mercoledì 15 gennaio 2014

Conservazione dell’energia

Problema 1.

Un corpo inizialmente fermo, scivola su un piano lungo 300 m ed inclinato di 30° rispetto all’orizzontale, e, dopo aver raggiunto la base, continua a muoversi su un piano orizzontale. Si calcoli la distanza percorsa dal punto lungo il piano orizzontale prima di fermarsi tenendo presente che in ogni tratto del percorso sono presenti forze d’attrito il cui coefficiente dinamico è 0.2.

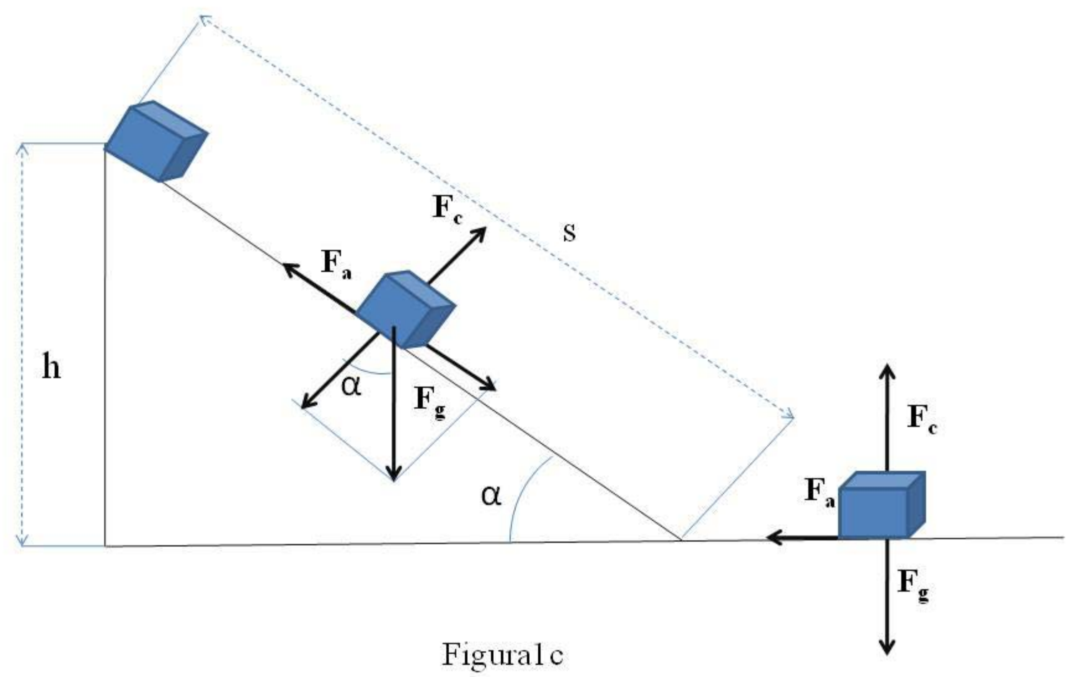

Figura1c

Le forze agenti sul corpo sono: la forza di contatto esercitata dalla superficie del piano inclinato e di quello orizzontale; la forza gravitazionale esercitata dalla terra e la forza d’attrito tra il corpo e la superficie con cui viene a contatto durante il moto. Il sistema materiale formato da corpo, terra, piano inclinato ed orizzontale, non scambiando energia con l’ambiente esterno, è isolato e quindi nel passaggio dalla configurazione iniziale, in cui il corpo si trova fermo sul piano inclinato a quella finale, in cui si ferma lungo il piano orizzontale, l’energia del sistema resta costante. Tenendo presente che il sistema è sottoposto a forze conservative e non conservative, il principio di conservazione dell’energia può essere espresso nella forma

$$\Delta K + \Delta U + \Delta I = 0$$

ove ΔK , ΔU e ΔI sono rispettivamente la somma delle variazioni dell’energia cinetica, potenziale ed interna degli elementi componenti il sistema. Poiché sia nella configurazione iniziale che in quella finale il corpo ha velocità nulla, la variazione dell’energia cinetica è

