiemi di X ottenuti come intersezioni finite della forma

$$\bigcap_{\text{finita}} f_\alpha^{-1}(V_\alpha), \quad \text{con } \alpha \in I \text{ e } V_\alpha \text{ aperto in } Y_\alpha. \tag{14}$$

Se per ogni $\alpha \in I$ abbiamo una base $\mathcal{B}_\alpha$ di aperti per la topologia $\mathcal{A}_\alpha$ possiamo scrivere ogni aperto V_α di $\mathcal{A}_\alpha$ come unione di aperti della base $\mathcal{B}_\alpha$. Siccome la controimmagine di un'unione coincide con l'unione delle controimmagine, utilizzando le proprietà distributive (13) tra unione e intersezione (vedi anche l'esercizio 2.2.28), possiamo restringere la base per la topologia indotta considerando solo insiemi della forma

$$\bigcap_{\text{finita}} f_\alpha^{-1}(U_\alpha), \quad \text{con } \alpha \in I \text{ e } U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha. \tag{15}$$

La continuità di funzioni a valori nello spazio X può essere letta attraverso le funzioni f_α che inducono la topologia su X.

Teorema 2.2.12. *Sia Z uno spazio topologico e $g\colon Z \to X$ una funzione a valori nello spazio X dotato della topologia indotta dalla famiglia di funzioni $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$. Allora g è continua se e solo se per ogni $\alpha \in I$ si ha che la funzione composta $f_\alpha \circ g$ è continua.*

Dimostrazione. Se g è continua allora per ogni $\alpha \in I$ anche la composta $f_\alpha \circ g$ è continua, in quanto le f_α sono continue per definizione della topologia indotta.

Viceversa, supponiamo che $f_\alpha \circ g$ sia continua per ogni $\alpha \in I$. Sia A un aperto di X della forma (14), avremo allora che

$$g^{-1}(A) = \bigcap_{\text{finita}} g^{-1}\big(f_\alpha^{-1}(V_\alpha)\big) = \cap_{\text{finita}}(f_\alpha \circ g)^{-1}(V_\alpha),$$

con V_α aperto in Y_α; dunque $g^{-1}(A)$ è aperto in quanto intersezione finita degli insiemi $(f_\alpha \circ g)^{-1}(V_\alpha)$ che sono aperti in X per la continuità di $f_\alpha \circ g$. □

Anche la convergenza di successioni in X può essere letta tramite le funzioni che inducono la topologia.

Proposizione 2.2.13. *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori nello spazio X dotato della topologia indotta dalla famiglia di funzioni $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$. Sia $p \in X$. Allora $x_n \to p$ in X se e solo se per ogni $\alpha \in I$ si ha che $f_\alpha(x) \to f_\alpha(p)$ in Y_α.*

Dimostrazione. Essendo continua f_α è anche sequenzialmente continua e dunque se $x_n \to p$ si ha che $f_\alpha(x_n) \to f(p)$.

Viceversa, supponiamo che $f_\alpha(x_n) \to f(p)$ per ogni $\alpha \in I$. Sia A un intorno aperto di p della forma (14), avremo che

$$A = \bigcap_{\alpha\in J} f_\alpha^{-1}(V_\alpha), \quad \text{con } J \text{ sottoinsieme finito di } I.$$

dove V_α è un intorno aperto di $f_\alpha(p)$ in Y_α. Abbiamo che $f(x_n) \in V_\alpha$ definitivamente per $n \to \infty$, e dunque esiste $n_\alpha \in N$ tale che $x_n \in f^{-1}(V_\alpha)$ per ogni $n \geqslant n_\alpha$. Siccome gli indici α utilizzati nell'intersezione per ottenere A sono in quantità finita possiamo definire $\widetilde{n} := \max_{\alpha\in J} n_\alpha$ e avremo che $x_n \in A$ per ogni $n \geqslant \widetilde{n}$. Questo prova che $x_n \to p$. □

2.2.5. Topologia prodotto su prodotti cartesiani. Possiamo definire il prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi $\mathcal{F} = (Y_\alpha)_{\alpha\in I}$ come l'insieme di tutte le famiglie di punti $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ scelti in modo che $y_\alpha \in Y_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$, tali famiglie di punti possono essere identificate con le funzioni $y\colon I \to \cup\mathcal{F}$ tali che $y(\alpha) \in Y_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$, con l'identificazione che si ottiene ponendo $y(\alpha) = y_\alpha$,

$$\prod \mathcal{F} = \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha := \big\{(y_\alpha)_{\alpha\in I} : y_\alpha \in Y_\alpha,\ \forall\alpha \in I\big\} = \Big\{y\colon I \to \bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha : y(\alpha) \in Y_\alpha,\ \forall\alpha \in I\Big\}. \tag{16}$$

