Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 399-402

Teoria della iterazione, mappe olomorfe che commutano e dinamica complessa al punto di Wolff.

Bisi Cinzia

Questo lavoro è principalmente focalizzato sulla teoria della iterazione, lo studio delle famiglie di mappe olomorfe che commutano e la dinamica complessa nel punto di Wolff, quando questo sta sul bordo, per auto-mappe olomorfe della palla unitaria aperta, in una e più variabili. La teoria della iterazione è un soggetto classico di grande interesse, con interessanti problemi aperti al vaglio in questi ultimi anni. È relativa allo studio del comportamento della successione $\{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$, dove $f^n = f \circ \ldots \circ f$ (n-times) è la n-esima iterata di f. I primi risultati di base in tale materia uscirono alla fine del diciannovesimo secolo: Koenigs and Schroeder pubblicarono alcuni risultati poi rivelatisi produttivi sulla soluzione di certe equazioni funzionali, usando tecniche della iterazione. Nella prima metà del ventesimo secolo, altri fondamentali risultati vennero da Julia, Fatou, Denjoy, Hadamard, Wolff, Carathèodory e Valiron; attorno agli anni cinquanta Sternberg, Baker e Pommerenke dettero interessanti contributi alla materia. Tra i molti recenti risultati, le nostre ricerche si sono basate in particolare, e sono iniziate, dai lavori di Behan, Cowen [2], [3], MacCluer [4] e Perez-Marco [5].

Sin dall'inizio della teoria, era chiaro che il comportamento delle iterate di una auto-mappa olomorfa del disco unitario Δ di $\mathbf{C}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$, dipendesse dalla esistenza di un punto fisso, e dal valore della derivata in quel punto fisso. Presto, risultati dovuti a Julia, Wolff e Caratheodory affermarono che ogni mappa $f \in$ *Hol*(Δ, Δ) ha un punto fisso in Δ o un «punto fisso al bordo di Δ,» il cosiddetto punto di Wolff. Nell'ultimo caso, la derivata $f'(\tau)$ nel punto di Wolff τ di f è definita come limite non-tangenziale e segue essere $0 < f'(\tau) \leq 1$.

La tesi si divide in tre capitoli. Il primo riguarda il caso di una variabile. La sezione 1.1 è dedicata a risultati classici relativi alla equazione di Schroeder e alla mappa di Koenigs, che corrisponde alla situazione in cui il punto fisso della automappa olomorfa del disco unitario aperto Δ, è in Δ. La sezione 1.2 studia le famiglie di mappe olomorfe da Δ in sè, che commutano. In questa sezione, noi studiamo il problema di caratterizzare il centralizzante di una data mappa $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$, senza punti fissi in Δ (cioè con punto di Wolff τ sul bordo di Δ), nel caso parabolico, cioè quando il limite non-tangenziale di $f'(z)$ nel punto di Wolff τ è uguale ad 1.

Il giusto strumento per affrontare questo problema aperto sembrò essere il «modello lineare fratto» nel senso di Cowen, [2], [3]. Infatti un modello lineare fratto è un modo abbastanza sofisticato di associare un automorfismo di $\mathbf{C}$ o di Δ ad una mappa $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$, coniugandola per mezzo di una mappa analitica σ_f da Δ in sè o in $\mathbf{C}$. Diversi risultati in questi ambiti dipendono direttamente dal comportamento della successione $\{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ delle iterate di f.

Teorema 1. – *Nel caso parabolico, con l'ipotesi di convergenza «non-tangenziale» della successione delle iterate di f al punto di Wolff, il centralizzante di f*

coincide con il semigruppo di pseudo-iterazione di f, cioè con le mappe g che dopo il coniugio con la stessa σ_f di f, diventano un automorfismo che commuta con l'automorfismo associato a f.