$$\Delta K = K_f - K_i = 0$$

Tale variazione rappresenta anche quella dell’intero sistema perché nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale le variazioni delle velocità degli altri componenti sono nulle o comunque trascurabili. La variazione dell'energia potenziale gravitazionale del corpo, o meglio dell'insieme corpo- massa gravitazionale, è

$$\Delta U = U_f - U_i = -F_g h$$

ove F_g è il modulo della forza gravitazionale costante ed h è la differenza di altezza del corpo nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale. L'espressione scritta rappresenta anche la variazione dell'energia potenziale del sistema perché le variazioni delle energie potenziali dovuta alle mutue interazioni degli altri componenti sono nulle o comunque trascurabili. Infine la variazione di energia interna del sistema è dovuta solo all'interazione corpo – superfici scabre con cui viene a contatto durante il moto e può essere valutata mediante il lavoro delle forze d'attrito

$$\Delta I = -L_a$$

Indicando con L'_a e L''_a e con s ed ℓ i lavori ed i moduli degli spostamenti relativi al piano inclinato e a quello orizzontale, essendo la forza d'attrito $\boldsymbol{F_a}$ costante durante ogni spostamento, si ha

$$L'_a = \boldsymbol{F_a} \cdot \boldsymbol{s} = -F_a s = -\mu_k F_c s = -\mu_k F_g s \cos\alpha$$

ed

$$L''_a = \boldsymbol{F_a} \cdot \boldsymbol{\ell} = -F_a \ell = -\mu_k F_c \ell = -\mu_k F_g \ell$$

In conclusione è

$$\Delta I = \quad (L'_a + L''_a) = \mu_k F_g (s \cos\alpha + \ell)$$

Il principio di conservazione dell'energia risulta quindi

$$-F_g h + \mu_k F_g (s\cos\alpha + \ell) = 0$$

da cui si ha

$$\ell = \frac{h - \mu_k s \cos\alpha}{\mu_k}$$

Avendo presente che $h - s \sin\alpha$ e sostituendo i valori espressi nel S.I. si ottiene

$$\ell = \frac{s(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha)}{\mu_k} = \frac{300(\sin 30° - 0.2 \times \cos(30°))}{0.2} = 490.2\ m$$

Metodo alternativo. Il principio di conservazione dell'energia per un sistema isolato in cui sono attive forze conservative e non conservative, può essere espresso come

$$K_i + U_i = K_f + U_f + \Delta I$$

ove $K_i + U_i$, $K_f + U_f$ e ΔI sono rispettivamente la somma dell'energia meccanica iniziale e finale e la variazione dell'energia interna dei componenti il sistema. Nel caso in esame quando si passa dalla configurazione iniziale a quella finale solo l'energia meccanica del corpo viene convertita in altre forme d'energia; quella relativa agli altri elementi del sistema non subisce modificazioni apprezzabili e quindi può essere trascurata. Se si sceglie come piano di riferimento per la valutazione assoluta dell'energia potenziale gravitazionale quello orizzontale, l'energia meccanica finale risulta nulla e quindi il principio di conservazione dell'energia diventa

$$K_i + U_i = \Delta I$$

L'energia meccanica iniziale del corpo viene trasformata in energia interna del corpo stesso e delle superfici scabre con cui viene a contatto durante il moto. K_i, U_i e ΔI sono calcolabili mediante considerazioni analoghe a quelle già svolte.

Problema 2

Un corpo avente massa 1 kg e velocità iniziale di modulo v_0, scivola su un piano lungo 2 m e inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Alla fine del suddetto piano percorre un tratto orizzontale scabro con coefficiente d'attrito di valore 0.2, urta una molla elicoidale, avente attrito interno e massa trascurabili, fissata ad una parete rigida e si ferma dopo averla compressa di 10 cm. Sapendo che il percorso sul piano orizzontale è lungo 300 cm, compresa la deformazione della molla, e che la costante elastica della molla è di 2000 Nm^{-1}, si calcoli la velocità iniziale del corpo.