Al prodotto cartesiano è associata la famiglia delle proiezioni $(\pi_\alpha)_{\alpha\in I}$,

$$\pi_\alpha\colon \prod \mathcal{F} \to Y_\alpha, \quad \pi_\alpha(y) := y_\alpha, \quad \forall y \in \prod \mathcal{F}, \forall\alpha \in I.$$

DEFINIZIONE 2.2.14. Supponiamo che ciascuno degli insiemi Y_α sia uno spazio topologico. Definiamo *topologia prodotto* sul prodotto cartesiano $\prod \mathcal{F}$ la topologia indotta su $\prod \mathcal{F}$ dalla famiglia delle proiezioni (π_α), e dunque è la topologia meno fine rispetto alla quale le proiezioni risultano continue.

Fissiamo un indice $\widetilde{\alpha} \in I$ e sia V un aperto di $Y_{\widetilde{\alpha}}$; la controimmagine $\pi_{\widetilde{\alpha}}^{-1}(V)$, per definizione della topologia prodotto, è un aperto in $\prod \mathcal{F}$ e coincide con il prodotto $\prod \widetilde{\mathcal{F}}$, dove $\widetilde{\mathcal{F}} = (\widetilde{Y}_\alpha)_{\alpha\in I}$ è la famiglia di spazi in cui $\widetilde{Y}_\alpha = Y_\alpha$ per ogni $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{Y}_{\widetilde{\alpha}} = V$. Una base di aperti per la topologia prodotto è data dalla famiglia di intersezioni finite di tali controimmagini, ovvero da insiemi della forma di prodotti di sottoinsiemi aperti di Y_α nei quali tutti i fattori tranne un numero finito coincidono con tutto il corrispondente spazio Y_α,

$$\bigcap_{\alpha\in J} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) = \prod \mathcal{V}, \tag{17}$$

dove J è un sottoinsieme finito di I e $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha\in I}$ è una famiglia in cui V_α è un aperto di Y_α per ogni $\alpha \in I$, e $V_\alpha = Y_\alpha$ per ogni $\alpha \in I \setminus J$. Per avere una base di aperti per $\prod \mathcal{F}$ possiamo restringere la scelta degli aperti V_α tra quelli di una base per ciascun Y_α.

PROPOSIZIONE 2.2.15. *Per ogni $\alpha \in I$, sia $\mathcal{B}_\alpha$ una base di aperti per Y_α. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia formata dai sottoinsiemi di $\prod \mathcal{F}$ della forma*

$$\bigcap_{\alpha\in J} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha),$$

con J sottoinsieme finito di I e $V_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ per ogni $\alpha \in J$. Allora $\mathcal{B}$ è una base di aperti per il prodotto $\prod \mathcal{F}$

Lasciamo la dimostrazione come esercizio per il lettore.

Una funzione $f\colon Z \to \prod \mathcal{F}$ da uno spazio topologico Z a valori nello spazio prodotto $\prod \mathcal{F}$ è descritta dalla famiglia delle sue componenti: $f(z) = \big(f_\alpha(z)\big)_{\alpha\in I}$, dove $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f$. Il teorema 2.2.12 nel caso della topologia prodotto si traduce nel fatto che la continuità di funzioni a valori in uno spazio prodotto coincide con la continuità di ciascuna delle sue componenti.

PROPOSIZIONE 2.2.16. *La funzione $f\colon Z \to \prod \mathcal{F}$ è continua se e solo se la componente $f_\alpha\colon Z \to Y_\alpha$ è continua per ogni $\alpha \in I$.*

Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori nello spazio prodotto $\prod \mathcal{F}$ è descritta dalla famiglia di successioni delle sue componenti: $x_n = (x_{n,\alpha})_{\alpha\in I}$, dove $x_{n,\alpha} = \pi_\alpha(x_n)$. La proposizione 2.2.13 nel caso della topologia prodotto si traduce nel fatto che la convergenza di una successione a valori in uno spazio prodotto coincide con la convergenza di ciascuna delle sue componenti.