Nella sezione 1.2.3 abbiamo inoltre dato una generalizzazione di un teorema classico di Pranger (vedi la sottosezione 1.1.3) relativo alla corrispondenza 1 : 1 tra le famiglie di mappe olomorfe di Δ che commutano e che fissano l'origine, ed i semigruppi (in **C**) delle loro derivate prime in 0. La nostra generalizzazione riguarda il caso di auto-mappe olomorfe di Δ che commutano, con punto di Wolff al bordo: nel caso di convergenza non-tangenziale della successione delle iterate di una data mappa parabolica f, un semigruppo di $\mathrm{Aut}(\Delta)$ o $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ corrisponde al centralizzante di f, che coincide con il semigruppo di pseudo-iterazione di f.

In questo contesto, la caratterizzazione del centralizzante di f nel caso parabolico, con l'ipotesi della convergenza «tangenziale» della successione delle iterate al punto di Wolff al bordo, è ancora aperta. In questa direzione abbiamo fatto alcuni passi avanti nella teoria, dando condizioni che garantiscono l'equivalenza tra essere nel semigruppo di pseudo-iterazione di una data mappa f e commutare con essa. Abbiamo anche trovato un «parziale controesempio» a quella equivalenza per mostrare che le condizioni date sono necessarie: abbiamo trovato due mappe f, g tali che $f \circ g = g \circ f$, $g \notin P_f$ ed, allo stesso tempo, $f \in P_g$.

Nella sezione 1.5 studiamo la connessione tra l'insieme di mappe che commutano con una data f, il semigruppo di pseudo-iterazione di f e la ciclicità dell'operatore di composizione associato ad f.

Nel caso di regolarità di $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ (i.e. $f \in C^2(\tau)$ almeno), un lavoro di Bourdon e Shapiro risponde ad una congettura che Cowen ha avanzato alla fine del suo lavoro [2]; più precisamente Cowen ha asserito che se $f'(\tau) = 1$ allora $\mathrm{Arg}\, f''(\tau)$ può essere usato per distinguere il caso in cui f è coniugato ad un automorfismo di **C** ed il caso in cui f è coniugato ad automorfismo di Δ; più precisamente $f''(\tau)$ immaginaria pura implica che l'automorfismo associato ad f stia in $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Bourdon e Shapiro hanno provato questo fatto usando un diverso «modello lineare fratto» per mappe con una certa regolarità nel punto di Wolff. Essi sono sempre in grado di coniugare una mappa «regolare» ad una mappa lineare fratta (non necessariamente un automorfismo) del semipiano destro. Sino ad ora la congettura è ancora aperta nel caso di f almeno $C^2(\tau)$ con $\Re e f''(\tau) > 0$. Nel caso parabolico, quando lo spazio modello di f è Δ, la caratterizzazione del centralizzante di f per mezzo del semigruppo di pseudo-iterazione di f è nota; invece non è chiaro ancora se questa caratterizzazione è vera quando lo spazio modello di f è **C**.

Il secondo capitolo della tesi è nell'ambito delle più variabili. Prima di tutto abbiamo costruito un «modello» lineare fratto astratto per $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{B}^n, \mathbf{B}^n)$.

Il modello è astratto perché è piuttosto difficile capire per mezzo di quale concreto dominio Ω di $\mathbf{C}^n$ si possa coniugare f ad un automorfismo. Sino ad ora, non è chiaro quali ipotesi bisogna mettere su f per ottenere da f, per coniugio, un automorfismo di un dominio complesso noto.

La seconda parte del capitolo 2, sezione 2.2, è dedicata allo studio geometrico di mappe lineari fratte della palla unitaria, prima di tutto come una possibile classe di rappresentanti di mappe in un modello lineare fratto il cui dominio modello è uguale a $\mathbf{B}^n$, e naturalmente per il loro interesse come migliore «approssimazione» degli automorfismi di $\mathbf{B}^n$. Abbiamo dato una classificazione originale delle mappe lineari fratte (a meno di coniugio per automorfismi) in relazione ai loro punti fissi e usando la loro principale proprietà di «rigidità» sulle «slices» di $\mathbf{B}^n$. Infatti una mappa lineare fratta di $\mathbf{B}^n$, così come un automorfismo di $\mathbf{B}^n$, ha la proprietà di mandare ogni «slice» (cioè uno spazio affine 1-dimensionale intersecato con $\mathbf{B}^n$) in un'altra «slice».