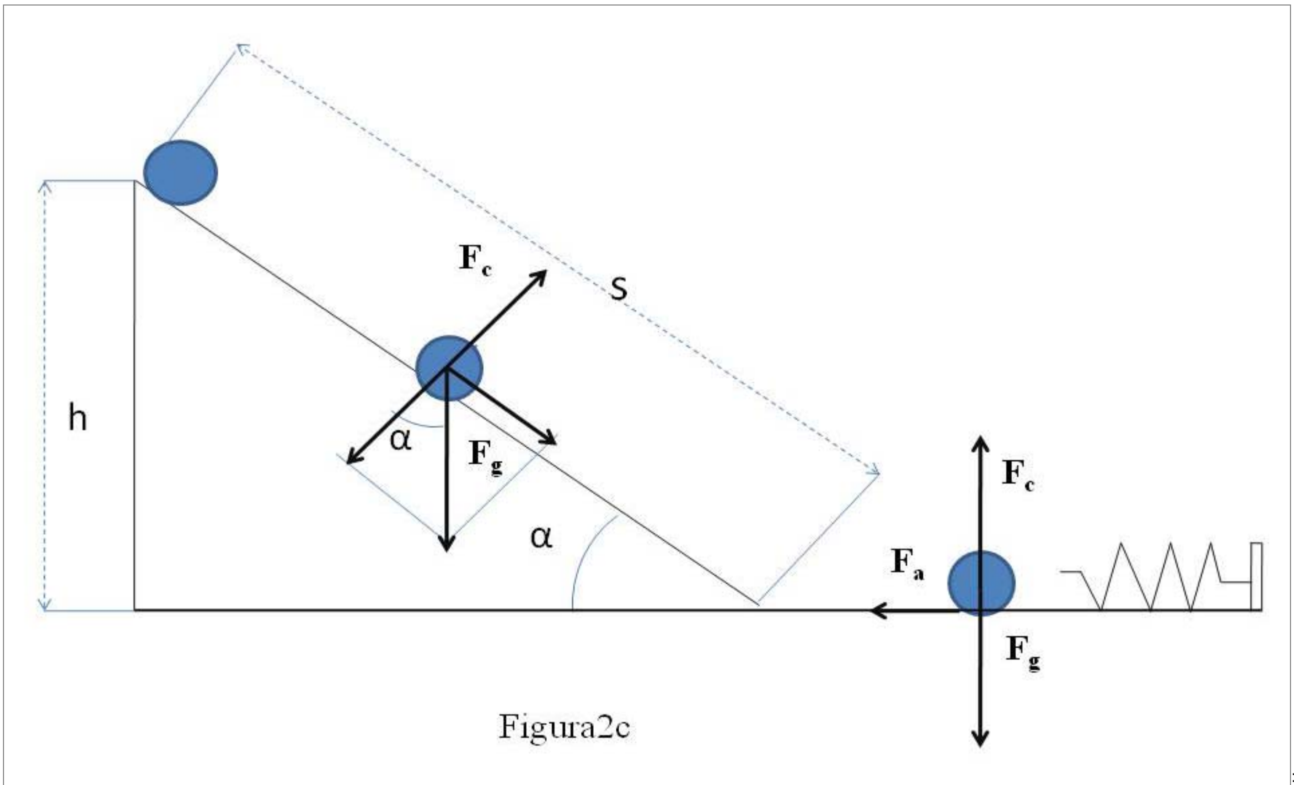

Figura2c

#

Le forze agenti sul corpo sono: la forza di contatto esercitata sia dalla superficie del piano inclinato e da quella del piano orizzontale, la forza gravitazionale dovuta all'interazione con la massa terrestre, la forza d'attrito causata dall'interazione tra il corpo e la superficie con cui viene a contatto durante il moto e la forza elastica esercitata dalla molla. Il sistema formato da corpo, massa terrestre, piano inclinato, piano orizzontale, molla elicoidale è isolato perché non è sottoposto a nessuna forza esterna, e quindi, nel passaggio dalla configurazione iniziale, in cui il corpo scende lungo il piano inclinato con velocità nota a quella finale in cui, dopo aver compresso la molla, si ferma sul piano orizzontale, l'energia del sistema resta costante. Tenendo presente che le forze interne al sistema considerato sono conservative e non conservative, il principio di conservazione dell'energia può essere espresso nella forma

$$\Delta K + \Delta U + \Delta I = 0$$

ove ΔK , ΔU e ΔI sono rispettivamente la somma delle variazioni dell'energia cinetica, potenziale ed interna degli elementi componenti il sistema. Poiché nella configurazione iniziale il corpo di massa m ha velocità di modulo v_0 e in quella finale ha velocità nulla, la variazione dell' energia cinetica è #