PROPOSIZIONE 2.2.17. *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((x_{n,\alpha})_{\alpha\in I}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $\prod \mathcal{F}$ e sia $p = (p_\alpha)_{\alpha\in I}$ un elemento di $\prod \mathcal{F}$. Abbiamo che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p in $\mathcal{F}$ se e solo se $(x_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p_α in Y_α per ogni $\alpha \in I$.*

OSSERVAZIONE 2.2.18. Nel caso in cui tutti i fattori Y_α conincidano con uno stesso spazio Y, gli elementi del prodotto $\prod_{\alpha\in I} Y$ non sono altro che le funzioni con dominio I a valori in Y, e lo indichiamo con la scrittura Y^I,

$$Y^I = \prod_{\alpha\in I} Y = \{f\colon I \to Y : .\}$$

La convergenza di una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nello spazio Y^I con la topologia prodotto, per la proposizione 2.2.17, non è altro che la convergenza puntuale:

$$f_n \to f \text{ in } Y^I \iff f_n(\alpha) \to f(\alpha) \text{ in } Y \text{ per ogni } \alpha \in I.$$

2.2.6. Topologia “box” su prodotti cartesiani. Esiste un’altra topologia che possiamo definire in modo naturale sullo spazio prodotto richiedendo che ogni prodotto cartesiano di aperti sia un aperto nello spazio prodotto.

DEFINIZIONE 2.2.19. Sia $\mathcal{F} = (Y_\alpha)_{\alpha\in I}$ una famiglia di spazi topologici. Chiameremo *scatola aperta* ogni sotto insieme del prodotto $\prod \mathcal{F}$ della forma

$$\prod_{\alpha\in I} V_\alpha, \quad \text{con } V_\alpha \text{ aperto di } Y_\alpha \text{ per ogni } \alpha \in I.$$

La topologia *box* su $\mathcal{F}$ è la topologia generata da tutte le scatole aperte.

L’intersezione di due scatole aperte è ancora una scatola aperta, e quindi anche l’intersezione di un numero finito di scatole aperte è ancora una scatola aperta. Ne segue che l’insieme di tutte le scatole aperte forma una base per la topologia box.

Siccome ogni insieme della forma (17) della base per la topologia prodotto è una scatola aperta, ne segue che la topologia box è più fine della topologia prodotto. Nel caso di un prodotto cartesiano con un numero finito di fattori ogni scatola aperta è della forma (17) e dunque in tal caso la topologia box coincide con la topologia prodotto. Nel caso di prodotti cartesiani con infiniti fattori le due topologie sono distinte.

ESEMPIO 2.2.20. Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ delle successioni a valori reali, si tratta del prodotto cartesiano di una quantità numerabile di copie di $\mathbb{R}$. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ definita da

$$x \mapsto f(x) = (x, x, x, \dots, x, \dots), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

risulta essere continua se consideriamo $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ dotato della topologia prodotto, in quanto le componenti di f coincidono tutte con l’identità su $\mathbb{R}$, infatti $(f(x))_n = x$. Se invece consideriamo $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ dotato della topologia box, tra gli aperti troviamo la scatola

$$U := \prod_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[,$$

che costituisce un intorno aperto di $(0, 0, 0, \dots)$. Se f fosse continua anche in questo caso, avremmo che $f^{-1}(U)$ sarebbe un intorno di 0 in $\mathbb{R}$, e dunque esisterebbe un $\epsilon > 0$ tale che $]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq f^{-1}(U)$. Ciò implicherebbe che $\varepsilon \leqslant 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che non è possibile. Quindi f non può essere continua rispetto alla topologia box su $\mathbb{R}^N$.

Il fatto che la stessa funzione sia continua rispetto ad una topologia e non rispetto all’altra implica che le due topologie non coincidano.

2.2.7. Esercizi.

ESERCIZIO 2.2.21. Siano $\mathcal{A}_\flat$ e $\mathcal{A}_\sharp$ due topologie su uno stesso insieme X. Verifica che $\mathcal{A}_\flat$ è meno di fine di $\mathcal{A}_\sharp$ se e solo se ogni chiuso rispetto ad $\mathcal{A}_\flat$ è un chiuso rispetto a $\mathcal{A}_\sharp$.

ESERCIZIO 2.2.22. Sia $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\in I}$ una famiglia di topologie su X. Verifica che l’intersezione $\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$ è ancora una topologia su X.

ESERCIZIO 2.2.23. Sia $\mathcal{A}_\flat$ una topologia meno fine di $\mathcal{A}_\sharp$ e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente a x rispetto alla topologia $\mathcal{A}_\sharp$. Dimostra che (x_n) converge a x anche rispetto alla topologia $\mathcal{A}_\flat$.

ESERCIZIO 2.2.24. Dimostra che la topologia cofinita descritta nella definizione 2.1.21 è la topologia meno fine per la quale si ha che ogni insieme formato da un solo punto è chiuso.