DEFINIZIONE *Sia* $\mathcal{P}_0 := span_{\mathbf{C}}\{x \in \partial\mathbf{B}^n\colon f(x) = x\}$ *e* $p_0 := dim_{\mathbf{C}}\mathcal{P}_0$. *If* $p_0 > 0$ *e* $f(x_0) = x_0$, $x_0 \in \partial\mathbf{B}^n$, *sia* $\mathcal{P}_1 := span_{\mathbf{C}}\{x - x_0\colon f(x) = x,\ x \in \partial\mathbf{B}^n\}$ *e* $p_1 := dim_{\mathbf{C}}\mathcal{P}_1$. *Infine, sia* $\mathcal{P}_1^{\mathbf{R}} := span_{\mathbf{R}}\{x - x_0\colon f(x) = x,\ x \in \partial\mathbf{B}^n\}$ *e* $p_1^{\mathbf{R}} := dim_{\mathbf{R}} P_1^{\mathbf{R}}$.

TEOREMA 2. – *Sia f una mappa lineare fratta di* $\mathbf{B}^n$. *Uno ed uno solo dei seguenti casi è possibile:*

(1.) $p_0 = 0$ *se e solo se f ha un solo punto fisso isolato in* $\mathbf{B}^n$ *e non ha punti fissi su* $\partial\mathbf{B}^n$;

(2.) $p_0 > 0$ *se e solo se f ha al meno un punto fisso al bordo. In questo caso:*

(*i*) $p_1 = 0$ *se e solo se f ha un solo punto fisso al bordo. In questo caso è l'unico punto fisso di f in* $\overline{\mathbf{B}^n}$ *se e solo se il coefficiente di dilatazione al bordo di f in quel punto è minore o uguale ad* 1. *Altrimenti f ha pure un punto fisso isolato dentro* $\mathbf{B}^n$.

(*ii*) $p_1 = 1$ *se e solo se una (ed una sola) delle due affermazioni seguenti vale:*

(*a*) $p_1^{\mathbf{R}} = 1$, *f ha solo due punti fissi su* $\partial\mathbf{B}^n$, *e f è coniugata ad una mappa che ha un automorfismo iperbolico (diverso dalla identità) come prima coordinata, i.e. f è coniugata ad una mappa della forma:*

$$z \mapsto \left(\frac{az_1 + b}{bz_1 + a},\ \frac{A_1 z'}{bz_1 + a} \right),$$

ove $a = \cosh t$, $b = \sinh t$ *con* $t \in \mathbf{R} - \{0\}$ *e* A_1 *è una matrice* $(n-1) \times (n-1)$ *con* $\|A_1\| \leq 1$.

(*b*) $p_1^{\mathbf{R}} = 2$, *f è coniugata ad una mappa della forma:*

$$z \mapsto (z_1,\ A_1 z'),$$

ove A_1 *è una matrice* $(n-1) \times (n-1)$ *con* $\|A_1\| \leq 1$.

(*iii*) $p_1 > 1$ *se e solo se f è coniugata ad una mappa della forma*

$$z \mapsto (z_1,\ \ldots,\ z_{p_1},\ A_{p_1} z^{(p_1)}),$$

dove A_{p_1} *è una matrice* $(n - p_1 - 1) \times (n - p_1 - 1)$ *con* $\|A_{p_1}\| \leq 1$ *e* $z^{(p_1)} = (z_{p_1+1},\ \ldots,\ z_n)$.

Un equivalente del Lemma di Wolff in una variabile vale pure per mappe olomorfe della palla unitaria di $\mathbf{C}^n$. Infatti ogni mappa olomorfa da $\mathbf{B}^n$ in sé, ha sempre un punto fisso τ in $\overline{\mathbf{B}^n}$. Strumenti potenti per studiare e classificare le mappe lineari fratte f aventi il loro punto di Wolff $\tau \in \partial\mathbf{B}^n$ sono sembrati essere l'autospazio delle direzioni che «puntano verso la palla» (cioè l'«autospazio interno») e l'«autospazio generalizzato». Abbiamo studiato anche la ciclicità degli operatori di composizione associati a mappe lineari fratte, e dato nuovi risultati usando le forme normali qui ottenute.