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Tale variazione, rappresenta anche quella dell'intero sistema perché nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale, le variazioni delle velocità degli altri componenti sono nulle o comunque trascurabili.
Quando il sistema si trova nella configurazione iniziale, il corpo interagisce con il campo gravitazionale di modulo γ_g e quindi la sua energia potenziale, o meglio quella dell'insieme corpo - massa terrestre, è $U_i = m\gamma_g h$ ove h è l'altezza del corpo rispetto al piano orizzontale. Quando il sistema si trova nella configurazione finale il corpo è sottoposto all'azione delle forze elastiche e la sua energia potenziale, o meglio quello della coppia corpo – molla, è $U_f = \frac{1}{2}ka^2$ ove k ed a sono la costante elastica e la compressione della molla. La variazione dell'energia potenziale dovuta all'interazione del corpo con i componenti del sistema risulta quindi

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}ka^2 - m\gamma_g h$$

L'espressione scritta rappresenta anche la variazione dell'energia potenziale del sistema perché nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale le variazioni delle energie potenziali degli altri componenti sono nulle o comunque trascurabili. Infine la variazione di energia interna del sistema è dovuta solo all'interazione corpo - piano orizzontale e può essere valutata mediante il lavoro delle forze d'attrito. Se μ_k è il coefficiente dinamico di tali forze, presenti solo nel tratto orizzontale scabro lungo ℓ, si ha $L_a = -\mu_k m\gamma_g \ell$ e quindi la variazione di energia interna del sistema risulta

$$\Delta I = -L_a = \mu_k m\gamma_g \ell$$

Il principio di conservazione dell'energia può quindi essere scritto

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2 - m\gamma_g h + \mu_k m\gamma_g \ell = 0$$

da cui si ricava

$$v_0 = \sqrt{\frac{ka^2 - 2m\gamma_g(h - \mu_k \ell)}{m}}$$

Sostituendo ai simboli delle grandezze fisiche i loro valori numerici espressi nel S.I. si ottiene

$$v_0 = 3.48\ ms^{-1}$$

Problema 3

Un corpo con velocità iniziale di modulo 2 ms^{-1}, scivola su un piano liscio lungo 10 m e inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Arrivato alla fine del piano inclinato percorre un tratto orizzontale scabro lungo 200 cm e successivamente sale su un piano scabro formante un angolo di 45° con l'orizzontale. Si calcoli la massima altezza raggiunta dal corpo nell'ipotesi che forze d'attrito abbiano coefficiente dinamico 0.2.