ESERCIZIO 2.2.25. Siano $\mathcal{A}_\flat$ e $\mathcal{A}_\sharp$ due topologie su uno stesso insieme X. Quale relazione deve esserci tra le due topologie affinché la funzione identità $x \mapsto x$ sia continua da $(X, \mathcal{A}_\sharp)$ a $(X, \mathcal{A}_\flat)$?

ESERCIZIO 2.2.26. Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio topologico e sia Y un sottoinsieme di X. Sia $\mathcal{A}_Y$ la topologia indotta su Y dalla topologia di X. Dimostra che:

- se Y è un aperto in X e $A \subseteq Y$ allora si ha che
$$A \text{ è aperto in } Y \iff A \text{ è aperto in } X;$$
- se Y è un chiuso in X e $A \subseteq Y$ allora si ha che
$$A \text{ è chiuso in } Y \iff A \text{ è chiuso in } X;$$
- per ogni sottoinsieme $E \subseteq Y$ indichiamo con $\overline{E}^Y$ la chiusura di E in Y e con $\overline{E}^X$ la chiusura di E in X, allora si ha che
$$\overline{E}^Y = \overline{E}^X \cap Y.$$

ESERCIZIO 2.2.27. Completa i dettagli della dimostrazione del teorema 2.2.6 seguendo la traccia indicata.

ESERCIZIO 2.2.28. Verifica che ogni insieme della forma

$$\bigcap_{\text{finita}} \Big(\bigcup_{\text{qualsiasi}} \big(\bigcap_{\text{finita}} F \big) \Big), \qquad F \in \mathcal{F}$$

può essere scritto nella forma

$$\bigcup_{\text{qualsiasi}} \big(\bigcap_{\text{finita}} F \big), \qquad F \in \mathcal{F}.$$

ESERCIZIO 2.2.29. Sia X uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X. Verifica che la topologia indotta su Y come sottoinsieme di X coincide con la topologia indotta su Y dalla funzione $J\colon Y \to X$ data da $J(y) = y$ per $y \in Y$.

ESERCIZIO 2.2.30. Dimostra la proposizione 2.2.15.

ESERCIZIO 2.2.31. [Esempio di insieme chiuso che non è sequenialmente chiuso.] Sia D lo spazio topologico formato dall'insieme $\{0, 1\}$ dotato della topologia discreta. Sia $X := D^{\mathbb{R}} = \prod_{x\in\mathbb{R}} D$ lo spazio delle funzioni da $\mathbb{R}$ a D dotato della topologia prodotto. Una base di aperti per X è data dagli insiemi della forma $U_\Omega := \prod_{x\in R} A_x$ dove $A_x \subseteq \{0, 1\}$, Ω è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ e $A_x = \{0, 1\}$ per ogni $x \notin \Omega$. Sia $g\colon \mathbb{R} \to D$ la funzione costante definita da $g(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Considera inoltre il sottoinsieme E di X formato dalle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to D$ tali che la controimmagine $f^{-1}(\{1\})$ è un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$. Verifica che:

(1) E è sequenzialmente chiuso;
(2) g non appartiene ad E;
(3) ogni aperto U_Ω che contiene g contiene anche punti di E;
(4) E non è topologicamente chiuso.

ESERCIZIO 2.2.32. Siano Y uno spazio topologico, I un insieme infinito, e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi del prodotto Y^I, ovvero una successione di funzioni $f_n\colon I \to Y$. Siccome su X^I la topologia box è più fine della topologia prodotto la condizione di convergenza rispetto alla topologia box è più forte della convergenza puntuale. Dimostra che (f_n) converge rispetto alla topologia box ad una funzione $f_\star\colon I \to Y$ se e solo converge puntualmente, $f_n(\alpha) \to f_\star(\alpha)$ per ogni $\alpha \in I$, ed inoltre esistono un sottoinsieme finito J di I ed un indice $n_\star \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \geqslant N$ e ogni $\alpha \in I \setminus J$ si ha $f_n(\alpha) = f_\star(\alpha)$, ovvero la successione $(f_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente costante uniformemente per quasi ogni α.

2.3. Insiemi compatti

Nella topologia degli spazi euclidei $\mathbb{R}^d$ sappiamo che i sottoinsiemi chiusi e limitati, ovvero i sottoinsiemi compatti, sono di particolare importanza nell'analisi delle funzioni continue e dei limiti di successioni: il teorema di Weierstrass ci dice che una funzione a valori reali definita e continua su un compatto ammette sempre un punto di minimo e un punto di massimo, il teorema di Bolzano-Weierstrass ci dice che una successione in un compatto ammette sempre una sottosuccessione convergente. Il concetto di insieme compatto può essere definito in qualsiasi spazio topologico.