L'ultima parte del secondo capitolo, la sezione 2.3, è sull'equazione di Schroeder per mappe olomorfe da $\mathbf{B}^n$ in sé che fissano l'origine. Cowen e MacCluer danno una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione σ della equazione di Schroeder (cioè la mappa di Schroeder):

$$\sigma \circ f = (df)_0 \circ \sigma$$

quando $f \in Hol(\mathbf{B}^n, \mathbf{B}^n)$ è non singolare in 0 ed è tale che $f(0) = 0$.

Presentiamo nella tesi una nuova dimostrazione dei loro risultati basata sull'uso di strumenti presi in prestito dalla dinamica complessa, che evitano tecniche di analisi funzionale come quelli scelti da Cowen e MacCluer. Nella medesima sezione 2.3 usiamo pure risultati di Cowen e MacCluer sulle mappe olomorfe che commutano, al fine di presentare un teorema di punto fisso di tipo-Cartan.

L'ultimo capitolo è su un problema al bordo di una variabile: lo studio del «fiore di Fatou» con vertice il punto di Wolff al bordo, per una mappa $f \in Hol(\Delta, \Delta)$. In questo terzo capitolo studiamo la dinamica complessa di $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ vicino al suo punto di Wolff al bordo in tre casi:

Caso 1. Sia f di tipo parabolico non-automorfismo (i.e. con derivata prima angolare uguale ad 1 nel punto di Wolff τ e con una successione di iterate convergente non-tangenzialmente a τ) una mappa che ammette una espansione in serie non-tangenziale nel punto di Wolff, sino all'ordine n-esimo, con $n \geqslant 2$. In queste ipotesi, proviamo che esiste sempre una regione invariante all'avanti per f con τ nella sua chiusura, cioè una regione P tale che $f(P) \subseteq P$ e $\tau \in \overline{P}$. Tale regione è un petalo nel senso di Milnor.

Caso 2. Sia f di tipo parabolico automorfismo (cioè con derivata prima angolare uguale ad 1 nel punto di Wolff τ e con una successione di iterate convergente tangenzialmente a τ) e sia $f \in C^{3+\varepsilon}(\tau)$ (che implica che le prime tre derivate in senso usuale di f si estendono in modo continuo a $\Delta \cup \{\tau\}$). In queste ipotesi, usando il modello lineare fratto di Bourdon-Shapiro, proviamo che esiste sempre una regione invariante all'avanti P per f con τ nella sua chiusura. Poiché f è regolare abbastanza in τ, questa regione è un orociclo.

Caso 3. Sia f di tipo parabolico-automorfismo, nel senso dato prima, ma senza alcuna regolarità nel punto di Wolff τ. In questo caso, con alcune ipotesi tecniche addizionali, troviamo una curva totalmente invariante (cioè invariante all'avanti e all'indietro) per f, con τ nella sua chiusura, che limita una regione totalmente invariante P per f, nel senso di Perez-Marco.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. ABATE, *Iteration Theory of Holomorphic Maps on Taut Manifolds*, Rende. Mediterranean Press, Cosenza (1989).

[2] C. C. COWEN, *Iteration and the Solution of Functions Analytic in the Unit Disk*, Trans. Amer. Math. Soc., **265** (1981), 69-95.

[3] C. C. COWEN, *Commuting Analytic Functions*, Trans. Am. Math. Soc., **283** (1984), 685-695.

[4] C. C. COWEN and B. MACCLUER, *Schroeder's Equation in Several Variables*, Preprint (1999).

[5] R. PEREZ-MARCO, *Fixed Points and Circle Maps*, Acta Math., **179** (1997), 243-294.

Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini», Università di Firenze
e-mail: bisi@math.unifi.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) – Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Graziano Gentili, Università di Firenze