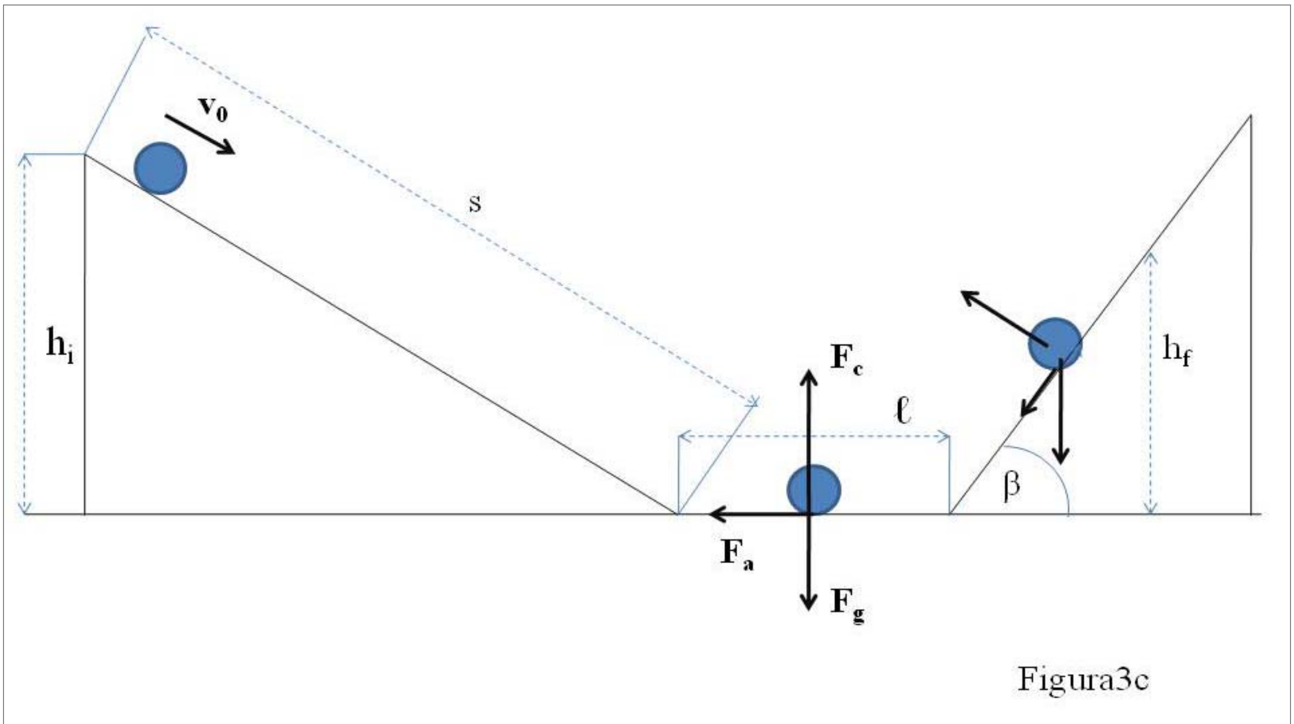

Figura3c

Poiché le forze agenti sul corpo sono dovute all'interazione con la massa terrestre e con le superfici scabre, il sistema formato dal corpo, dalla terra, dai due piani inclinati e da quello orizzontale, è isolato. Nel passaggio dalla configurazione iniziale, in cui il corpo è sul piano liscio ed ha una velocità nota, a quella finale, in cui, arrivato alla massima altezza del piano inclinato scabro, si ferma, tale sistema è sottoposto a forze conservative non conservative. Il principio di conservazione dell'energia può quindi essere scritto come #

$$\Delta K + \Delta U + \Delta I = 0$$

ove $\Delta K, \Delta U$ e ΔI sono le variazioni dell'energia cinetica, potenziale ed interna dei componenti il sistema. Nella configurazione iniziale il corpo di massa m ha una velocità v_0 a quello finale ha velocità nulla. La variazione dell' energia cinetica del corpo risulta #

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Questa variazione rappresenta quella del sistema isolato perché le variazioni dell'energia cinetica degli altri componenti sono nulle o trascurabili. Se h_i ed h_f sono le altezze del corpo rispetto al piano orizzontale nelle configurazioni iniziali e finali, la variazione dell'energia potenziale gravitazionale del corpo, o più esattamente della coppia corpo-massa terrestre, è #

$$\Delta U = U_f - U_i = m\gamma_g(h_f - h_i)$$

Questa variazione può essere considerata quella del sistema perché le variazioni dell'energia potenziale dei rimanenti componenti del sistema sono nulle o trascurabili. Infine la variazione dell'energia interna del sistema è quella dell'interazione corpo - superfici scabre con cui viene a contatto durante il moto ed è valutabile mediante il lavoro delle forze d'attrito presenti nel tratto orizzontale lungo ℓ e nel lungo la salita del piano inclinato di un angolo β . Se μ_k è il coefficiente d'attrito dinamico si ha #

$$\Delta I = -L_a = \mu_k m \gamma_g \left(\ell + \cos\beta \frac{\mathbf{h_f}}{\sin\boldsymbol{\beta}}\right) = \mu_k m \gamma_g \left(\ell + \frac{\mathbf{h_f}}{\tan\boldsymbol{\beta}}\right)$$