2.3.1. Compattezza per ricoprimenti aperti.

DEFINIZIONE 2.3.1. Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio topologico. Sia E un sottoinsieme di X e sia $\mathcal{G}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Diciamo che $\mathcal{G}$ è un *ricoprimento aperto* di E se ogni elemento di $\mathcal{G}$ è un aperto di X ed E è contenuto nell'unione degli aperti di $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}, \qquad E \subseteq \cup\mathcal{G} = \bigcup_{A\in\mathcal{G}} A.$$

Diciamo che $\mathcal{G}$ ammette un *sottoricoprimento finito* di E quando esiste una sottofamiglia $\widetilde{\mathcal{G}}$ composta da un numero finito di elementi di $\mathcal{G}$ che è ancora un ricoprimento aperto di E.

DEFINIZIONE 2.3.2. Sia K un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Diciamo che K è *compatto* se da ogni ricoprimento aperto di K è possibile estrarre un sottoricoprimento finito di K.

ESEMPIO 2.3.3. Ogni sottoinsieme finito di uno spazio topologico è sempre un insieme compatto. Infatti, dato un ricoprimento aperto basta selezionare per ogni punto p dell'insieme un aperto del ricoprimento che contenga p e si ottiene un sottoricoprimento finito.

ESEMPIO 2.3.4. L'intervallo $I :=]0, 1]$ non è compatto nella retta euclidea $\mathbb{R}$. Consideriamo ad esempio la famiglia $\mathcal{G}$ formata da tutti gli intervalli aperti della forma $I_x :=]x, x+1[$ con x che varia in I; avremo che $\mathcal{G}$ è un ricoprimento aperto di I, infatti $t \in I_{t/2}$ per ogni $t \in I$; ma ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{G}$ lascia sempre scoperto un pezzetto di I, infatti se $x_1, \dots, x_n \in I$ allora abbiamo che

$$I \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_{x_j} =]0, m[, \quad m := \min \{x_j : j = 1, \dots, n\}.$$

LEMMA 2.3.5. *Se C è un sottoinsieme chiuso di un compatto K allora C è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento aperto di C. Sia A l'aperto complementare di C. Siccome $K \setminus C \subseteq A$, abbiamo che $\mathcal{F}_\star := \mathcal{F} \cup \{A\}$ è un ricoprimento aperto di K. Per la compatezza di K abbiamo che $\mathcal{F}_\star$ ammette un sottoricoprimento finito $\widetilde{\mathcal{F}}_\star$ di K i cui elementi diversi da A formano un sottoricoprimento finito di C estratto dalla famiglia $\mathcal{F}$. □

PROPOSIZIONE 2.3.6. *Se K è un compatto di uno spazio di Hausdorff X allora K è un chiuso di X.*

DIMOSTRAZIONE. Per le proprietà di separazione degli spazi di Hausdorff, per ogni coppia di punti $p \notin K$ e $q \in K$ abbiamo che esistono due aperti $U_{p,q}$ e $V_{p,q}$ tali che:

$$p \in U_{p,q}, \quad q \in V_{p,q}, \quad U_{p,q} \cap V_{p,q} = \varnothing.$$

Siccome $K \subseteq \bigcup_{q \in K} V_{p,q}$ per compattezza abbiamo che esiste un sottoinsieme finito E_p di punti di K per i quali si ha $K \subseteq \bigcup_{q \in E_p} V_{p,q}$. L'insieme $A := \bigcap_{q \in E_p} U_{p,q}$ è un intorno aperto di p, in quanto intersezione di un numero finito di intorni aperti di p, ed è disgiunto da K in quanto A non ha punti in comune con $V_{p,q}$ quando $q \in E_p$. Questo dimostra che ogni punto $p \notin K$ è esterno a K, ovvero il complementare di K è un aperto, e dunque K è un chiuso. □

ESEMPIO 2.3.7. In spazi topologici che non sono di Hausdorff possono esistere compatti che non sono chiusi. Ad esempio, consideriamo sull'insieme $X := \{a, b\}$ la topologia $\mathcal{A} := \{\varnothing, \{a\}, X\}$, abbiamo che ogni sottoinsieme di X è compatto (in quanto si tratta di un insieme finito) ma il sottoinsieme $\{a\}$ non è chiuso (in quanto il suo complementare non è aperto).

Sequenze descrescenti (rispetto all'inclusione) di compatti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota.