L'equazione della conservazione dell'energia risulta quindi

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 + m\gamma_g (h_f - h_i) + \mu_k m \gamma_g \left(\ell + \frac{\mathbf{h_f}}{\tan\boldsymbol{\beta}}\right) = 0$$

Tenendo presente che l'incognita è h_f e che $h_i = s \sin\alpha$, si ha

$$h_f = \frac{2\gamma_g \left(s \sin\alpha - \mu_k l\right) + v_0^2}{2\gamma_g \left(1 + \frac{\mu_k}{\tan\beta}\right)}$$

Sostituendo ai simboli delle grandezze fisiche i loro valori numerici espressi nel S.I. si ottiene

$$h_f = \frac{2 \times 9.81 \times (10 \times 0.5 - 0.2 \times 2) + 2^2}{2 \times 9.81 \times (1 + 0.2)}$$

e svolgendo i calcoli si ha

$$h_f = 4.00 m$$

Problema 4

Su un tavolo orizzontale liscio che si trova ad una altezza di 1 m rispetto al pavimento, è appoggiato un cubo di rame con spigolo di 4 cm. Il cubo è appoggiato anche ad una molla elicoidale di massa trascurabile e di costante elastica 200 Nm^{-1}, posta orizzontalmente e compressa. Rilasciata la molla, il cubo acquista una certa velocità e, oltrepassato il limite del piano di appoggio, cade ad una distanza di 70 cm dal piede del medesimo. Si calcoli l'ascissa di compressione della molla tenendo presente che la densità del rame è 8.5 gcm^{-3}.