PROPOSIZIONE 2.3.8 (Sequenze di compatti incapsulati). *Sia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di uno spazio topologico compatto X tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$:*

- *K_n è un chiuso;*
- *K_n non è vuoto;*
- *$K_{n+1} \subseteq K_n$.*

Allora l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ non è vuota.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ sia vuota. Allora la famiglia di aperti $\mathcal{G} := \{X \setminus K_n : n \in \mathbb{N}\}$ risulta essere un ricoprimento aperto di X. Per compattezza, $\mathcal{G}$ ammette un sottoricoprimento finito di X. Ciò significa che l'intersezione di un numero finito dei chiusi K_n è vuota. Essendo tali chiusi incapsulati ciascuno dentro il precedente, tale intersezione finita coincide con il chiuso con indice più grande, che quindi risulta essere vuoto, contraddicendo le ipotesi. □

OSSERVAZIONE 2.3.9. Nella proposizione 2.3.8, se rinunciamo all'ipotesi che i sottoinsiemi K_n siano chiusi può succedere che l'intersezione vuota; si consideri ad esempio la successione monotona degli intervalli $]0, 1/n]$, sono tutti contenuti nell'intervallo compatto $[0, 1]$ ma la loro intersezione è vuota.

Se invece rinunciamo alla compattezza dello spazio X, anche se tutti i K_n sono chiusi può succedere di avere intersezione vuota; si consideri ad esempio la successione monotona degli intervalli $[n, +\infty[$ che sono chiusi in $\mathbb{R}$ ma hanno intersezione vuota.

La proprietà dei compatti incapsulati può essere generalizzata in modo da fornire una caratterizzazione degli spazi compatti basata su proprietà di famiglie di chiusi invece che di famiglie di aperti.

DEFINIZIONE 2.3.10. Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ di sottoinsiemi di un insieme E si dice che gode della *proprietà dell'intersezione finita* quando $\mathcal{F}$ è non vuota e ogni sottofamiglia finita e non vuota di $\mathcal{F}$ ha intersezione non vuota,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \cap_{j=1}^{n} A_j \neq \varnothing.$$

Indichiamo con $\mathrm{PIF}(E)$ l'insieme di tutte le famiglie di sottoinsiemi di E che godono della proprietà dell'intersezione finita.

Proposizione 2.3.11. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota (ovvero esiste un punto di X che appartiene a tutti gli elementi di $\mathcal{F}$).*

Dimostrazione. Sia X uno spazio topologico compatto, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di chiusi non vuoti di X. Consideriamo la famiglia di aperti $\mathcal{G}$ formata dai complementari degli elementi di $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{G} := \{X \setminus C \colon C \in \mathcal{F}\}.$$

Se $\mathcal{F}$ ha intersezione vuota, allora ogni punto di X è esterno ad almeno un elemento di $\mathcal{F}$ e dunque segue che $\mathcal{G}$ risulta essere un ricoprimento aperto di X. Per la compattezza di X possiamo estrarre da $\mathcal{G}$ un sottoricoprimento finito, e dunque esistono $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{F}$ tali che

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(X \setminus C_j) = X \setminus \bigcap_{j=1}^{n} C_j.$$

Questo significa che l'intersezione $\bigcap_{j=1}^{n} C_j$ non contiene punti di X, ovvero è un insieme vuoto. Quindi se $\mathcal{F} \in \mathrm{PIF}(X)$ allora $\mathcal{F}$ dovrà necessariamente avere intersezione non vuota.

Viceversa, sia ora X uno spazio topologico tale che ogni famiglia $\mathcal{F} \in \mathrm{PIF}(X)$ formata da insiemi chiusi ha intersezione non vuota. Data una famiglia $\mathcal{G}$ di aperti di X, consideriamo la famiglia di chiusi $\mathcal{F}$ formata dai complementari degli elementi di $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{F} := \{X \setminus A \colon A \in \mathcal{G}\}.$$

Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia un ricoprimento aperto di X, ne segue che $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi con intersezione vuota e dunque $\mathcal{F} \in \mathrm{PIF}(X)$. Questo significa che esiste una sottofamiglia finita $\widetilde{\mathcal{F}}$ di chiusi di $\mathcal{F}$ con intersezione vuota, e la corrispondente sottofamiglia $\widetilde{\mathcal{G}}$ dei complementari aperti risulta allora essere un sottoricoprimento finito di X estratto da $\mathcal{G}$. □

Il seguente teorema è un importante risultato nella teoria degli spazi compatti, la sua dimostrazione è basata sul lemma di Zorn e sulla caratterizzazione dei compatti data dalla proposizione 2.3.11.