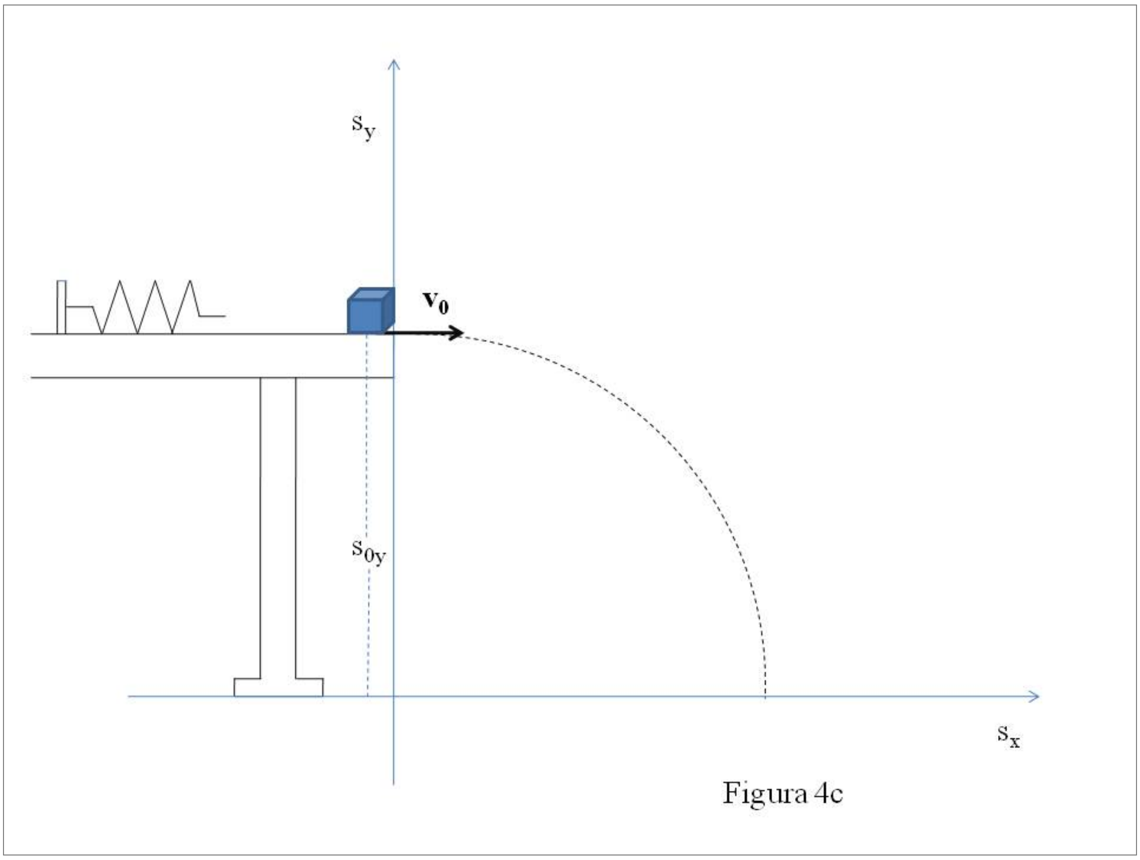

Figura 4c

Le forze agenti sul corpo sono: la forza di contatto esercitata dalla superficie del tavolo, la forza gravitazionale dovuta all'interazione con la massa terrestre e la forza elastica esercitata dalla molla. Il sistema formato da cubo, massa terrestre, molla elicoidale è isolato e quindi la sua energia totale si conserva. In base al principio di conservazione dell'energia, poiché le forze interne al sistema sono conservative e a lavoro nullo, quando il sistema passa dalla configurazione iniziale in cui il cubo è fermo sul tavolo orizzontale e comprime la molla a quella finale in cui il cubo sta arrivando sul pavimento, l'energia meccanica del sistema si conserva ossia si ha

$\Delta K + \Delta U = 0$

L'energia potenziale U_i del cubo quando il sistema si trova nella configurazione iniziale è dovuta sia all'azione delle forze elastiche che all'interazione con la massa terrestre. Indicate con U_i' ed U_i'' tali energie potenziali, si ha $U_i = U_i' + U_i''$. Se k ed a sono la costante elastica e la compressione della molla, risulta $U_i' = \frac{1}{2}ka^2$. Assumendo come sistema di riferimento quello indicato in figura, se s_{0y} è l'altezza del tavolo rispetto al pavimento e γ_g il modulo del campo gravitazionale si ha $U_i'' = m\gamma_g s_{0y}$. L'energia potenziale iniziale risulta quindi $U_i = \frac{1}{2}ka^2 + m\gamma_g s_{0y}$ L'energia potenziale U_f del cubo quando il sistema si trova nella configurazione finale è nulla e quindi la variazione dell'energia potenziale risulta #

$$\Delta U = U_f - U_i = -\left(\frac{1}{2}ka^2 + m\gamma_g s_{0y}\right)$$

Tale variazione è relativa al cubo, ma rappresenta anche quella del sistema perché quelle relative agli altri elementi del sistema non sono apprezzabili. L'energia cinetica del cubo quando il sistema si trova nella configurazione iniziale è nulla perché è fermo mentre quella relativa alla configurazione finale è $K_f = \frac{1}{2}mv^2$ ove v è la velocità con cui il cubo arriva sul pavimento. La variazione dell'energia cinetica risulta quindi

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

Essendo

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

l'equazione che esprime la conservazione dell'energia risulta

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - \left(\frac{1}{2}ka^2 + m\gamma_g s_{0y}\right) = 0$$

Occorre ricavare i valori di v_x^2 e v_y^2 mediante i dati assegnati dal problema. Il moto lungo l'asse delle ascisse è uniforme e quindi

$$s_x = v_0 t \qquad\qquad v_x = v_0$$

mentre quello lungo l'asse delle ordinate è uniformemente vario e quindi

$$s_y = s_{0y} - \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(s_y - s_{0y})$$

Quando il cubo arriva sul pavimento è $s_y = 0$ e di conseguenza #

$$v_y^2 = 2g s_{0y}$$

Inoltre poiché il tempo $\bar{t}$ impiegato dal corpo per arrivare sul pavimento è

$$\bar{t}^2 = \frac{2s_{0y}}{g}$$

si ha

$$v_x^2 = v_0^2 = \frac{\overline{s_x}^2}{\bar{t}^2} = \frac{g\overline{s_x}^2}{2s_{0y}}$$