Teorema 2.3.12 (Tychonoff). *Il prodotto di una qualsiasi famiglia di spazi compatti è uno spazio topologico compatto rispetto alla topologia prodotto.*

Dimostrazione. Una dimostrazione elementare si può trovare nel capitolo 5 del libro di J.Munkres "Topology" (seconda edizione). La traccia di tale dimostrazione è delineata nell'esercizio 2.3.19. □

2.3.2. Compattezza sequenziale. L'insieme dei valori di una successione convergente ha sempre chiusura compatta (vedi esercizio 2.3.17). È naturale aspettarsi che una successione in un compatto possieda almeno una sottosuccessione convergente; questo in generale non è sempre vero, ma si verifica sotto particolari ipotesi per lo spazio topologico (ad esempio nella topologia degli spazi metrici).

Possiamo definire una nozione di compattezza "per successioni".

Definizione 2.3.13. Sia K un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Diciamo che K è *sequenzialmente compatto* se da ogni successione di punti di K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di K.

Esempio 2.3.14. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, che dice che ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ possiede una sottosuccessione convergente, ogni intervallo chiuso e limitato è sequenzialmente compatto.

In generale, le nozioni di insieme compatto e di insieme sequenzialmente compatto sono indipendenti, ci sono esempi di insiemi compatti che non sono sequenzialmente compatti e ci sono esempi di insiemi sequenzialmente compatti che non sono compatti.

Esempio 2.3.15 (Insieme compatto che non è sequenzialmente compatto). Considera l'insieme $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ dotato della topologia discreta, essendo un insieme finito è uno spazio topologico compatto. Considera lo spazio X delle funzioni da $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{Z}_2$,

$$X := \{0,1\}^{\mathbb{R}} = \{f \colon \mathbb{R} \to \{0,1\} \colon , \}$$

si tratta di un prodotto cartesiano di spazi compatti e quindi per il teorema di Tychonoff è compatto rispetto alla topologia prodotto. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la funzione

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } \lfloor 2^n x \rfloor \text{ è pari}, \\ 1, & \text{se } \lfloor 2^n x \rfloor \text{ è dispari}. \end{cases}$$

dove $\lfloor t \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leqslant t\}$ denota la parte intera di t. Quando $x \geqslant 0$, il valore di $f_n(x)$ non è altro che l'n-esima cifra dopo la virgola nella rappresentazione di x in base 2. La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di X; sia $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione. Consideriamo il numero $x_\star \in [0,1[$ la cui rappresentazione binaria è formata da tutte cifre 0 ad eccezione delle cifre di posto n_k con k dispari che poniamo uguali a 1. In questo modo la successione $(f_{n_k}(x_\star))_{k\in\mathbb{N}}$ risulta oscillare tra i valori 0 e 1 senza convergere,

$$f_{n_k}(x_\star) := \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari,} \\ 1, & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La mancanza di convergenza puntuale in un punto implica che non si ha convergenza nella topologia prodotto, e quindi la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non possiede alcuna sottosuccessione convergente.

2.3.3. Esercizi.

Esercizio 2.3.16. Sia X un insieme infinito dotato della topologia *cofinita*, rispetto alla quale un sottoinsieme E di X è chiuso se e solo se E è finito oppure $E = X$. Dimostra che ogni sottoinsieme di X è compatto. In particolare ogni sottoinsieme infinito proprio di X è un compatto, ma non è chiuso.

Esercizio 2.3.17. Sia $(x_n)_{n\in p}$ una successione di punti di uno spazio topopogico X convergente al punto $p \in X$. Dimostra che l'insieme $\{x_k \colon k \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$ è compatto in X.

Esercizio 2.3.18. Sia E un insieme e sia $\mathcal{A} \in PIF(E)$. Considera l'insieme $\Omega := \{\mathcal{B} \in PIF(E) \colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ parzialmente ordinato rispetto all'inclusione.

(a) Sia Γ un sottoinsieme di Ω totalmente ordinato. Dimostra che $\cup\Gamma$ è un maggiorante di Γ in Ω.
(b) Utilizzando il lemma di Zorn e il punto (a), dimostra che esiste un elemento massimale $\mathcal{M}$ in Ω.
(c) Dimostra che l'intersezione finita di insiemi contenuti in $\mathcal{M}$ è ancora un insieme contenuto in $\mathcal{M}$.
(d) Utilizzando il punto (c), dimostra che se un sottoinsieme A di E ha intersezione non vuota con tutti gli insiemi contenuti in $\mathcal{M}$ allora $A \in \mathcal{M}$.

Esercizio 2.3.19 (Dimostrazione del teorema di Tychonoff). Dimostra il teorema 2.3.12 seguendo questa traccia:

- Sia $\mathcal{F} = (Y_\alpha)_{\alpha\in I}$ una famiglia di spazi topologici compatti e sia $X = \prod \mathcal{F}$ il loro prodotto cartesiano dotato della topologia prodotto. Considera una famiglia $\mathcal{C} \in PIF(X)$ formata da chiusi di X. Sia $\mathcal{M}$ una famiglia massimale tra tutte le famiglie in $\mathrm{PIF}(X)$ che contengono $\mathcal{C}$. *[L'esistenza di tale elemento massimale è l'oggetto del punto (b) dell'esercizio 2.3.18.]* Spiega perché se dimostri che $\cap_{A\in\mathcal{M}}\overline{A} \neq \varnothing$ allora segue che X è compatto. *[Qui serve la proposizione 2.3.11.]*
- Per ogni indice $\alpha \in I$, sia $\pi_\alpha \colon X \to Y_\alpha$ la proiezione canonica,
$$f = (f_\alpha)_{\alpha\in I} \mapsto \pi_\alpha(f) = f_\alpha.$$
Sia $\mathcal{M}_\alpha := \left\{\overline{\pi_\alpha(A)} \colon A \in \mathcal{M}\right\}$ la famiglia delle chiusure delle immagini degli insiemi di $\mathcal{M}$ tramite π_α. Verifica che $\mathcal{M}_\alpha \in \mathrm{PIF}(Y_\alpha)$. Per la compattezza di Y_α esisterà un elemento $p_\alpha \in \cap\mathcal{M}_\alpha$. Possiamo così definire un elemento $p = (p_\alpha)_{\alpha\in I} \in X$ tale che $p_\alpha \in \overline{\pi_\alpha(A)}$ per ogni $A \in \mathcal{M}$.
- Sia $\beta \in I$ e sia U un intorno aperto di p_β in Y_β. Dimostra che $\pi_\beta^{-1}(U)$ è un intorno aperto di p che contiene punti di ogni insieme $A \in \mathcal{M}$.
- Dimostra che ogni insieme della forma $\pi_\beta^{-1}(U)$, con U intorno aperto di p_β in Y_β, è un elemento di $\mathcal{M}$. *[Qui puoi utilizzare il punto (d) dell'esercizio 2.3.18.]*
- Deduci dai punti precedenti che ogni intorno aperto V del punto p in X è un elemento di $\mathcal{M}$. *[Qui, ricordando come sono fatti gli aperti nella topologia prodotto, puoi utilizzare il punto (c) dell'esercizio 2.3.18.]*
- Dimostra che ogni intorno aperto V del punto p in X interseca ogni insieme $A \in \mathcal{M}$ e dunque $p \in \overline{A}$. Da ciò segue che l'intersezione $\cap_{A\in\mathcal{M}}\overline{A}$ è non vuota.

2.4. Spazi metrici

2.4.1. Funzione distanza.

2.4.2. Topologia metrica.

2.4.3. Spazi metrici compatti.

2.5. Lemma di Baire

Parte 2

Teoremi fondamentali dell'Analisi Funzionale

CAPITOLO 3

Strutture lineari

3.1. Spazi normati e operatori lineari continui

3.2. Funzionali lineari e spazi duali

3.3. Versione analitica del Teorema di Hahn-Banach

3.4. Versione geometrica del Teorema di Hahn-Banach

CAPITOLO 4

Principio di uniforme limitatezza

4.1. Teorema di Banach-Steinhaus

4.2. Teorema della mappa aperta

4.3. Teorema del grafico chiuso

CAPITOLO 5

Strutture deboli

5.1. Topologia debole

5.2. Topologia $\star$-debole

5.3. Spazi riflessivi

5.4. Spazi separabili

CAPITOLO 6

Proprietà degli spazi funzionali

6.1. Spazi uniformemente convessi

6.2. Spazi L^p

6.3. Spazi di Hilbert

6.4. Funzionali convessi

6.5. Operatori compatti

6.6. Teorema di Ascoli-Arzelà

6.7. Esercizi di riepilogo

Parte 3

Applicazioni a problemi di Equazioni Differenziali

CAPITOLO 7

Spazi di Sobolev

7.1. Derivate deboli

7.2. Spazi di Sobolev

7.3. Immersioni di Sobolev

7.4. Teorema di Rellich-Kondrachov

7.5. Disuguaglianza di Poincaré

CAPITOLO 8

Equazioni alle derivate parziali

8.1. Soluzioni deboli per problemi ellittici

8.2. Soluzioni deboli per problemi parabolici

8.3. Soluzioni deboli per problemi iperbolici