L'equazione che esprime la conservazione dell'energia diventa

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{g\overline{s_x}^2}{2s_{0y}} + 2gs_{0y}\right) - \left(\frac{1}{2}ka^2 + m\gamma_g s_{0y}\right) = 0$$

e, tenuto conto che $\gamma_g = g$, dopo le opportune semplificazioni si ottiene per l'ascissa di compressione

$$a = \bar{s}_x \sqrt{\frac{mg}{2ks_{0y}}}$$

Sostituendo ai simboli delle grandezze fisiche i loro valori numerici espressi nel SI si ottiene

$$a = 8.08 \cdot 10^{-2} m$$

Metodo alternativo. Il principio di conservazione dell'energia per un sistema isolato in cui sono attive solo forze conservative può essere espresso come

$K_i + U_i = K_f + U_f$

ove $K_i + U_i$, $K_f + U_f$ sono rispettivamente la somma dell'energia meccanica iniziale e finale dei componenti il sistema. Nel caso in esame quando si passa dalla configurazione iniziale a quella finale solo le energie cinetiche e potenziali del cubo vengono modificate. Poiché quelle relative agli altri elementi del sistema non subiscono modificazioni apprezzabili, possono essere trascurate e quindi le grandezze fisiche che compaiono nell'espressione del principio di conservazione dell'energia sono riferite solo al cubo. Inizialmente l'energia cinetica del cubo è nulla e nella configurazione finale, avendo scelto come riferimento per l'energia potenziale gravitazionale assoluta il pavimento, l'energia potenziale del medesimo risulta nulla. L'espressione precedente diventa quindi #

$U_i = K_f$

ossia l'energia potenziale iniziale del cubo viene convertita in energia cinetica. Queste grandezze fisiche possono essere calcolate mediante considerazioni già svolte precedentemente.

Problema 5

Una guida liscia a forma di quarto di cerchio di raggio 120 cm è saldata all'estremità inferiore ad una superficie orizzontale piana. Fissata sulla superficie vi è una molla elicoidale priva d'attrito interno, di massa trascurabile e costante elastica 700 Nm^{-1} . Un corpo di massa 500 g, è lasciato libero con velocità nulla all'estremo superiore della guida ed è arrestato dalla molla sulla superficie orizzontale. Si calcoli la velocità del corpo quando la molla è stata compressa di 10 cm.

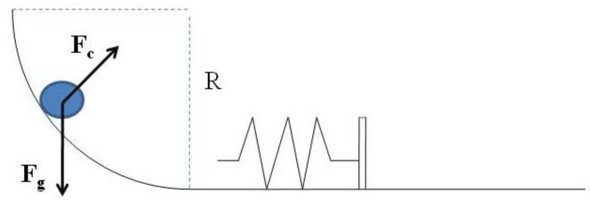

Figura 5 c

Le forze agenti sul corpo sono: la forza di contatto esercitata dalla superficie della guida, la forza gravitazionale dovuta all'interazione con la massa terrestre e la forza elastica esercitata dalla molla. Il sistema formato dall'oggetto, massa terrestre, molla elicoidale è isolato e quindi la sua energia totale si conserva. Le forze interne al sistema sono conservative e a lavoro nullo, e quindi, quando si passa dalla configurazione iniziale, in cui l'oggetto è fermo sull'estremo superiore della guida, a quella finale, in cui l'oggetto sta comprimendo la molla, l' energia meccanica del sistema si conserva, ossia si ha

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Se il corpo di massa m ha velocità di modulo v nella configurazione finale del sistema, la variazione dell'energia cinetica è

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$

e tale variazione è anche quella del sistema perché la variazione dell'energia cinetica dei rimanenti elementi del sistema è trascurabile. Fissata la superficie orizzontale come piano di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale ed indicato con a la compressione della molla di costante k , la variazione dell'energia potenziale dell'oggetto nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale è

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}ka^2 - m\gamma_g R$$

ove R è il raggio della guida liscia. L'espressione della conservazione dell'energia diventa quindi

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ka^2 - m\gamma_g R = 0$$

Risolvendo rispetto a v si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2m\gamma_g R - ka^2}{m}}$$

Sostituendo ai simboli i valori espressi nel S.I. si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 0.5 \times 9.81 \times 1.20 - 700 \times 0.1^2}{0.5}} = 3.08\ ms^{-1}$$